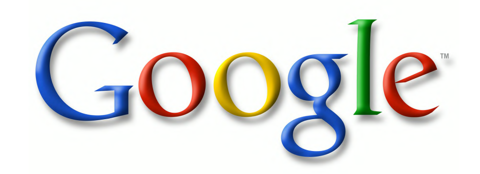






# Lehrbuch

der

# Reinen und angewandten Mechanik

für

## Maschinen- und Bautechniker

Elementar in leichtfasslicher Weise dargestellt mit Rücksicht auf den in Maschinenbau- und Bauschulen fortschreitenden Unterricht in der Mathematik und mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis versehen

von

KARL HECHT
Ingenieur, Lehrer und verw. Geometer

*Nicht das Wissen, das Können macht den Mann!*

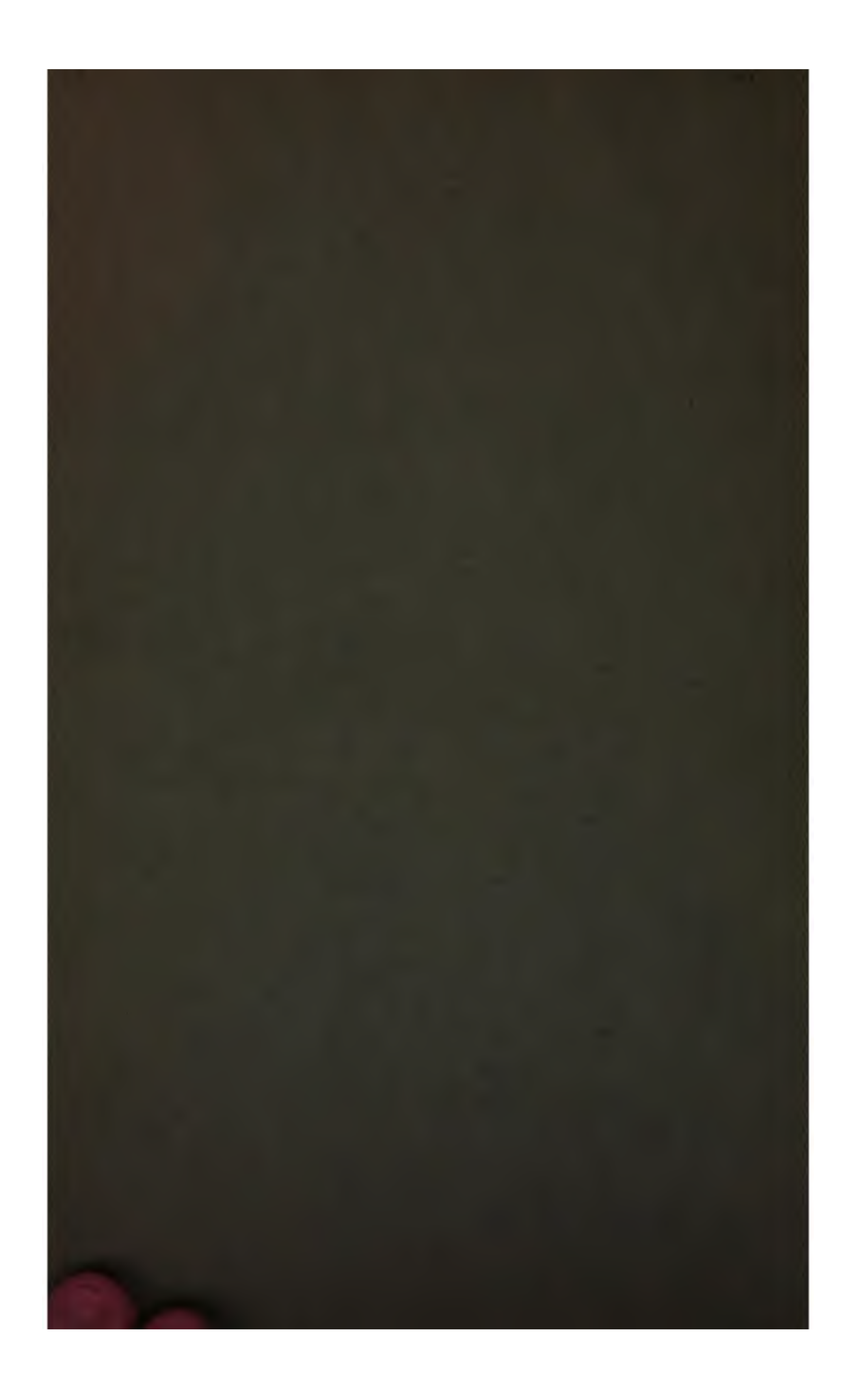
Band I:

**Die reine Mechanik**

Mit 241 Beispielen, 419 Figuren und einem Tabellenanhang

**Zweite Ausgabe**

Dresden 1900
Verlag von Gerhard Kühtmann



# Lehrbuch

der

# Reinen und angewandten Mechanik

für

## Maschinen- und Bautechniker

Elementar in leichtfasslicher Weise dargestellt mit Rücksicht auf den in Maschinenbau- und Bauschulen fortschreitenden Unterricht in der Mathematik und mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis versehen

von

**KARL HECHT**

Ingenieur, Lehrer und vereid. Geometer

*Nicht das Wissen, das Können macht den Mann!*

**Band I:**

**Die reine Mechanik**

Mit 241 Beispielen, 419 Figuren und einem Tabellenanhang

**Zweite Ausgabe**

Dresden 1900

Verlag von Gerhard Kühtmann

# Vorwort.

Mit welchen Schwierigkeiten man zu kämpfen hat, um den angehenden Techniker, welcher in den meisten Fällen ohne irgend welche Vorbereitung seine Studien in der Mechanik beginnt, so zu unterweisen, dass er mit wirklich dankbarem Interesse in dieser wohl wichtigsten Fundamentalwissenschaft der Technik selbst eine weitere geistige Verarbeitung anzubahnen strebt, dürfte wohl keinem meiner Herren Kollegen unbekannt sein.

Es steht dem Lehrer, selbstredend auch dem Schüler gewiss ein umfangreiches litterarisches Material von anerkannt guten Werken zur Verfügung, die einerseits rein theoretisch (abgesehen von der analytischen Mechanik), andererseits auch so elementar gehalten sind, dass sie schon dem Realschüler verständlich sein müssen; dessen ungeachtet aber haben meine schon langjährigen Erfahrungen nicht allein als Lehrer, sondern auch als praktischer Techniker mir gezeigt, dass wir an „Mittelwerken“, um den Ausdruck zu gebrauchen, wohl keinen Überfluss haben.

Der junge Mann besucht eine Schule, eine Baugewerkschule, ein Technikum, eine Maschinenbauschule, er ist geistig so gut wie unvorbereitet. Er hat entweder in der Praxis alles vergessen, obgleich er auf der Realschule vielleicht schon genügend vorbereitet war, oder der Besuch auf dem Gymnasium hat ihn in ganz andere Sphären als die der „Technik“ übergeleitet, oder die einfache Volksschule konnte ihn nicht genügend vorbereiten, — trotzdem soll er sofort in die „Mechanik“ sich einarbeiten, soll sozusagen gleich geistig-technisch thätig sein.

denn ich sehe hier ab von der rein physikalischen Mechanik. Wenn ihm möglicherweise auch bald die einfachen Gleichungen, oder die algebraischen Ausdrücke, namentlich das Formeleinsetzen geläufig werden, so tritt ihm doch die Trigonometrie mit ihren fremden Ausdrücken sofort entgegen; dazu kommen die in der Mechanik gleich zu Anfang notwendigen Fremdlinge: Statik, Dynamik, Moment, Resultante, Komponente, virtuelle, absolute Geschwindigkeit u. s. w.; die mehr oder weniger wissenschaftlichen Werke legt er beiseite, und die zu elementar gehaltenen sind ihm eben zu „elementar“. Ich habe darum lange überlegt, ehe ich die vorliegende Arbeit begann, um allen Anforderungen gerecht zu werden, um die Theorie so mit der Praxis und Anschauung zu vereinigen, dass der junge Mann die Flinte nicht gleich ins Korn wirft. Meine Herren Kollegen werden mir aus obigen Gründen verzeihen, wenn ich ganz abgewichen bin von den gewöhnlichen Einteilungen, wie sie nahezu alle Werke, ich möchte fast sagen pedantisch eingehalten haben, und wenn ich einen besonderen Wert auf manche, die rein praktischen Kapitel gelegt habe und die anderen, in der Praxis seltener angewendeten, nebensächlich behandelte. Der Stoff lässt sich selbstredend noch weiter sortieren, namentlich im Anfang, um etwaige zusammengesetzte Gleichungen zu umgehen; es lässt sich in andere Kapitel vorgreifen, um dann erst später, bei Repetitionen, nachzuholen.

Manche Sätze in der Mechanik lassen sich auf elementarem Wege überhaupt nicht beweisen, sie setzen weitergehende mathematische Kenntnisse voraus, so das Parallelogramm; andernteils sind dem Anfänger Weg mal Kraft, Gewicht mal Hebelarm, Pferdestärke, Trägheitsmoment, lebendige Kraft u. a. zuerst unbegreifliche Produkte, von denen sich übrigens manche auf dem indirekten Wege, mit Zuhülfenahme von Beispielen, leichter einführen lassen. Ferner habe ich auch die ursprünglich geplante strikte Trennung der Lehrsätze in Voraussetzung, Behauptung, Beweis wieder fallen lassen, da sie sich für ein praktisches Lehrbuch nicht scharf durchführen lässt infolge der parallel laufenden rein physikalischen Erklärungen. Hat der Lehrer selbst eine grössere Praxis hinter sich und weiss er die Beispiele aus

dem praktischen Leben, besser aus der praktischen Technik nach seinen mündlichen Erklärungen herauszugreifen, — denn was er nur „diktiert“, wird anfangs meist mit anderen Gedanken schon infolge der fremden Ausdrücke nachgeschrieben, — dann hat er gewonnen.

Es war mir infolge der vielen Beispiele, die ja zum Teil schon Anwendungen sind, nicht möglich, das ganze Pensum in einem Bande zu erledigen; und hoffe ich, dass die vorliegende „reine Mechanik“, wenn ich sie so nennen darf, eine günstige Vorbereitung für die noch folgenden Anwendungen auf die wichtigsten „bau- und maschinentechnischen“ Kapitel sein wird. In einigen Beispielen der analytischen Berechnung der Kräfteverteilung verschiedener Träger habe ich insofern vorgegriffen, als ich für diejenigen jungen Leute, welche etwa einen neben der Mechanik parallel laufenden Unterricht in der Graphostatik geniessen, bereits eine graphostatische Übersichtsskizze neben die Hauptfigur gesetzt habe, welche vorläufig einen Anhalt für die numerische Berechnung der absoluten Werte der Kräfte ohne Rücksicht auf Zug und Druck bietet. Gleichzeitig sage ich für die freundliche Unterstützung einiger meiner Schüler, besonders was die Zeichnungen anlangt, meinen Dank. —

Die Verlagsbuchhandlung hat sich, was die Ausstattung anlangt, die grösste Mühe gegeben und hoffe ich schliesslich, dass namentlich in den Zahlenrechnungen keine Rechenfehler stehen geblieben sind, welche besonders für den Anfänger immer schwerwiegender sind, als die eigentlichen Druckfehler.

Neustadt i. M., im Mai 1892.

**Karl Hecht.**

# Inhalt.

## Anhang.

# Einleitung und Einteilung.

Im Weltenraum ist nichts in Ruhe, sondern alles bewegt sich von einer unsichtbaren Macht getrieben; wollen wir aber dennoch von Ruhe sprechen, so meinen wir nur den relativen Zustand, in welchem ein Körper vor unseren Augen seinen Ort nicht ändert, weil wir uns in Wirklichkeit mit samt dem Körper und der Erde um die Sonne bewegen.

Die treibende Kraft ist die Ursache der Bewegung, und wenn letztere vor unseren Augen stattfindet, so sehen wir zugleich die Wirkung derselben. Eine Bewegung ohne eine treibende Kraft ist ein Unding, unmöglich, wenn uns auch die Kraft oft nicht sichtbar ist.

Die Aufgabe der Mechanik ist nun, die Wirkungen der Kräfte zu untersuchen, und kann streng genommen also nur von einer Mechanik der Bewegung — Dynamik (griechisch Kraft) — die Rede sein, dessen ungeachtet unterscheidet man aber noch die Mechanik der Ruhe — Statik (lateinisch ruhen, stehen), indem man eben einen künstlich hergestellten Ruhe-(Gleichgewichts-)Zustand annimmt.

In der Natur treten nun bekanntlich die Körper in dreierlei Form auf (die drei Aggregatzustände), als feste, flüssige und gasförmige Körper, daraus ergiebt sich eine weitere Dreiteilung der gesamten Mechanik. Als Repräsentant der flüssigen Körper nimmt man das Wasser (griech. Hydro), und bezeichnet die Mechanik der flüssigen Körper mit Hydrostatik und Hydrodynamik; der Stellvertreter der gasförmigen Körper ist die Luft (Aero, lat.). Die gesamte Einteilung ist sonach:

Mechanik der festen Körper Statik, Dynamik; der flüssigen Hydrostatik, Hydrodynamik; der gasförmigen Körper Ärostatik, Ärodynamik. —

Da wir, wie gesagt, streng genommen nur von einer Mechanik der Bewegung reden können, so ist es in erster Linie erforderlich, dass wir uns gleichsam einen mathematischen Übergang verschaffen müssen, um überhaupt den Begriff der Bewegung in ein mathematisches Gewand zu

bringen. Das Kapitel der Bewegungslehre (Phoronomie, Bewegungskunst) stellen wir den eigentlichen Betrachtungen über Mechanik voran, es bildet für uns die mathematische Einleitung in die Mechanik.

In den folgenden Blättern wollen wir uns aber nicht mit der Aufstellung der Grundsätze der Mechanik allein begnügen, die reine Mechanik, aus denen wir allerdings hinreichend Schlüsse ziehen können für eine etwaige Verwertung der Mechanik, sondern wir werden die aufgestellten Prinzipien wirklich verwerten, in dem wir sie auf praktische Fälle, besonders aber auf die wichtigsten Kapitel der Technik anwenden. Man pflegt darum reine von der angewandten Mechanik zu unterscheiden. In manchen Fällen der Anwendung erkennt man nicht einmal mehr das Gepräge der Mechanik in der Bezeichnung. So z. B. nennt man diejenigen Kapitel der angewandten Mechanik, welche von der Dimensionenberechnung der Körper handelt, die gewissen Kräften ausgesetzt, den letzteren Widerstand leisten müssen ohne zerstört zu werden, ihre Form zu ändern, die Festigkeitslehre; allerdings auch mit Recht, da der Ausdruck Festigkeitslehre dasselbe sagt, wie Anwendung der Mechanik auf die Festigkeitsverhältnisse der Körper.

Eine ganz besondere Übersicht, namentlich der Anwendung der Mechanik, bietet die graphische Darstellung (die Darstellung durch Zeichnungen, bildliche Darstellung); auf einige Kapitel derselben, die graphische Statik, werden wir besonders zurückkommen.

---

# Die Bewegungslehre.

Um uns eine allgemeine Vorstellung der Bewegung eines Körpers zu machen, müssten wir hiermit zugleich die Vorstellung der Kraft verbinden, welche auf denselben einwirkt.

Beide Begriffe, sowohl der eines Körpers als der der Kraft, fehlen uns noch; beide erheischen einen Aufwand von Erklärungen, die wir vorläufig dadurch umgehen können, wenn wir uns statt des Körpers einen Punkt denken, der um ganz unabhängig zu sein aus nichts bestehen mag, keine Ausdehnung, keine Grösse, kein Gewicht, also keine Materie hat und der sich in einem luftleeren Raume bewegen soll, damit selbst das kleinste Hindernis in Wegfall kommt. Die Kraftwirkung sei auch vollständig unsichtbar. Ferner wollen wir nur von einer geradlinigen Bewegung reden, also sehen wir von einer Zickzack oder krummlinigen Bewegung auch ab.

Denken wir uns eine unsichtbare Kraft auf einen Punkt einwirken, so ist auch kein Grund anzunehmen, weshalb er sich nach einer anderen als nach einer Geraden, der Kraftrichtung bewegen sollte; es fragt sich, durch welche Erscheinungen charakterisiert sich die Bewegung?

Es kann hier offenbar zweierlei eintreten, entweder bewegt sich der Punkt regelmässig vorwärts oder unregelmässig, ungleichförmig, im letzteren Falle entweder immer schneller, — oder immer langsamer, bis er wieder stille steht, zur Ruhe kommt.

Die regelmässige (gleichförmige) Bewegung ist nun nichts weiter als eine regelmässige Ortsveränderung des Körpers in Richtung der geraden Linie, die sich also im Laufe einer bestimmten Zeit nicht verändert, — oder der Punkt legt in derselben Zeit die gleiche Weglänge zurück. Nehmen wir als Zeiteinheit die Sekunde an, und bewegt sich der Körper in einer Sekunde v meter, dann wird er in t'' einen Weg

$$s = vt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

zurückgelegt haben.

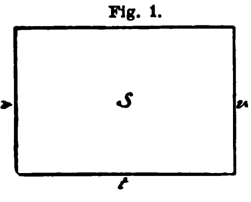
Man nennt die Bewegung in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit, und bezeichnet die Weglänge mit v. Für $t = 1$ folgt

(1a) . . . . . . . . . $s = v^m$.

Selbstredend kann man auch von einer Geschwindigkeit pro Minute oder Stunde in irgend einer anderen Masseinheit reden.

Eine einfache bildliche (graphische) Darstellung bietet uns die Geometrie dar, das Produkt s aus v und t können wir uns als Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Seitenlängen v und t sind, darstellen; aus Fig. 1 folgt dann $s = vt$.

Fig. 1.



Bewegt sich nun ein Körper immer schneller, so wird, während die Geschwindigkeit zu Anfang c war, in einem späteren Zeitraum von $t''$ diese zu einer grösseren, v werden. Durch eine geometrische Figur versinnlicht, erscheint ein Trapez. Fig. 2. Tritt der umgekehrte Fall ein, wird die Bewegung immer langsamer, dann giebt uns Fig. 3 eine bildliche Darstellung der Bewegung. Hier ist die Anfangsgeschwindigkeit c grösser als die Endgeschwindigkeit v. Die mittlere Geschwindigkeit, das arithmetische Mittel aus c und v, nämlich $\frac{v+c}{2}$ mit t multipliziert, stellt wieder den zugehörigen Weg, die Trapezfläche, dar:

Fig. 2.

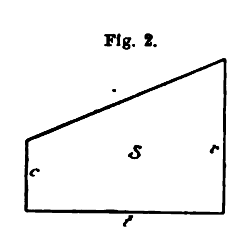
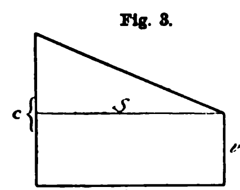


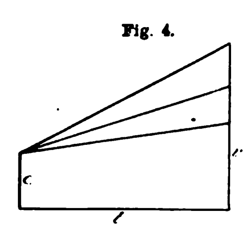
Fig. 3.



(2) . . . . $s = \frac{v+c}{2} t$.

Man nennt eine Bewegung, welche immer schneller vor sich geht, eine beschleunigte und die umgekehrte langsamer werdende verzögerte Bewegung.

Fig. 4.



Die Gleichung (2) giebt uns aber noch keinen Aufschluss, wie die Beschleunigung oder Verzögerung vor sich geht. In Fig. 4 sind verschiedene Arten von Beschleunigungen dargestellt, alle drei Arten geben ein anderes Mass für s, also einen andern Weg, ohne Rücksicht auf das Wachsthum von c auf v. Um das letztere festzustellen, müssen wir uns die Zunahme an Geschwindigkeit bilden. Bei der wachsenden, beschleunigten Bewegung hat der Körper in der Zeit $t''$ offenbar an Geschwindigkeit $v - c^m$ gewonnen, also in einer Sekunde ist der Zuwachs

$\frac{v-c}{t}$; bei der verzögernden Bewegung hat er aber ebensoviel an Geschwindigkeit verloren, nämlich $\frac{c-v}{t}$ meter. Bezeichnen wir den Zuwachs mit p, und den Verlust mit $p_1$ in der Zeiteinheit, so wird $p = \frac{v-c}{t}$ und $p_1 = \frac{c-v}{t}$.

Beide Ausdrücke lassen sich vereinigen, wenn man für

$$p_1 = -\frac{v-c}{t} = -p \text{ setzt.}$$

Eine langsamer werdende Bewegung, eine Verzögerung, lässt sich also als negative Beschleunigung darstellen; allgemein

$$p = \pm\frac{v-c}{t} \text{ oder } \pm p = \frac{v-c}{t}. \quad \dots \quad (3)$$

Ein positives p drückt die Beschleunigung pro Sekunde, und p negativ gesetzt, die Verzögerung aus.

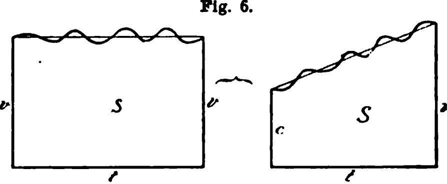
Ist endlich in beiden Fällen die Geschwindigkeit zu Anfang c = o, Fig. 5, dann folgt aus (2) und (3)

Fig. 5.

$$(4) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} s = \frac{vt}{2} \text{ und} \\ \pm p = \frac{v}{t} \end{cases}$$

Vorstehende vier Gleichungen geben uns die Naturgesetze der sämtlichen geradlinigen Bewegungen in erschöpfender Weise, und weil keine anderen Bedingungen hinzutreten können, so müssen wir aus diesen vier Gleichungen alle Fragen beantworten.

Bemerkung 1. Ein Zweifel in der Richtigkeit der obigen Formeln könnte für den weiter denkenden Anfänger nur dann aufkommen, wenn er sich die Bewegung selbst in der Zeiteinheit noch unregelmässig gestaltet denkt. Gleichbedeutend mit obigen Figuren können wir uns dergleichen Fälle durch die beistehenden Figuren versinnlichen, Fig. 6.


Fig. 6.

In solchen Fällen vernachlässigen wir die kleinen Unregelmässigkeiten und suchen eine solche Linie, welche sie ungefähr ausgleicht.

Die Resultate sind dann die gleichen wie oben, nur nennen wir sie die mittlere Geschwindigkeit, mittlere Beschleunigung oder Verzögerung.

Bemerkung 2.

Die regelmässige Bewegung eines Körpers in einem Kreis können wir nach derselben Formel wie die geradlinige gleichförmige Bewegung (Gl. 1) berechnen. Denken wir uns den Umfang des Kreises $2r\pi$ als geradlinigen Weg abgewickelt, so wird nach (1)

(5) . . . . . . . . . $2r\pi = vt,$

wenn t die Zeitdauer der Bewegung, v die Geschwindigkeit ist.

Bei Drehung von Rädern oder Anwendungen von regelmässigen Kreisbewegungen pflegt man gewöhnlich die Umgänge n in der Minute, also in $t = 60$ Sec. in Rechnung zu ziehen. Der zurückgelegte Weg ist dann $2r\pi n$ und bei $v^m$ Geschwindigkeit in der Sekunde $2r\pi n = v60$, hieraus folgt die regelmässige Umfangsgeschwindigkeit*)

(5a) . . . . $v = \frac{2r\pi n}{60} = \frac{r\pi n}{30}$ abg. $\frac{rn}{10}$.

**Beispiele:**

**I.** Ein Körper bewegt sich gleichförmig und legt in $t = 26''$ einen Weg $s = 80^m$ zurück, wie gross ist seine Geschwindigkeit?

Aus (1) folgt $v = \frac{s}{t} = \frac{80}{26} = 3{,}07^m$.

**II.** Ein Schlittschuhläufer bewegt sich mit $8^m$ Geschwindigkeit vorwärts, in 5 Minuten $(5 \cdot 60 = 300'')$ wird er den Weg zurückgelegt haben $s = v \cdot t = 8 \cdot 5 \cdot 60 = 2400^m$ oder $\frac{2400}{7500}$ abg. $^1/_3$ Meile.

**III.** Um die Geschwindigkeit eines Wasserlaufes zu bestimmen, betrachtet man einen schwimmenden Gegenstand, welcher auf einer Weglänge des Wasserlaufes $s = 120^m$, $t = 150''$ gebraucht, die Geschwindigkeit des Wassers ist sonach $v = \frac{s}{t} = \frac{120}{150} = 0{,}8^m$.

**IV.** Ein Eisenbahnzug, welcher einen Weg zwischen zwei Stationen von 9 Kilom. $= 9000^m$ in 20 Minuten zurückgelegt, hat die mittlere gleichförmige Geschwindigkeit von $v = \frac{s}{t} = \frac{9000}{20 \cdot 60} = 7{,}5^m$. Hierbei

*) Der Weg bei einem Umgang ist $2r\pi$, bei n Umgängen in der Minute $2r\pi n$, also in einer Sekunde $v = \frac{2r\pi n}{60}$. Siehe d. betr. Tabelle im Anhang.

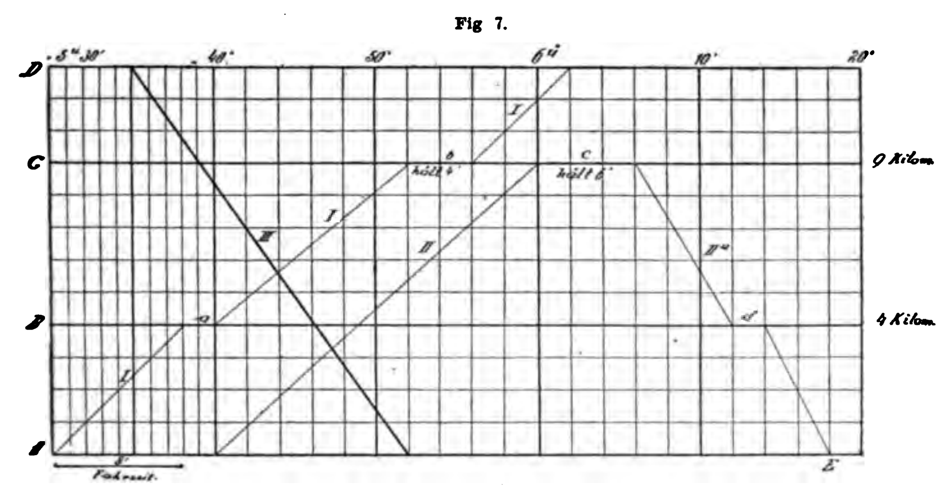
sind also etwaige Unregelmässigkeiten in der Bewegung zwischen den Stationen nicht in Rücksicht gezogen.

**V.** Die mittlere Geschwindigkeit eines Personenzuges sei 7 Meilen in der Stunde, derselbe wird also in 3 Stunden ein Weg durchlaufen haben von

$$s = vt = 7 \cdot 3 = 21 \text{ Meilen.}$$

Bemerkung 1. Im Eisenbahnbetrieb verwendet man eine ähnliche graphische Darstellung zur besseren Übersicht der sich auf der Strecke befindlichen fahrplanmässigen Eisenbahnzüge, wie oben.

Fig 7.



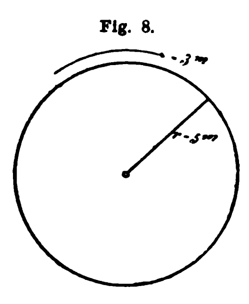

Man trägt hier die Zeit (in Minuten) auf eine horizontale Linie und senkrecht hierzu die Anzahl der Kilom. der ganzen Strecke. Fig. 7.

Wir nehmen zwischen den Stationen A und D 12 Kilom. an, B von A zu 4 und C von B zu 5 Kilom. Die Linie AE ist in Minuten geteilt und zwar innerhalb der Fahrzeit 5 Uhr 30′ und 6 Uhr 18′, das sind 48 Minuten. Zug I gebraucht nach B 8 Minuten, hält jetzt 2′ (a), fährt nach C, Fahrzeit 12′, hält 4′ (b), gelangt nach 6′ in D an. Zug II fährt zu derselben Zeit von A ab als I von B; er fährt bis C durch, und gelangt dort 4′ später an als I abfährt; hält sich 6′ auf und fährt als Zug II$^a$ mit Aufenthalt von 2′ in B zurück nach A.

Zug III wird 5 Minuten später von D abgelassen als I von A, nämlich 5 Uhr 35′, er fährt durch und gebraucht im ganzen 17′ nach Station A; er begegnet I zwischen B und C und II zwischen A und B. Die Begegnung von III und I findet, wie aus den oberen Zahlen ersichtlich, um 5 Uhr 44′ statt, während Zug II$^a$ 6 Uhr 18′ in A anlangt, in E.

Bemerkung 2. 1) Bewegt sich ein Punkt in einem Kreisbogen, dessen Radius $r = 5^m$, Fig. 8, mit $v = 3^m$ Umfangsgeschwindigkeit, dann gebraucht derselbe zu einem Umgang die Zeit nach Gl. 5

Fig. 8.



$$t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3{,}14}{3} = 10{,}2 \text{ Sek.}$$

2) Um eine Stadt, deren Durchmesser 1,8 Kilom. ist, in einer Zeit von $1^1/_4$ Stunden oder $t = 75 \cdot 60 = 4500''$ zu umfahren, musste man mit der Geschwindigkeit $v = \frac{2r\pi}{t} = \frac{2 \cdot 900 \cdot 3{,}14}{4500} = 12{,}56^m$, also bereits mit Schnellzuggeschwindigkeit fahren.

3) Ein Schwungrad, dessen Halbmesser $r = 2{,}5^m$, soll sich mit einer Maximalgeschwindigkeit von $v = 10^m$ drehen, wieviel Umdrehungen in der Minute darf es machen?

Aus (5a) folgt

$$n = \frac{60 \cdot v}{2r\pi} = \frac{60 \cdot 10}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}14} = 38{,}2 \text{ Umgänge.}$$

Näherungsweise $n = \frac{10v}{r} = \frac{100}{2{,}5} = 40.$

4) Eine Riemscheibe dreht sich in der Minute $n = 120$mal herum und hat einen Durchmesser von $0{,}8^m$, wie gross ist ihre Umfangsgeschwindigkeit?

$$v = \frac{0{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 120}{60} = 50{,}44^m$$

5) Die kleine Betriebsriemscheibe eines Ventilators, deren Durchmesser $160^{mm}$, macht $n = 1200$ Umgänge in der Minute; es bewegt sich somit ein Punkt am Umfang der Scheibe mit

$$v = \frac{160 \cdot 3{,}14 \cdot 1200}{60} = 10\,000^{mm} = 10^m \text{ Geschwindigkeit.}$$

6) Der Erdumfang am Äquator ist 5400 Meilen, ein Punkt gebraucht hier für einen Umgang die Zeit $t = 24$ Stunden. Nach Gl. 5 ist sonach die Geschwindigkeit desselben

$$v = \frac{2r\pi}{t} = \frac{5400}{24 \cdot 60 \cdot 60} = {}^1/_{16} \text{ Meile in der Sek., das sind}$$

$$v = \frac{7500}{16} = 469^m \text{ abgerundet.}$$

**VI.** A ist 8 Kilom. von B entfernt. Es wird ein Bote von A nach B geschickt, er gebraucht hierzu $1^1/_2$ Stunde. Ein anderer Bote wird

dem ersteren $\frac{1}{4}$ Stunde später nachgesandt, dieser gebraucht aber von A bis B nur $1\frac{1}{3}$ Stunde; wird der zweite Bote den ersten noch vor B erreichen?

Es ist $s = 8000^m$ und die Zeit, welche der erste Bote gebraucht, zwischen A und B $1{,}5 \cdot 60 \cdot 60$ Sekunde, also seine Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t} = \frac{8000}{1{,}5 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}48^m$. Die Geschwindigkeit des zweiten Boten ist

$$v_1 = \frac{8000}{\frac{4}{3} \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}67^m.$$

Um nun einen gewissen Weg $s_o$ zu erreichen, ist die Zeit des ersten Boten $t = \frac{s_o}{v}$, die des zweiten aber 15 Min. $+ \frac{s_o}{v_1} = 900'' + \frac{s_o}{v_1}$, beide Zeiten sind gleich, also

$$\frac{s_o}{v} = 900 + \frac{s_o}{v_1};$$

hieraus ergiebt sich der zurückgelegte Weg beider Boten bis zum Zusammentreffen derselben,

$$\frac{s_o}{v} - \frac{s_o}{v_1} = 900 \text{ und} \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

$$s_o = \frac{900}{\frac{1}{v} - \frac{1}{v_1}} = \frac{900}{\frac{1}{1{,}48} - \frac{1}{1{,}67}} = 10\,950^m.$$

Es folgt somit, dass der zweite Bote den ersten nicht mehr erreicht. Würden beide mit demselben Schrittmasse weiter gehen, so würden sie erst bei ungefähr 11 Kilom. (10,950 Kilom.) von A entfernt zusammentreffen. Der erste Bote gebraucht $1\frac{1}{2}$ St. oder 90 Min., der andere nur $1\frac{1}{3}$ St. $= 80'$, geht aber $15'$ später ab, also gebraucht im ganzen $95'$; folglich muss der erste Bote $5'$ warten, bis der zweite in B anlangt. Ist allgemein die Zeit des Abganges des zweiten Boten von A $t_o''$ später, dann treffen sie zusammen nach Zurücklegung eines Weges Gl. (a) entsprechend von

$$s_o = \frac{t_o}{\frac{1}{v} - \frac{1}{v_1}} = t_o \frac{v v_1}{v_1 - v} \text{ Meter.} \quad \ldots \quad (b)$$

Sind die Geschwindigkeiten beider gleich, dann treffen sie nie zusammen, weil für $v_1 = v$, $s_o = \infty$.

Sollen beide gleichzeitig in B zusammentreffen bei Abgang des zweiten Boten um $t_o = 800'' = 13\frac{1}{3}$ Min. später, dann setzen wir, weil $s_o = 8000^m$, $8000 = 800 \frac{v v_1}{v_1 - v}$. Ist wieder die Geschwindigkeit des

zweiten $v_1 = 1^2/_3{}^m$ i. d. Sek., dann folgt v aus $8000 = 800 \frac{v \cdot {}^5/_3}{{}^5/_3 - v}$,

$v = \frac{10}{7} = 1^3/_7{}^m$ i. d. Sek.

Der erste Bote gebraucht dann zwischen A und B die Zeit

$$t = \frac{8000}{{}^{10}/_7} = 5600'' = 1^5/_9 \text{ Stunden.}$$

**VII.** Beträgt die Entfernung zwischen zwei Orten P und Q $s^m$, ist die Geschwindigkeit eines Boten $v^m$, die eines anderen n mal so gross, also $nv^m$; dann gebraucht der erste die Zeit, um s zu durchlaufen $t = \frac{s}{v}$, und der andere $t_1 = \frac{s}{nv}$ Sek. Der zweite Bote kann also um $t_0''$ später abgehen, und muss $t_1 + t_0 = t$ sein, wenn beide zusammentreffen sollen.

Aus obigen beiden Zeitbestimmungen folgt $s = vt = nvt_1$ oder $t = nt_1$, weil aber $t_1 = t - t_0$, so wird $t = n\ (t - t_0)$ oder

$$n = \frac{t}{t - t_0}.$$

Gebraucht der erste Bote $t = 1$ St. zwischen P und Q, geht der zweite $t_0 = {}^1/_2$ St. später ab, dann muss der erste natürlich noch einmal so schnell gehen, weil $n = \frac{1}{1 - {}^1/_2} = 2$.

**VIII.** Drei Orte, M, N, O liegen in den Entfernungen $s^m$ und $s_1{}^m$ von einander. Vom mittleren Ort N geht ein Bote $B_1$ nach O. Er gebraucht zu der Entfernung $s_1$ die Zeit $T_1$ St.; ein anderer Bote $B_2$ geht von M ab, und gebraucht die Zeit T, um von M nach O zu gehen, also T St. zur Zurücklegung des Weges $s + s_1$. Die Geschwindigkeit des

(a) ersten Boten ist $v_1 = \frac{s_1}{60 \cdot 60 \cdot T_1}$, die von

(b) . . . . . . . $B_2$ ist $v = \frac{s + s_1}{60 \cdot 60 T}$.

Sollen beide gleichzeitig in O zusammentreffen, dann müssen die Zeiten gleich sein $T = T_1$ und es verhalten sich die Geschwindigkeiten $v_1$ und v, durch Division der Gl. (a) und (b), folgendermassen $\frac{v_1}{v} = \frac{s_1}{s + s_1}$,

(c) hieraus folgt die Geschwindigkeit des $B_2$, $v = v_1 \frac{s + s_1}{s}$.

Sind die Orte gleichweit entfernt $s = s_1$, dann ist die Geschwindigkeit des zweiten Boten $v = 2v_1$ doppelt so gross wie die des $B_1$.

Sollen sie in der Mitte zusammentreffen, so ist die Weglänge des ersten Boten in der Zeit t, $\frac{1}{2} s_1 = v_1 t$; die des $B_2$ aber in derselben Zeit $s + \frac{s_1}{2} = vt$.

Aus der ersten dieser Gl. folgt $t = \frac{s_1}{2 v_1}$; in die zweite eingesetzt, wird

$$s + \frac{s_1}{2} = v \frac{s_1}{2 v_1}.$$

Hierin v und $v_1$ aus (a) und (b) eingeführt, um nur von den gegebenen Verhältnissen abhängig zu werden, folgt

$$s + \frac{s_1}{2} = \frac{T_1}{T} \frac{s + s_1}{2}, \text{ hieraus wird}$$

$$T_1 = T \frac{2s + s_1}{s + s_1}. \quad \dots\dots\dots \quad (d)$$

Wenn $s = 6000^m$, $s_1 = 4000^m$, und $B_2$ die Zeit T = 6 St. gebraucht von M nach O, so muss der erste Bote zwischen N und O die Zeit $T_1 = \frac{2 \cdot 6000 + 4000}{6000 + 4000} 6 = 9{,}6$ St. = 9 St. 36′ nötig haben.

Die Geschwindigkeit des ersten ist dann

$$v_1 = \frac{s_1}{3600 T_1} = \frac{4000}{3600 \cdot 9{,}6} = 0{,}116^m;$$

die des anderen

$$v = \frac{s + s_1}{3600 T} = \frac{10000}{3600 \cdot 6} = 0{,}463^m.$$

Beide treffen dann in der Mitte zwischen N und O zusammen.

Zur Zurücklegung des Weges $s + \frac{s_1}{2} = 8000^m$ gebraucht $B_2$ die Zeit $t = \frac{8000}{0{,}463} = 17\,200$ Sek., dieselbe Zeit gebraucht $B_1$ von N zu seinem Weg $\frac{s_1}{2}$, nämlich $t = \frac{2000}{0{,}116} = 17\,200''$ oder $\frac{T_1}{2} = \frac{9{,}6}{2} = 4{,}8$ St. = 4 St. 48′, sonst wäre kein Zusammentreffen in obigem Sinne möglich.

**IX.** Es liegen drei Orte A, B, C in den Entfernungen AB = s und und $BC = s_1{}^m$. Es braucht ein Bote von A nach C die Zeit T St., ein anderer die Zeit $T_1$ St. Die Geschwindigkeiten beider sind v, der Zeit T und $v_1$ der Zeit $T_1$ entsprechend,

$$v = \frac{s + s_1}{3600 T}, \quad v_1 = \frac{s + s_1}{3600 T_1}.$$

Geht der erste Bote $B_1$ von A ab, der zweite $T_0$ St. später von B, unter welchen Bedingungen und wo treffen sie zusammen?

$B_1$ hat einen Vorsprung von $T_0$ St. oder $3600\ T_0''$, seine Weglänge in dieser Zeit ist $3600\ T_0 v^m$, beide gehen jetzt in einer gewissen Zeit t'' ihre gewohnten Schritte weiter und kann $B_2$ $B_1$ nur, nachdem er den Ort B durchschnitten hat, einholen; $B_1$ gesamte Weglänge ist $x = s + y = 3600 T_0 v + vt$. Der andere Bote legt während der Zeit t die Weglänge $y = v_1 t$ zurück, die allerdings grösser oder kleiner als $s_1$ sein kann, weil der Bote $B_2$ von B aus abgeht; wir erhalten hieraus die Bedingungsgleichung $y = v_1 t$ in x eingesetzt $x = s + v_1 t = 3600\ T_0 v + vt$ und die Geschwindigkeiten v und $v_1$ eingeführt,

$$(3600\ T_0 + t) \frac{s + s_1}{3600\ T} = s + \frac{s + s_1}{3600\ T_1} t;$$

x ist hierbei die Weglänge des Ortes von A aus, wo beide zusammentreffen.

Die letzte Gleichung liefert die Zeit des Zusammentreffens nach Abgang des zweiten Boten von B aus gerechnet

$$t = 3600 \frac{T_1 [sT - (s + s_1) T_0}{(s + s_1)(T_1 - T)}.$$

Sie treffen nie zusammen, wenn $T_1 = T$, dann wird $t = \infty$.

Gehen sie beide gleichzeitig ab, dann ist $T_0 = 0$ und

$$t = 3600 \frac{T_1 sT}{(s + s_1)(T_1 - T)}.$$

Der Ort des Zusammentreffens von B aus findet sich aus

$$y = v_1 t = \frac{s + s_1}{3600\ T_1} t, \text{ von A aus gerechnet, aus}$$

$$x = s + y = s + v_1 t.$$

Gebraucht der erste Bote von A nach C, $T = 4$ St., der andere aber nur $T_1 = 2$ St., geht der zweite Bote von B, $T_0 = 3$ St. später ab als der erste von A und sind die Entfernungen $s = s_1$ gleich, dann ist

$$t = \frac{3600 \cdot 2 [s \cdot 4 - 2s \cdot 3]}{2s (2 - 4)} = 3600'' = 1 \text{ Stunde}.$$

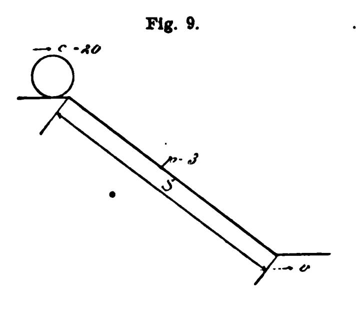
Nachdem also der zweite Bote 1 St. von B aus unterwegs ist, wird er mit dem ersten zusammenkommen in einer Enfernung von A

$$x = s + \frac{s + s_1}{3600\ T_1} t = s + \frac{2 \cdot s \cdot 3600}{3600 \cdot 2} = 2s^m \text{ d. h. in C.}$$

**X.** Ein Körper kommt mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 20^m$ an, Fig. 9, und läuft mit der Beschleunigung $p = 3^m$ eine schiefe Ebene

herab*); welchen Weg legt er in $t = 6$ Sek. zurück? In den beiden Formeln (2) und (3) ist gegeben $c = 20$; $+ p = 3$; $t = 6$; die Endgeschwindigkeit v wird aus beiden eliminiert, sie kann in der Aufgabe nicht mit enthalten sein.

Fig. 9.




Aus $+ p = \frac{v - c}{t}$ folgt $pt = v - c$ und $v = c + pt$, in $s = \frac{v + c}{2} t$ eingesetzt, folgt $s = \frac{pt + c + c}{2} t = ct + \frac{1}{2} pt^2$, die Zahlen eingesetzt,

$$s = ct + \tfrac{1}{2} pt^2 = 20 \cdot 6 + \tfrac{1}{2}\, 3 \cdot 36 = 174^m. \quad . \quad . \quad (6)$$

Die erlangte Endgeschwindigkeit aus (3) ist

$$v = pt + c = 20 + 316 = 38^m.$$

**XI.** Würde der Körper statt zum Berge herunter zu laufen, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit $6 = 20^m$ vor dem Berge anlangen und mit $p = -3^m$ Verzögerung in einer Sekunde hinauflaufen; dann ist der Weg, den er in $t = 6''$ zurücklegt,

$$s = ct - \tfrac{1}{2} pt^2 = 20 \cdot 6 - \tfrac{1}{2}\, 3 \cdot 36 = 66^m. \quad . \quad . \quad (6a)$$

Die Lösung ergiebt sich aus der vorigen Aufgabe, indem wegen der verzögernden Bewegung p negativ gesetzt wird.

Die Endgeschwindigkeit v ist hier, weil der Körper immer langsamer läuft, $v = -pt + c = c - pt = 20 - 3 \cdot 6 = 2^m$.

Der Körper wird stehen bleiben, wenn die Endgeschwindigkeit $v = 0$, $0 = c - pt$ oder $c = pt$, wenn $t = \frac{c}{p} = \frac{20}{3} = 6\,{}^2/_3{}''$, also der Körper $6\,{}^2/_3$ Sek. Zeit zur Bewegung gebraucht hat.

Diese Zeit liefert den grössten Weg, den der Körper überhaupt bis zum Stillstand, $v = o$, zurücklegen kann, mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 20^m$, nämlich

$$s = 20 \cdot 6\,{}^2/_3 - \tfrac{1}{2}\, 3\,(6\,{}^2/_3)^2 = 66\,{}^2/_3{}^m.$$

**XII.** Derselbe im vorigen Beispiel angeführte Körper würde nach $t = 10''$ noch einen Weg mit der Verzögerung $p = -3$ zurücklegen von (Gl. 6a).

$$s = 20 \cdot 10 - \tfrac{1}{2}\, 3 \cdot 10^2 = 50^m.$$

*) Wir werden weiter unten auf die Abhängigkeit vom Neigungswinkel zurückkommen, für die anfängliche Darstellung von p genügt uns die schiefe Ebene oder ein Berg vollkommen.

Dieser ist kleiner als der in der kürzeren Zeit $t = 6^2/_3''$; folglich ist der Körper, nachdem er den obigen Weg von $s = 66^2/_3{}^m$ zurückgelegt hatte, einen Augenblick stehen geblieben und nun wieder zurückgelaufen, und zwar bei $c = 0$ Anfangsgeschwindigkeit mit der **Beschleunigung** $p = 3^m$. In $10''$ hat er die negative Endgeschwindigkeit

$$v = -pt + c = -3 \cdot 10 + 20 = -10^m;$$

der Rücklauf für sich allein betrachtet, geschieht in der Zeit

$$t = 10 - 6^2/_3 = 3^1/_3 \text{ Sek.}$$

Für diese Zeit wird, weil $c = 0$, $p = +3$

$$s = 0 + {}^1/_2\, pt^2 = {}^1/_2\, 3\,(3^1/_3)^2 = 16^2/_3{}^m.$$

Subtrahiert man diesen vom grössten Weg $66^2/_3$, dann erhält man auch $50^m$.

Bem. Aus der Gl. $s = ct - {}^1/_2\, pt^2$ findet sich für $s = 0$, $ct = \frac{pt^2}{2}$ und hieraus $t = \frac{2c}{p} = \frac{2 \cdot 20}{3} = 13^1/_3$ für obige Fälle.

Der Körper hat den Weg $s = 66^2/_3$ zweimal zurückgelegt, verzögernd nach oben, in der Zeit $\frac{13^1/_3}{2} = 6^2/_3$ Sek. und ohne Anfangsgeschwindigkeit in $6^2/_3''$ nach unten, denn es ist $\frac{t}{2} = \frac{c}{p} = \frac{20}{3} = 6^2/_3$.

Setzt man in $v = -pt + c$, $t = 13^1/_3$ ein, dann wird die Endgeschwindigkeit des Körpers

$$v = -3 \cdot 13^1/_3 + 20 = -20,$$

das ist nichts anderes als die obige Anfangsgeschwindigkeit, die er hatte, als er den Weg $66^2/_3{}^m$ verzögernd antrat; denn für $c = 0$ folgt wieder

$$s = +\,{}^1/_2\, 3 \cdot (6^2/_3)^2 = 66^2/_3{}^m.$$

(7) Führt man die Zeit $t = \frac{c}{p}$ aus $v = c - pt = 0$ gesetzt, welche er also bis zur Ruhe gebraucht, in $s = ct - {}^1/_2\, pt^2$ ein, dann folgt auch der grösste Weg abhängig von c und p, nämlich

(8) . . . . . $$s = c\frac{c}{p} - {}^1/_2\, p\,\frac{c^2}{p^2} = {}^1/_2\,\frac{c^2}{p}.$$

Für $c = 20$, $p = 3$ folgt wieder $s = 66^2/_3$.

**XIII.** Es bewegt sich ein Körper beschleunigend mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 2^m$ und erlangt für $p = 1{,}6^m$ Beschleunigung eine Endgeschwindigkeit $v = 12^m$, welchen Weg hat er zurückgelegt?

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen (2) und (3) die Zeit t,

in dem man aus der zweiten Gl. $t = \frac{v - c}{p}$ in die erste einsetzt, dann findet sich

$$s = \frac{v + c}{2} t = \frac{v + c}{2} \cdot \frac{v - c}{p} = \frac{v^2 - c^2}{2p}; \quad \ldots \quad (9)$$

Die Werte eingesetzt

$$s = \frac{12^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot 6} = 43{,}75^m.$$

Ist die Bewegung eine verzögernde, dann wird

$$s = -\frac{v^2 - c^2}{2p} = \frac{c^2 - v^2}{2p}, \quad \ldots \ldots \quad (9a)$$

und für $v = 0$ folgt wieder $s = \frac{c^2}{2p}$ derjenige Weg, den der Körper zurücklegt, bis er zur Ruhe kommt, Gl. 8.

**XIV.** Ein Körper läuft ohne Anfangsgeschwindigkeit mit einer Beschleunigung $p = 12^m$ abwärts, wie gross ist seine Endgeschwindigkeit, nachdem er einen Weg $s = 50^m$ durchlaufen hat? Hier ist $c = 0$, die Zeit t kommt nicht in Betracht, folglich können wir die eben entwickelte Formel Gl. 9 für $c = 0$ verwenden, dann aber wird $s = \frac{v^2}{2g}$ und hieraus

$$v = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \cdot 12 \cdot 50} = 38{,}48^m. \quad \ldots \quad (10)$$

**XV.** Hat ein Körper einen Weg $s = 1000^m$ bei der Anfangsgeschwindigkeit $c = 0{,}5^m$ und in der Zeit von zwei Minuten zurückgelegt, wie gross war die Beschleunigung?

Zur Entwickelung von p können wir hier Gl. 6 verwenden, und zwar folgt aus derselben $\frac{1}{2} pt^2 = s - ct$ und somit

$$p = \frac{2(s - ct)}{t^2} = \frac{2(1000 - 0{,}5 \cdot 2 \cdot 60)}{(2 \cdot 60)^2} = 0{,}12^m.$$

**XVI.** Ein Punkt hat die Anfangsgeschwindigkeit $c = 6^m$ und erreicht in einer Viertelstunde die Endgeschwindigkeit $v = 100^m$, welchen Weg hat er zurückgelegt?

Setzt man $v = 100$, $t = 15 \cdot 60 = 900$, $c = 6$ in $s = \frac{v + c}{2} t$ ein, dann folgt $s = 47\,700^m = 6 \cdot 36$ Meilen.

Seine Beschleunigung hierbei war in der Sek.

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{100 - 6}{900} = 0{,}104^m.$$

**XVII.** Ein Körper legt ohne Anfangsgeschwindigkeit bei $p = 10^m$ Beschleunigung einen Weg $s = 12\,000^m$ zurück; in welcher Zeit?

Aus den beiden Gl. 2, 3 folgt für $c = 0$

$$s = \frac{vt}{2} \text{ und } p = \frac{v}{t}.$$

Die letztere liefert $v = pt$; in erstere eingesetzt, folgt $s = p\frac{t^2}{2}$, hieraus

(11) . $t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12\,000}{10}} = 48{,}99$ abg. 49 Sek.

**XVIII.** Die Endgeschwindigkeit eines sich mit der Beschleunigung $p = 2^m$ bewegenden Punktes in der Zeit $t = 4''$ sei $v = 15^m$; wie gross war die Anfangsgeschwindigkeit?

Aus $p = \frac{v - c}{t}$ (Gl. 3) folgt

$$pt = v - c \text{ und } c = v - pt = 15 - 2 \cdot 4 = 7^m.$$

**XIX.** Bewegt sich ein Körper gleichförmig mit der Geschwindigkeit $w = 5^m$ in der Sek., und legt den Weg $s = 500^m$ zurück; ein anderer Körper bewegt sich beschleunigend und legt in derselben Zeit den gleichen Weg zurück, wie gross muss die Beschleunigung im letzteren Fall sein.

Aus (Gl. 1) folgt $t = \frac{s}{w}$. Die Zeit abhängig vom Weg und der Beschleunigung haben wir bereits in (Gl. 11) entwickelt, beide Zeiten gleichgesetzt, wird

$$\frac{s}{w} = \sqrt{\frac{2s}{p}}, \text{ hieraus } p = \frac{2w^2}{s} = \frac{2 \cdot 5^2}{500} = 0{,}1^m.$$

**XX.** Ein Körper, welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^m$ und der Beschleunigung $p = 5^m$ einen Weg $s = 800^m$ zurücklegt, hatte hierzu wieviel Zeit nötig?

Aus der Formel (6) $s = ct + \frac{1}{2}pt^2$, welche den gegebenen Bedingungen entspricht, muss t entwickelt werden.

Nach den Grundsätzen der Gl. II Gr. folgt durch $\frac{1}{2}p$ dividiert, $\frac{2s}{p} = \frac{2ct}{p} + t^2$, und hieraus entwickelt sich

$$t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2sp}}{p}.$$

Setzt man die Werte ein, dann erhält man

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 2 \cdot 5 \cdot 800}}{5} = +16 \text{ oder } -20 \text{ Sek.}$$

Für uns gilt hier nur das positive Zeichen, also $t = 16$ Sek., das negative Resultat hat nur einen numerischen Wert.

**XXI.** Hatte bei der gleichen Beschleunigung $p = 5^m$ der Körper keine Anfangsgeschwindigkeit, dann sind in

$$s = \frac{1}{2} p t^2$$

die Werte eingeführt, und t berechnet

$$t = \pm\sqrt{\frac{2s}{p}} = \pm\sqrt{320} = \pm 18''.$$

Selbstredend kann auch hier von keiner negativen Zeit die Rede sein.

**XXII.** Bewegt sich ein Körper verzögernd mit $p = -5^m$ Verzögerung, einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^m$ und wird nach der Zeit gefragt, in welcher er den Weg $s = 800^m$ zurückgelegt, so ergiebt sich aus (6a)

$$s = ct - \frac{1}{2} p t^2, \text{ die Zeit } t \text{ entwickelt}$$

$$t = \frac{+c \pm \sqrt{c^2 - 2sp}}{p}.$$

Sobald $c^2 < 2sp$ kann der Körper den fraglichen Weg überhaupt nicht zurücklegen, weil er schon vorher stehen bleibt, die Wurzel wird dann imaginär. Im Augenblick, wo $2sp = c^2$ wird die Wurzel Null, dann tritt die Bedingung der (Gl. 8) in Kraft $s = \frac{1}{2}\frac{c^2}{p}$.

In obigem Beispiel ist die Auflösung unmöglich, weil thatsächlich $10^2 < 2 \cdot 800 \cdot 5$. Der grösste Weg ist hier $s = \frac{1}{2}\frac{10^2}{5} = 10^m$; die diesem Weg entsprechende Zeit $t = \frac{+10}{5} = 2$ Sek.

---

# Die Mechanik der festen Körper.

## Der Körper.

### Begriff von Masse, Gewicht, Beschleunigung und Kraft.

Während wir uns unter Punkt ein bewegungsfähiges Körperteilchen, Molekül, Atom ohne Ausdehnung und Masse vorgestellt haben, welches unter Einwirkung einer sichtbaren oder unsichtbaren Kraft irgend eine Bewegung erhält, so denken wir uns den Körper als einen grösseren oder kleineren Raum von einer gewissen Ausdehnung, Länge, Breite, Höhe, regelmässig oder unregelmässig gebildet, dessen Inneres mit einer entsprechenden Masse, Materie erfüllt ist, wodurch der Körper für uns greifbar, und wenn wir ihn erfassen, durch sein Gewicht fühlbar wird. Gleichzeitig verbinden wir aber auch mit diesem Begriff den der Starrheit, oder sagen wir Festigkeit, Sicherheit gegen das Zerstören, sodass, wenn eine Kraft einwirkt an irgend einer Stelle, sie sich durch alle Teile des Körpers in derselben Richtung fortsetzt; es ist also hiernach für uns gleichgültig, ob ein Körper gezogen oder gedrückt wird, er folgt infolge seiner Starrheit ohne Formveränderung.

Die vorstehenden Erklärungen setzen einige uns bis jetzt fremdartige Begriffe voraus, Masse und Gewicht, die offenbar mit Kraft im Zusammenhang stehen müssen; denn naturgemäss können wir uns, wie schon zu Anfang erwähnt, eine Bewegung ohne Kraftwirkung nicht vorstellen. Das Wesen der Kräfte müssen wir demnach aus der Natur zu schöpfen suchen, und lehrt uns die Physik (d. i. die Naturkunde, Naturwissenschaft) thatsächlich dasselbe erkennen, insoweit, als sie uns eben in die Geheimnisse der Natur einblicken lässt.

Die zunächst liegende Naturkraft bietet uns zur Verwertung der Mensch, das Tier, überhaupt jedes organische Wesen selbst durch seine Körperstärke (Körperkraft), mit der es heben, schieben, Körper in Bewegung, Umdrehung versetzen kann. Entfernter liegen schon die Gewichte, die erst durch eine Kraftwirkung gehoben werden müssen, ehe sie zu einer Leistung verwertet werden können. Das Wesen der Kraft liegt bei denselben in der Anziehungskraft der Erde, das Bestreben

eines jeden Körpers sich dem Mittelpunkt der Erde zu nähern. Dieses Bestreben hat aber auch jedes organische Wesen, welches mit seinem Körpergewicht auf die Oberfläche der Erde drückt, somit kann ein solches in zweierlei Hinsicht thätig sein: durch sein Gewicht und durch seine innere Kraft. Das Gleiche gilt aber auch von der Wasserkraft. Das fliessende Wasser sowohl, welches wir im Laufe zu hemmen suchen, damit es durch seinen hierdurch erfolgten Stoss oder Druck eine Kraft ausübt, als das stehende Wasser, welches als Wassergewicht sinkt und hierdurch, z. B. durch Vermittelung eines Rades treibend wirkt, — haben immer das Bestreben sich dem Mittelpunkt der Erde zu nähern, senkrecht zu fallen oder bergab zu fliessen. Auch die Luft ist dieser sogenannten Schwerkraft unterworfen, welche freilich infolge einer noch später zu erklärenden Eigenschaft (Zusammendrückbarkeit, Elastizität) auch in besonderer Weise ausgenutzt wird. Erst wenn bei dieser noch ein anderer Faktor, die Wärme, hinzutritt, dann kommt sie in Bewegung. Die warme Luft steigt nach oben, weil sie leichter wird, zieht die kalte nach, und den jetzt entstandenen Wind fangen wir als Betriebskraft (motorische Kraft), herrührend von den verschiedenen Luftströmungen auf der Erde, in geeigneter Weise auf.

Der Dampf als motorische Kraft ist ebenfalls ein Produkt der Wärme, kann also auch nicht zu den absoluten Naturkräften gerechnet werden.

Die magnetischen und elektrischen Kräfte, welche teils durch Berührung, teils durch Reibung entstehen, sind in ihrem inneren Wesen bis jetzt noch nicht hinreichend, genau genug erklärt, obgleich sie dennoch, wie bereits bekannt, genug Anwendungen gefunden haben.

Aus allen diesen ist ersichtlich, dass die Anziehungskraft der Erde und die Wärme im Wesen der Kräfte eine hervorragende Rolle spielen. —

Jeder Körper ist also erfüllt mit einer ihm besonders charakteristischen Materie, Stoff, nach welchem der Körper benannt wird, Holz, Eisen, Stein u. s. w. Nehmen wir nun drei Kugeln zur Hand von gleicher Grösse, aus Holz, Stein und Eisen, und erteilen wir denselben durch drei gleiche auf die drei Kugeln wirkende Kräfte eine Bewegung auf horizontaler Bahn, dann werden sie, plötzlich gleichzeitig aufgehalten in ihrem Laufe, einen ungleichen Druck auf die Hand ausüben, die Holzkugel den geringsten, die Eisenkugel den grössten Druck, weil ihre Massen, ihr Stoff verschiedene Wirkungen äussern. Damit sie den gleichen Druck ausüben, müssen bei derselben Bewegungsgrösse die Kräftewirkungen verschieden sein und in gleichem Verhältnis zu den Massen (Materien) stehen, aus denen die

Körper, die Kugeln, gebildet sind. Lassen wir aber auf jede der Massen ohne Aufhören eine Kraft wirken, dann werden die letzteren eine beschleunigte Bewegung annehmen. Der Grund ist leicht einzusehen. Ein in Bewegung gesetzter Körper wird, nehmen wir der Einfachheit wegen wieder eine horizontale Bahn an, wenn die Kraft nur einen Moment gewirkt hat, so lange seine Bewegung beibehalten, bis die Kraft der Bewegung von der entgegenwirkenden Luft oder Reibung der Unterlage verzehrt ist. Wirkt aber die Kraft unaufhörlich auf den Körper ein, so wird die Bewegung immer stärker und stärker, weil die Massenteilchen immer mehr und mehr sogenannte lebendige Kraft in sich aufspeichern; lebendig, weil die an und für sich toten Massen durch die Bewegung scheinbar lebendig erscheinen, und die immer gleichfort wirkende Kraft einen immer grösseren Schwung in der Bewegung infolge der Masse oder des Gewichtes des Körpers erzeugt. Ein herabrollender Stein wird von der Anziehungskraft der Erde unten mit grosser Geschwindigkeit ankommen, während er oben gar keine hatte, in Ruhe war. Ein auf einer Achse drehbares Rad wird sich immer leichter und leichter drehen lassen, weil die sich drehenden Massen durch die Kraftwirkung immer mehr Schwungkraft bekommen, wodurch eben, wenn die Kraft stets dieselbe, eine immer steigernde Bewegung erzeugt wird. Eine Kraft erzeugt also eine Beschleunigung; je mehr Masse der Körper in sich birgt, je mehr er wiegt, können wir uns auch ausdrücken, um so grösser muss die Kraft sein, welche ihn überhaupt in Bewegung setzen soll. Würde die Masse plötzlich eine grössere, der Körper plötzlich schwer werden, dann würde bei der gleichen Kraftwirkung die Bewegung sofort eine geringere werden müssen. Hieraus ziehen wir den (mathematischen) Schluss, dass naturgemäss die Kraft der Masse direkt, aber die Beschleunigung der Masse indirekt proportional ist, oder diese drei Grössen mit m, K, p bezeichnet, sein muss,

$$(12) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad m = \frac{K}{p}.$$

Die Masse wächst mit der Kraft, wird aber kleiner, wenn die Beschleunigung grösser wird. Bezeichnen wir die Anziehungskraft der Erde, also das Gewicht eines Körpers mit G und die Beschleunigung, mit der die Erde auf jeden Körper einwirkt mit g, so muss für diesen speziellen Fall auch sein

$$(13) \quad . \; . \quad m = \frac{G}{g} = \frac{\textbf{Gewicht}}{\textbf{Erdbeschleunigung}}, \; G = mg.$$

In dieser Formel kommt es nur noch darauf an, den Wert g festzustellen, zu konstatieren, dass er wirklich für alle Körper gleich gross ist.

Diese Thatsache hat aber bereits Galiläi (1590) durch direkte Versuche dargelegt. Er liess vom schiefen Turm zu Pisa verschiedene Körper, denen die Luft keinen Widerstand bot, herabfallen und fand einen für alle Körper gleich grossen Zuwachs an Geschwindigkeit. Der pisaner Turm hat eine Höhe von $h = 54{,}5^m$ und gebraucht ein Körper die Zeit $t = 3{,}33 = 3\,^1/_3$ Sek. zum Herabfallen, ohne Anfangsgeschwindigkeit. Setzen wir in Gl. 6, $c = o$, $s = h$, $p = g$, dann folgt

$$h = \tfrac{1}{2}\, g t^2, \text{ und hieraus die Erdbeschleunigung} \quad . \quad . \quad (14)$$

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 54{,}5}{3{,}33^2} = 9{,}808^m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Einem Gewicht von $G = 10\,000$ Klg. entspricht die Masse

$$m = \frac{G}{g} = \frac{10\,000}{9{,}81} = 1019 \text{ Klg.}$$

Wirkt auf eine Masse $m = 1019$ Klg. die Kraft $K = 600$ Klg., so entspricht dies der Beschleunigung $p = \frac{600}{1019} = 0{,}589^m$. Um die Beschleunigung $g = 9{,}808^m$ zu erlangen, muss die Kraftwirkung natürlich dem Gewicht gleich sein.

Lässt man in einer luftleeren Röhre eine Feder neben einer Bleikugel (ohne Anfangsgeschwindigkeit) fallen, so kommen sie beide gleichzeitig unten an, und zwar wieder mit der Fallbeschleunigung $g = 9 \cdot 808^m$.

Wir werden noch weiter unten erkennen, dass sich die Fallbeschleunigung g in den verschiedenen Breitegraden ändert, im Norden ist sie grösser, nach dem Äquator zu kleiner, weil ein Teil durch die Schwungkraft der Erde zurückgehalten wird. Für Europa behalten wir die obige Zahl bei.

Aus der Beziehung (13) haben wir gefolgert, dass das Gewicht eines Körpers dem Produkt aus der Masse mit der Fallbeschleunigung gleich ist. Für einen andern Weltkörper, beispielsweise dem Mond, ist die Beschleunigung nur $1{,}9^m$. Dort wiegen die Körper ungefähr nur den fünften Teil, wie auf der Erde; denn auch dort muss das obige Naturgesetz gelten. — Vergleichen wir zwei Gewichte $G_1\ G_2$ miteinander, deren zugehörige Massen $m_1\ m_2$, dann folgt aus den Beziehungen, $m_1 = \frac{G_1}{g}$, $m_2 = \frac{G_2}{g}$, beide Gleichungen dividiert, da g in Wegfall kommt, für den gleichen Weltkörper,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{G_1}{G_2} \text{ oder } m_1 : m_2 = G_1 : G_2. \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die Massen verhalten sich also wie die Gewichte derselben Körper. Für $g = 1$ würde $m = G$ und lässt sich die Masse durch das Gewicht ersetzen.

Zwei verschiedene gleich grosse Körper wiegen aber nicht darum mehr oder weniger, weil sie in sich mehr oder weniger Stoff, Materie bergen, sondern weil der Stoff zusammengedrängter, in seinen einzelnen Elementen dichter gelagert ist. Je grösser diese Dichtigkeit, um so grösser das Gewicht. Wir können es wohl dahin bringen, 1 Kubikdec. Heu auf ein Minimum zusammen zu pressen, es wiegt aber darum doch nicht mehr als $^1/_{10}$ Klg., die einzelnen Stoffelemente, besser Stoffatome, bleiben in derselben Dichtigkeit. Zwischen Stoff (Material) und Masse besteht der Unterschied, dass die ersteren Ausdrücke für uns ein äusseres greifbares Erkennungszeichen abgeben, während die Masse für uns der allgemeine wissenschaftliche Ausdruck, eine allgemeine Bezeichnung für alle Stoffe, alle Materien ist.

Setzen wir für eine einheitliche Masse $m = 1$, dann wird diese mit $9{,}81^m$ Beschleunigung von der Erde angezogen. Eine bestimmte Masse m, Eisen, Holz, Stein etc. wird aber mit der Beschleunigung $m g$ angezogen und stellt uns diese Anziehungskraft das Gewicht der verschiedenen Körper dar.

Dichtigkeit ist eine messbare verhältnismässige Lagerung der einzelnen Atome, ein relativer Begriff, den wir nur durch Vergleichung feststellen können. Man nennt die Dichtigkeit das spezifische Gewicht des Körpers, das ist dasjenige Gewicht, welches zu einer gleich grossen Wassermasse in einem gewissen Verhältnis steht. Man legt also die Dichtigkeit des Wassers als Vergleichseinheit zu Grunde und zwar für feste und flüssige Körper und bei 4° Wassertemperatur*). Die Vergleichseinheit für gasförmige Körper ist die Luft (bei 0° Temperatur und $760^{mm}$ Barometerstand. Die Luft ist ungefähr 800 mal so leicht wie Wasser).

In den im Anhang angeschlossenen Tabellen sind die wichtigsten spezifischen Gewichte zusammengestellt.

Die (absoluten) Gewichte eines Körpers sind für uns greifbar, wir können sie unmittelbar durch Abwiegen bestimmen; allerdings benötigen wir auch hier eine Einheit. Bekanntlich liefert uns diese auch wieder das Wasser, indem wir das Gewicht von einem Kubikdec. Wasser ein Klg. nennen, und mit diesem alle anderen Körpergewichte vergleichen;

*) Das Wasser ist bei 4° Wärme am schwersten, dichtesten, daher schwimmt Wasser von 0° und weniger, also Eis, oben und können organische Wesen im Wasser leben und sich bewegen.

d. h. abwiegen. Da nun das sp. Gew. eines Körpers mit einem gleich grossen Rauminhalt (Volumen) Wasser im Zusammenhang steht, so muss sich jedes absolute Gewicht aus dem sp. Gew. und dem Körpervolumen berechnen lassen. Ein Kubikm. Wasser wiegt $\gamma = 1000$ Klg.*), ist $\sigma$ das sp. Gew., dann wiegt 1 Kubikm. des Körpers $\gamma\sigma = 1000\,\sigma$ Klg. und V Kubikm.

$$\mathbf{G} = \gamma\sigma\mathbf{V} = 1000\,\sigma\mathbf{V}\ \mathbf{Klg.} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Ein Kubikdec. wiegt, weil das Gewicht eines Kubikdec. (1 Liter) Wasser 1 Klg.

$$G_1 = \sigma V \text{ Klg.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17\text{a})$$

Setzen wir in Gl. 13 $G = \gamma\sigma V$ ein, dann lässt sich die Masse eines Körpers auch ausdrücken:

$$m = \gamma \frac{\sigma V}{g}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Für $V = 1$ Kubikm. eines Körpers, $\gamma = 1000$ und $g = 10$ abg. ist

$$m = \frac{1000\,\sigma}{10} = 100\,\sigma \text{ abg.} \quad \ldots\ldots \quad (18\text{a})$$

Die Masse von $V = 10$ Kubikdec. ist, weil $\gamma = 1$ Klg. in diesem Falle

$$m = \frac{1 \cdot \sigma \cdot 10}{10} = \sigma \text{ Klg. abg.} \quad \ldots\ldots \quad (18\text{b})$$

Diese letzten Formeln bestätigen uns wieder den unmittelbaren Zusammenhang der Masse mit der Dichtigkeit.

**Beispiele: I.** Ein Balken von $6^m$ Länge, $0{,}3^m$ Höhe, $0{,}25^m$ Stärke aus Kiefernholz wiegt, weil $\sigma = 0{,}65$,

$$G = 1000\,\sigma V = 1000 \cdot 0{,}65 \cdot 6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 292{,}5 \text{ Klg.}$$

Da 50 Klg. = 1 Ctr., so ist das Gewicht

$$\frac{292{,}5}{50} = 5{,}85 \text{ Ctr.} = 5 \text{ Ctr. } 85 \text{ Pfd.}$$

**II.** Wieviel wiegt eine gusseiserne Röhre von $D = 0{,}22^m$ äusseren Durchmesser, $\delta = 20^{mm}$ Wandstärke und $3^m$ Länge?

Der Querschnitt der Röhre ist

$$\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi}{4}(D - 2\delta)^2 = \frac{\pi}{4}[0{,}22^2 - (0{,}22 - 2 \cdot 0{,}02)^2] = 0{,}0126\,\square^m.$$

Das Volumen $V = 3 \cdot 0{,}0126 = 0{,}0378$ Kubikm.

Das Gewicht, wenn $\sigma = 7{,}5$,

$$G = 1000 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}0378 = 283{,}5 \text{ Klg.} = 5{,}67 \text{ Ctr.}$$

---

*) Ein Kubikm. Luft wiegt 1,29 Klg.

**III.** Wieviel Broncekugeln von $d = 0{,}12^m$ Durchmesser können in einen Eisenbahnwagen von 200 Ctr. Tragfähigkeit geladen werden? Das Gewicht einer Kugel ist $G = \gamma \sigma \frac{\pi}{6} d^3$ Klg., ist die Anzahl der fraglichen Kugeln n dann folgt aus der Gleichung

$$n \gamma \cdot \sigma \cdot \frac{\pi}{\sigma} d^3 = 50 \cdot 200 = 10\,000,\ \gamma = 1000,$$

$$\sigma = 8{,}5,\ d = 0{,}12 \text{ eingesetzt,}$$

$$n = \frac{6 \cdot 10\,000}{1000 \cdot 8{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot \overline{0{,}12}^3} = 1300 \text{ abg.}$$

**IV.** Eine Sandsteinplatte von $15^{ctm}$ Stärke, $80^{ctm}$ Breite und $1{,}2^m$ Länge wiegt bei $\sigma = 2{,}35$ sp. Gew.

$$G = 1000\, \sigma V = 1000 \cdot 2{,}35 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}2 = 338 \text{ Klg. oder}$$

$$\frac{338}{50} = 6{,}76 \text{ Ctr.}$$

**V.** Eine schmiedeeiserne Stange von $90^{mm}$ Durchmesser soll nicht mehr als 300 Klg. = 6 Ctr. wiegen, wie lang darf sie sein?

Ist $d = 0{,}09^m$ der Durchmesser, l die Länge, $\sigma = 7{,}6$ das sp. Gew., dann folgt aus $300 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l \cdot 1000 \cdot 7{,}6$,

$$l = \frac{300 \cdot 4}{1200 \cdot \pi \cdot \overline{0{,}09}^2 \cdot 7{,}6} = 6{,}2^m.$$

**VI.** Ein Mühlstein von $0{,}25^m$ Höhe, $12^m$ Durchmesser, $0{,}25^m$ Augenöffnung wiegt wieviel? Die beiden Durchmesser mit D, d; die Höhe mit h bezeichnet, ist das Steinvolumen

$$V = \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right) h = \frac{\pi}{4} h\, (D^2 - d^2), \text{ somit das Gewicht}$$

$$G = \gamma \sigma V = 1000 \cdot \sigma \frac{\pi}{4} h\, (D^2 - d^2).$$

Setzen wir für gute Steine $\sigma = 2{,}5$, dann ist für meter allgemein

$$G = 1960\, h\, (D^2 - d^2);$$

obige Maasse eingeführt, folgt $G = 675$ Klg.

---

Eliminiert man aus den beiden Formeln $m = \frac{K}{p}$, $m = \frac{G}{g}$ die Masse m, dann folgt $\frac{K}{p} = \frac{G}{g}$ oder

(19) . . . . . . . . . . $\mathbf{p = \frac{K}{G} g.}$

Wollen wir die Beschleunigung, in die ein beliebig schwerer Körper durch eine Kraft K versetzt wird, unabhängig von seiner Masse ausdrücken, so lehrt uns die vorstehende Gleichung, dass wir stets von der Erdbeschleunigung abhängen. Wenn wir von einer allgemeinen Beschleunigung reden wollen, so müssen wir sie uns erst künstlich hergestellt denken.

Lassen wir einen Körper von einem gewissen Gewicht von einer schiefen Ebene herunter laufen, so ist die Beschleunigung, welche er beim Herabrollen erfährt, von der Neigung der Ebene abhängig, d. h. von der Widerstandskraft, die ihn am freien Fall zurückhält, es muss hier $p < g$ werden. Ist sich der Körper selbst überlassen, dann ist die treibende Kraft K seinem Gewicht gleich; wenn keine Hindernisse vorhanden sind, dann ist $p = g$; wirkt aber der treibenden Kraft K ein Widerstand entgegen, dann wird $K < G$. Ist die Beschleunigung $p = 6{,}3^m$, wiegt der Körper $G = 800$ Klg., dann ist die treibende Kraft

$$K = \frac{pG}{g} = \frac{6{,}3 \cdot 800}{9{,}81} = 551 \text{ Klg.},$$

und es wird also mit $800 - 551 = 249$ Klg. Widerstandskraft entgegengearbeitet.

Wir fanden oben Gl. 6 $s = ct + \frac{1}{2} pt^2$; setzen wir Gl. 19 ein, dann findet sich der Weg eines Körpers mit G Klg. Gewicht, $c^m$ Anfangsgeschwindigkeit, K Betriebskraft, abhängig von der Zeit t,

$$\mathbf{s = ct + \frac{1}{2} \frac{K}{G} gt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Setzt man Gl. 19 in (9) ein, dann folgt

$$s = \frac{G}{2g} \frac{v^2 - c^2}{K} = \frac{m}{2} \frac{v^2 - c^2}{K}. \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

Aus der vorletzten Gleichung ersieht man, dass, wenn ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit c ankommt und keine weitere Kraftwirkung vorliegt (also $K = 0$), ausser natürlich derjenigen Kraft, die den Körper überhaupt zu seiner Anfangsgeschwindigkeit verhalf, er mit gleichförmiger Bewegung den Weg $s = ct$ in der Zeit t fortsetzt, weil dann $\frac{1}{2} \frac{K}{G} gt^2 = 0$ ist.

Der scheinbare Widerspruch in der Formel $s = ct$, in welcher wir eine Kraft voraussetzen müssen, weil sonst keine Bewegung möglich, aber doch dabei keine beschleunigte Bewegung folgern dürfen, liegt in der ursprünglichen Annahme, dass die Kraft überhaupt nur eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c erzeugen soll; nachdem sie

diese erzeugt, hört ihre Weiterwirkung auf. Die Kraftwirkung K und das Gewicht G (oder die Masse m) haben nur Einfluss auf eine veränderliche Bewegung, ohne die ursprüngliche Kraft der Anfangsgeschwindigkeit vernichten zu können.

Auf die Beziehungen 20a werden wir noch weiter unten zurückkommen.

Die Kenntnis der Erdbeschleunigung giebt uns ein Mittel an die Hand, die Gesetze des freien Falles der Körper feststellen zu können; wir haben nur nötig in obige Formeln für p den Wert $g = 9{,}808$ einzuführen und den Körper frei fallen $(+ g)$ oder steigen $(- g)$ zu lassen; wie schon Seite 00 bemerkt, bleibt hierbei jede andere Kraftwirkung als das Gewicht ausgeschlossen; es wird $K = G$ Gl. 19. Die Fallgesetze sind dann offenbar den Gl. (2) und (3) entsprechend,

$$(21) \quad \ldots \quad s = \frac{v + c}{2} t \text{ und } \pm g = \frac{v - c}{t}.$$

---

**Beispiele: I.** Ein Körper fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit frei aus einer Höhe $h = 50^m$ herab, mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

Setzen wir in Gl. 9 $c = 0$ und $p = g$, dann folgt $s = h = \frac{v^2}{2g}$, hieraus (S. Anhang Tab. 3).

$$(22) \quad v^2 = 2gh \text{ und } v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}84 \cdot 50} = 31{,}3^m.$$

**II.** Ein Stein fällt in einen Brunnenschacht, dessen Wasseroberfläche $h^m$ tiefer als der Schachtrand liegt, er gebraucht die Zeit $t = 6''$, bis er an die Wasseroberfläche aufschlägt; wie gross ist h? Aus Gl. 2 findet man für $c = 0$, $s = \frac{vt}{2}$ und $g = \frac{v}{t}$, v eliminiert (oder in (6), $c = 0$ gesetzt), $s = h = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2}\, 9{,}808 \cdot 6^2 = 176^m$.

Hierbei haben wir die Zeit, welche der Schall gebraucht, um aus der Brunnentiefe zu uns zu gelangen, nicht in Rücksicht gezogen, diese beträgt hier ungefähr $\frac{1}{2}$ Sekunde.

**III.** Wird eine Kugel aus einer Kanone senkrecht auf die Höhe $h = 200^m$ geschossen und hat die Kugel eine Anfangsgeschwindigkeit $u^m$ (beim Verlassen der Kanone), dann können wir die letztere aus Gl. 22 bestimmen, nämlich

$$u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 200} = 62{,}6^m.$$

Denn ist die Kugel auf der Höhe angelangt (ihre Geschwindigkeit

ist Null), dann fällt sie mit der Erdbeschleunigung g wieder herab und muss mit einer Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit u unten anlangen. (S. auch Beispiel XII, S. 14).

**IV.** Schiesst ein Knabe mit einem Bogen einen Pfeil senkrecht in die Höhe h, und zählt, ehe er herabfällt $t = 4''$, wie hoch ist der Pfeil gestiegen?

Aus der im Beispiel (2) entwickelten Formel $h = \frac{1}{2} g t^2$, folgt (23) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ die Zeit des Herabfallens des Pfeiles; somit weil diese der Zeit des Aufstieges gleich sein muss, ist die ganze Zeit $t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ oder hieraus h entwickelt,

$$h = \frac{g}{8} t^2 = 1{,}22\, t^2,\ t \text{ eingesetzt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\text{a})$$

$$h = 1{,}22 \cdot 4^2 = 20^m.$$

**V.** Damit eine Flintenkugel, senkrecht in die Höhe geschossen, die Höhe eines der höchsten Berge $h = 9000^m$ erreiche, müsste sie, aus der Formel des vorigen Beispieles $h = \frac{g}{8} t^2$ entwickelt, eine Zeit von

$$t = \sqrt{\frac{8h}{g}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9000}{9{,}81}} = 86'',$$

also fast $1\frac{1}{2}$ Minute unterwegs sein.

(Hier wie in den vorigen Beispielen ist der Luftwiderstand ausgeschlossen).

**VI.** Schiesst man senkrecht nach unten und verlässt die Kugel den Lauf mit $c = 100^m$ Anfangsgeschwindigkeit, welchen Weg wird sie in $t = 5''$ zurückgelegt haben?

Aus Gl. 21, v eliminiert, oder aus Gl. 6 für $p = g$ folgt,

$$s = ct + \frac{1}{2} g t^2 = 100 \cdot 5 + \frac{1}{2}\, 9{,}81 \cdot 5^2 = 623^m.$$

**VII.** Die Zeit, welche die Kugel in Beispiel 3 gebraucht, um auf die Höhe $h = 200^m$ zu gelangen, folgt nach Gl. 23,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{9{,}81}} = 6{,}4''.$$

Der Körper bewegt sich in diesem Falle verzögernd; die Anfangsgeschwindigkeit ist $u = 62{,}6^m$.

Zur Berechnung der Höhe h, wenn $u = 62{,}6$ als Anfangsgeschwindigkeit und $t = 6{,}4''$ gegeben sind, können wir auch die Formel 6a für

$p = g$, oder (21) verwenden, es wird natürlich auch

$$s = h = ut - \frac{1}{2} gt^2 = 62{,}6 \cdot 6{,}4 - \frac{1}{2}\, 9{,}81 \cdot 6{,}4^2 = 200^m.$$

Bemerkung. Über eine Rolle oder Scheibe hängt an einer Schnur auf jeder Seite ein Gewicht $Q_1$ $Q$; mit welcher Beschleunigung wird ohne Anfangsgeschwindigkeit das grössere Gewicht $Q$ das kleinere $Q_1$ in die Höhe ziehen, während die Rolle sich um ihre Achse dreht und dadurch $Q$ sinkt, wenn von allen Hindernissen abgesehen wird. (S. Fig. 313).

Die bewegende Kraft ist $K = Q - Q_1$ (Gl. 19), diese setzt die Gewichte $Q + Q_1$ in Bewegung, somit ist

$$p = \frac{Q - Q_1}{Q + Q_1}\, g.$$

Wenn $Q = 60$, $Q_1 = 40$ Klg., dann folgt die Beschleunigung, mit der $Q$ sinkt

$$p = \frac{60 - 40}{60 + 40}\, 9{,}81 = 0{,}2 \cdot 9{,}81 = 1{,}96^m.$$

Ist $Q_1 = 0$, dann wird $p = g$ und $Q$ sinkt, fällt mit der Beschleunigung der Schwere.

Die Zeit des Sinkens z. B. von $h = 15^m$ Höhe lässt sich aus $h = \frac{1}{2} pt^2$ berechnen. Es folgt

$$t = \sqrt{\frac{2h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{1{,}96}} = 3{,}9''.$$

Die Endgeschwindigkeit, mit der $Q$ am Ende des Weges $h$ oder der Zeit $t$ anlangt, ist

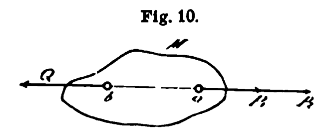
$$v = \sqrt{2ph} = pt = \sqrt{2 \cdot 1{,}96 \cdot 15} = 1{,}96 \cdot 3{,}9 = 7{,}64^m.$$

---

## Das Hebelgesetz.

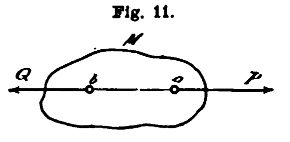
Denken wir uns auf einen beliebigen Körper M, Fig. 10, nach rechts zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ in derselben Richtung wirken, so wird der Körper mit einer der Summe der Kräfte $P_1 + P_2$ entsprechenden Beschleunigung sich nach rechts bewegen. Damit er überhaupt nicht in Bewegung kommen kann, müssen wir in der Richtung der Kräfte nach links die Kraft $Q = P_1 + P_2$ angreifen lassen; da wir nur starre Körper voraussetzen, so ist es gleich, ob sämtliche Kräfte in a, oder ob sie geteilt in a und b angreifen. Ist P, Fig. 11, das Resultat (die Resultante) mehrerer in gleicher Richtung wirkenden Kräfte (die Komponenten, Teilkräfte), von

Fig. 10.



denen verschiedene nach rechts, verschiedene nach links wirken können, so entsteht wieder Gleichgewicht, d. h. bleibt der Körper in Ruhe durch eine einzige Kraft Q, oder auch durch mehrere, deren Resultante Q sein kann, wenn nur schliesslich $P = Q$ ist. Mathematisch ausgedrückt,

Fig. 11.



$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots\cdots = \Sigma p = Q.$$

Hierin sind $p_1$, $p_2$, $p_3 \cdots\cdots$ diejenigen Kräfte, welche positiv oder negativ, rechts oder links in einer Linie wirkend, in ihrer sogenannten algebraischen Summe*) das Resultat P liefern, während Q auch wieder aus Teilkräften (Komponenten) bestehen kann,

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots\cdots = \Sigma q = P,$$

aber umgekehrt wieder gleich P sein muss.

Z. B.: $P = 60 + 80 - 10 + 20 - 40 = 110$ Klg.; $Q = 50 - 40 + 80 + 10 - 20 + 30 = 110$ Klg.

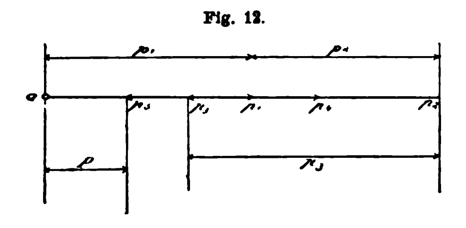
Findet aber zwischen P und Q kein Gleichgewicht statt, ist z. B. $P = 110$, $Q = 30$, dann ist P überwiegend und zieht den Körper mit einer Kraft $P - Q = 80$ Klg. nach rechts. Allgemein bezeichnet ist die endgültige Resultante

$$R = P - Q. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Wäre $Q = p$, $P = 30$, dann wurde $R = 30 - p = -40$; der Körper würde sich nach links bewegen.

Wählt man sich irgend eine Längeneinheit, z. B. für 100 Klg. = $1^{ctm}$, so lässt sich, wie beistehende Figur zeigt, das Resultat auch graphisch finden.

Fig. 12.



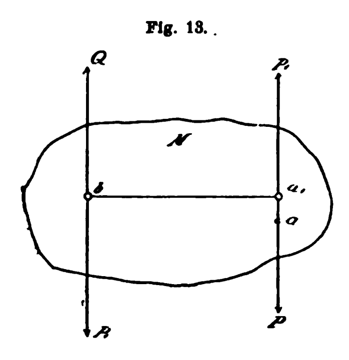
Ist nun in (24) Gleichgewicht vorhanden, der Körper in Ruhe, dann ist **R** = 0 oder, wie oben angenommen,

$$P - Q = 0, \; P = Q. \quad \ldots\ldots \quad (24a)$$

*) Das Zeichen Σ (sprich Summe) bedeutet (als griechisches S) die algebraische Summe, positive und negative Summanten, die jedoch in der Gliederung ausgeschrieben nur mit + Zeichen versehen werden.

Lassen wir zwei Kräfte oder das Resultat mehrerer Kräfte P und Q parallel unter sich auf zwei Punkte eines Körpers a und b, Fig. 13, einwirken, so wird der Körper offenbar in eine drehende Bewegung versetzt werden. Die beiden (gleich) gedachten Kräfte nennt man in der dargestellten Weise wirkend, ein **Kräftepaar.** Verlängert man die Kraftrichtung von P bis P in $a_1$ angreifend, so dass $a_1$ b senkrecht auf die Richtung der Kraft Q, dann ist im allgemeinen nichts geändert.

Fig. 13.

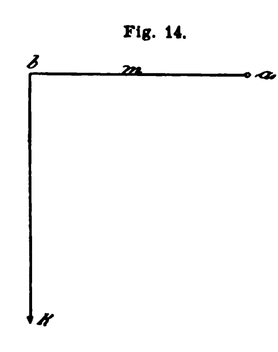


Um den Körper in Ruhe zu bringen, haben wir nur nötig, in $a_1$ und b die gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräfte anzubringen; das Kräftepaar umgekehrt wirken zu lassen, d. h. in anderer Drehrichtung.

Nehmen wir nun an, es sei $Q > P$ und wir bringen entgegengesetzt P und Q das Kräftepaar $P_1$ an, indem wir in $a_1$ und b je eine Kraft $P_1$, wie in Fig. 13 angedeutet, wirken lassen; dann ist $a_1$ in Ruhe, wenn $P_1 = P$, weil auf diesem Punkt zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte einwirken, b wird aber mit der Resultierenden $Q - P_1 = R$ im Richtung von Q bewegt.

Denken wir uns $a_1$ als festen Drehpunkt, dann sucht die Kraft $R = Q - P_1$ den Körper M um $a_1$ aus seiner Lage zu drehen, und es liegt der Angriffspunkt b der Kraft R in der Entfernung $m = a_1$ b vom Drehpunkt.

Fig. 14.

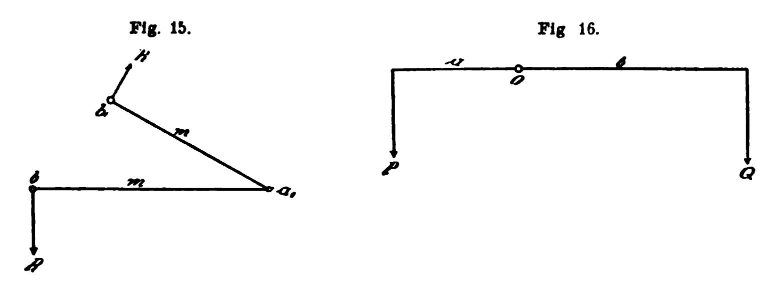


Sehen wir von der Masse des Körpers M ab und betrachten ihn als eine gewichtslose Stange, dann ist an der Sachlage im allgemeinen nicht geändert; selbstredend soll auch die Zapfendrehung in $a_1$ keinen Einfluss ausüben.

Die Wirkung der Drehung der Kraft R am sogenannten **Hebelarm** m wird um so grösser, je grösser R bezw. m, also je grösser das Produkt Rm. Man nennt das **Produkt von Kraft mal Hebelarm Moment,** und bezeichnet ein solches mit einem Buchstaben $M = Rm$.

Veranlasst man den Hebel m sich um $a_1$ rechts herum zu drehen, indem man in b die Kraft R nach oben wirken lässt, dann tritt Stillstand, d. h. Gleichgewicht ein.

Es bleibt sich hierbei gleich, wie in Fig. 15 angedeutet, ob die letztere Kraft R, welche die Rechtsdrehung einleitet, in b oder in einem




um einen Winkel verstellten Hebel in $b_1$ angreift, wenn die Angriffsrichtung nur senkrecht auf $b_1$ $a_1$ steht; da beide Hebel m ursprünglich von einem Körper herrühren.

Gleichgewicht lässt sich auch dadurch herstellen, dass man einen andern Hebelarm, Entfernung vom Drehpunkt, wählt und an diesen eine andere Kraft rechtwinkelig und nach rechts wirkend angreifen lässt; nennt man das hierdurch entstehende Moment N, und setzt es dem obigen gleich, dann bleibt der Körper in Ruhe; es muss dann sein

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \text{ oder } \mathbf{N} - \mathbf{M} = \mathbf{0}, \text{ d. h.} \quad \ldots \quad (25)$$

**die rechtsdrehenden Momente müssen den linksdrehenden gleich sein, die ersteren nimmt man positiv, die letzteren negativ an.**

In Fig. 16 ist 0 der Drehpunkt; a, b sind die Hebelarme, P und Q die Kräfte. Die Momente sind somit $M = -Pa$ und $N = +Qb$, folglich ist $Qb - Pa = 0$, oder

$$\mathbf{Qb = Pa.} \quad \ldots \quad (26)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass sich die Hebelarme umgekehrt wie die Kräfte verhalten müssen,

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b} \text{ oder } Q : P = a : b. \quad \ldots \quad (26a)$$

Die Bezeichnung der Momente richtet sich nach den zu Grunde liegenden Längenmaassen der Hebelarme (z. B. meter) und nach den Kräften oder Gewichten (z. B. Klg.), Kilogrammmeter, Fusspfund, Kilogrammcentimeter etc.

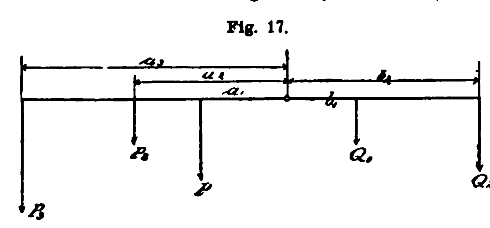
Ist z. B. $a = 3^m$, $P = 6$ Klg., dann ist das Moment $M = Pa = 18$ Klgm. Damit Gleichgewicht entsteht, müsste dann beispielsweise $Q = 2$ Klg., $b = 9^m$ sein.

Im Augenblick der Bildung des Momentes vereinigen sich Kraft und Hebelarm zu einer einzigen Zahl, die sich beliebig wieder in zwei

Produkte teilen lässt; dieser Augenblick (Moment) dürfte den **Ausdruck Moment** hervorgerufen haben, die Bezeichnung selbst ist nicht sachlich*).

Zerlegen wir obige 18 Klg. in $Q = \frac{1}{2}$ Klg. und $b = 36^m$, dann können wir mit $\frac{1}{2}$ Klg. am Hebel $b = 36^m$ das Gewicht $P = 6$ Klg. an $a = 3^m$, oder auch am Hebel $a = \frac{1}{4}{}^m$, $P = 72$ Klg. in Bewegung setzen, weil $a = 0{,}25$, $b = 36$, $P = 72$, $Q = 0{,}5$, $72 \cdot 0{,}25 = 36 \cdot 0{,}5$, also mit einer kleinen Kraft eine grosse Last heben, — freilich auf Kosten der Geschwindigkeiten oder zurückgelegten Wegstrecken der Endpunkte der Hebel. Diese ersteren stehen offenbar im Verhältnis zu den Hebelarmen. Wenn sich $P = 72$ Klg. $2^{mm}$ hoch bewegt, so muss sich das andere Hebelende $2\frac{b}{a} = 2\frac{36}{0{,}25} = 288^{mm}$ hoch bewegen. Sobald also äussere Bewegung eintritt (Virtualität, Thätigkeit), dann kommt der Verlust an Weg oder Geschwindigkeit zur Geltung; man nennt dies das Prinzip der **virtuellen** Geschwindigkeit (virtualiter, kräftig, vermöglich).

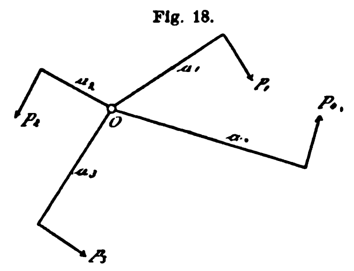
Fig. 17.



Lassen wir um den Drehpunkt 0 mehrere Kräfte senkrecht an einer Stange wirken, so kommt dasselbe Gesetz Gl. 26 für jedes einzelne Moment, also für die Summe der sämtlichen in Betracht, die rechts drehenden sind den links drehenden Momenten gleich.

$$(27)\begin{cases} P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + Q_3 b_3 + \cdots, \text{ oder} \\ \Sigma P a = \Sigma Q b \text{ oder} \\ \Sigma P a - \Sigma Q b = 0. \end{cases}$$

Fig. 18.



Es ist offenbar gleich, ob die Momente an einem gestreckten Balkenhebel, oder ob sie winkelig zu einander um den Drehpunkt gruppiert sind, wenn die Kräfte nur senkrecht zu den Hebeln wirken, Fig. 18; hier sind, die sämtlichen Kräfte mit P und die Hebelarme mit a bezeichnet,

$$(28) \quad . \quad . \quad . \quad \Sigma P a = 0.$$

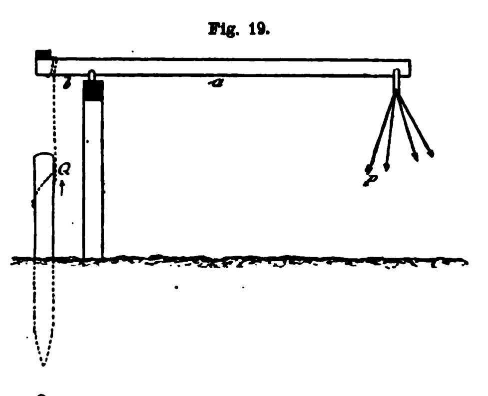
Das heisst die **algebraische Summe**, in welcher die links wirkenden negativ gedacht werden müssen, ist Null, oder

$$(28a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P_1 a_1 \pm P_2 a_2 \pm P_3 a_3 + \cdots = 0.$$

*) Verfasser würde den Ausdruck **Hebelkraft** vorschlagen.

**Beispiele: I.** Ein eingerammter Pfahl soll wieder verwendet und herausgezogen werden. Man wendet hierzu einen $5^m$ langen Balken, der in einer Entfernung $b = 0{,}5^m$ vom Drehpunkt durch eine Kette mit dem Pfahl in Verbindung ist. In $4{,}5^m$ Entfernung greifen an sechs Seilen sechs Arbeiter mit einer Kraft von je $P = 30$ Klg. an, mit welcher Kraft wird der Pfahl gehoben?

Fig. 19.

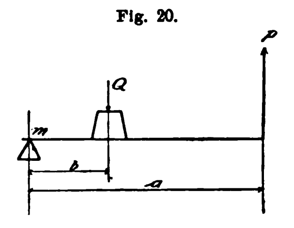


Hier ist $Qb = 6P \cdot a$ oder

$$Q = \frac{6Pa}{b} = \frac{6 \cdot 30 \cdot 4{,}5}{0{,}5} = 1620 \text{ Klg.}$$

**II.** Es soll ein Gewicht $Q = 600$ Klg. mit einem einarmigen Hebel, der bei m eine Stütze hat, gehoben werden. Die Last Q liegt in der Entfernung $b = 0{,}3^m$ vom Stützpunkt. Soll ein Mann mit $P = 50$ Klg. das Heben bewerkstelligen, dann findet man die Länge des anderen Hebelarmes aus der Gleichung

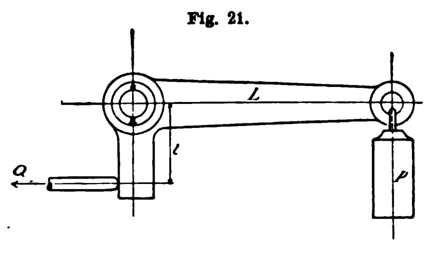
Fig. 20.



$$Qb = Pa, \text{ nämlich } a = \frac{Qb}{P} = \frac{600 \cdot 0{,}3}{50} = 3{,}6^m.$$

**III.** Zwei Quetschwalzen sollen zusammengedrückt werden (Quetschen für Ölfrüchte, Walzenstühle für Getreide etc.), die eine Walze ist fest gelagert, die andere verstellbar, der Pressdruck sei $Q = 600$ Klg.; das Pressgewicht am längeren Winkelhebelarm, Fig. 21, $P = 60$ Klg.

Fig. 21.



Aus der Momentengleichung $Ql = PL$ findet sich das Hebelverhältnis

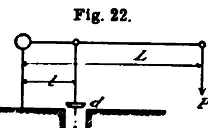
$$\frac{L}{l} = \frac{Q}{P} = \frac{600}{60} = 10.$$

Nimmt man $l = 8^{ctm}$, dann muss $L = 80^{ctm}$ lang werden.

**IV.** Das Sicherheitsventil einer Dampfmaschine, Fig. 22, besteht aus dem Ventil und dem Belastungsgewicht P, welches an einem einseitigen

Hebel hängend, durch Vermittelung des letzteren auf das Ventil drückt.

Fig. 22.



Das Belastungsgewicht P muss so gross sein, dass, sobald der Dampfdruck im Innern des Kessels ein gewisses Mass überschreitet, das Ventil gehoben wird und der Dampf entweichen kann.

Das einheitliche Druckmass für Flüssigkeiten und Gas (Luft) ist der Atmosphärendruck, 1 Klg. pro $\square^{ctm}$ (genauer 1,0344 Klg.). Bezeichnet man mit $d^{ctm}$ den Durchmesser des Ventiles, und sind p die Anzahl der Atmosphären im Kessel, denen der Ventildruck Q das Gleichgewicht halten soll, dann drücken p Atmosphären auf $\frac{\pi d^2}{4}$ $\square^{ctm}$ mit $Q = p\,\frac{\pi d^2}{4}$ Klg. Nach dem Hebelgesetz ist $Ql = PL$, folglich $p\,\frac{\pi d^2}{4}\,l = PL$, hieraus findet sich

$$P = p\,\frac{l}{L}\,\frac{\pi d^2}{4}.$$

Es sei $p = 5$, $\frac{l}{L} = \frac{1}{6}$, $d = 7^{ctm}$, dann folgt $P = 32$ Klg. Belastungsgewicht.

Wählt man als solches eine gusseiserne Kugel, so erhält diese einen Durchmesser D, den wir nach Gl. 17 finden können. Setzen wir

$$G = P = 32,\quad V = \frac{\pi}{6}\,D^3,\quad \sigma = 7{,}5 \text{ spez. Gewicht,}$$

dann folgt für meter

$$32 = 7500\,\frac{\pi}{6}\,D^3, \text{ hieraus } D = 0{,}2^m.$$

Fig. 23.

**V.** Ein Hebelarm dreht sich um die Achse A, Fig. 23, und soll die Last Q den Gewichten $P_1 = 8$, $P_2 = 35$, $P_3 = 20$ Klg. an den eingeschriebenen Hebellängen das Gleichgewicht halten, wie gross ist Q?

Nach Gl. 27 ist

$$P_1(a_1 + a_2 + a_3) + P_2(a_2 + a_3) + P_3 a_3 = Qb \text{ oder}$$

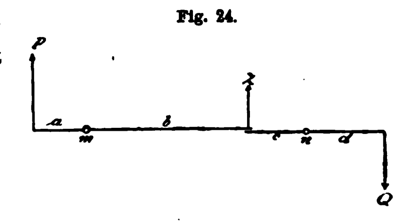
die Zahlen eingeführt

$$8\,(0{,}8 + 3{,}4 + 1{,}2) + 35\,(3{,}4 + 1{,}2) + 20 \cdot 1{,}2 = 2{,}8\,Q, \text{ hieraus ist}$$

$$Q = 81\,^1/_2 \text{ Klg.}$$

**VI.** In Fig. 24 drehen sich zwei Hebel um die Drehpunkte m, n. Bezeichnen wir den Druck am Ende der beiden Hebelarme b und c mit x,

so können wir zwei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen, wenn P die Kraft und Q die Last,


Fig. 24.

$$Pa = bx \text{ und } cx = dQ;$$

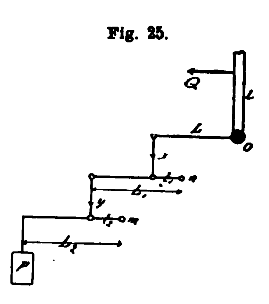
aus beiden folgt $x = \frac{Pa}{b} = \frac{Qd}{c}$,

und somit

$$P = \frac{b}{a}\frac{d}{c}Q.$$

Verhalten sich beide Hebelarme $b:a$ und $d:c$ wie $1:3$, dann ist $P = {}^1/_3\, {}^1/_3\, Q = {}^1/_9\, Q$, die Kraft P somit der neunte Teil der Last Q.

**VII.** Ein Winkelhebel um 0 drehbar soll mit dem kleinen Hebelarm l den Druck Q hervorbringen. Zur Verfügung stehen zwei weitere Hebel um m und n drehbar und das am letzten $L_2$ angehängte Gewicht P. Bezeichnen wir mit $l, l_1, l_2, L, L_1, L_2$ die Längen der Hebelarme von ihren Drehpunkten aus gerechnet, x, y die an den Enden der mittleren Hebel wirkenden Kräfte, so findet man leicht die Bedingungsgleichungen (Fig. 25),


Fig. 25.

$$PL_2 = l_2 y$$
$$yL_1 = l_1 x$$
$$xL = Ql.$$

Aus der letzten Gl. folgt $x = \frac{Ql}{L}$, in die mittlere eingesetzt, folgt $y = \frac{l_1}{L_1}\frac{l}{L}Q$, somit ergiebt sich, in die erste y eingeführt, die Gleichgewichtsbedingung

$$PL_2 = l_2 \frac{l_1}{L_1}\frac{l}{L}Q \text{ und hieraus}$$

$$P = \frac{l_2}{L_2}\frac{l_1}{L_1}\frac{l}{L}Q.$$

Soll $Q = 3750$ Klg. betragen und steht ein Gewicht $P = 30$ Klg. zur Verfügung, dann müssen die sämtlichen Hebel ein Verhältnis haben von

$$\frac{l}{L}\frac{l_1}{L_1}\frac{l_2}{L_2} = \frac{30}{3750} = \frac{1}{125};$$

sind alle drei gleich gross, dann wäre für

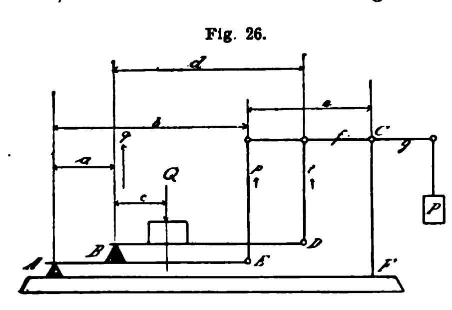
$$\frac{l}{L} = \frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2},\ \left(\frac{l}{L}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

und jedes Hebelverhältnis müsste sein

$$\frac{1}{L} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}.$$

**VIII.** Es stellt die beistehende Fig. 26 das Prinzip einer Brückenwage dar, deren Theorie wir in Folgendem aufstellen wollen.

Fig. 26.



A, B, C sind drei feste Stützpunkte, zugleich Drehpunkte, von denen aus die Hebellängen a, b bis g gerechnet sind. P das Gewicht, Q die Last, welche in der Entfernung c vom Drehpunkt auf BD aufliegt. D ist ein beweglicher Stützpunkt, ebenso E, beide sind durch Stangen mit dem Gewichtshebel in Verbindung. AFC ist das feste Brückengestell.

Bezeichnen wir mit q den Auflagerdruck in B, mit p und t den Stangenzug am Ende der Hebel e und f, dann ist um den Drehpunkt C Gleichgewicht, wenn

(a) . . . . . . . . . $Pg = tf + pe.$

Für die beiden Punkte B und A gelten die Momentengleichungen

(b) . . . . . . . . . $Qc = td$ und

(c) . . . . . . . . . $qa = pb.$

Betrachtet man für einen Augenblick den Punkt D als festen Drehpunkt und wird das Lastbrett (Brückenbrett) BD von der Kraft Q um D durch das darunter liegende Brett BE gehoben, dann findet man die vierte Bedingungsgleichung

(d) . . . . . . . . $qd = Q(d - c),$

nach dieser dreht q am Hebelarm d rechts, Q am Hebelarm d — c links herum.

Aus Gl. (b) und (d) folgt

$$t = Q\frac{c}{d} \text{ und } q = Q\frac{d - c}{d}.$$

Den letzteren Wert in (c) eingesetzt, ergiebt sich ein Ausdruck für p, nämlich

$$p = q\frac{a}{b} = Q\frac{a}{b}\frac{d - c}{d}.$$

Setzt man jetzt in (a) die Ausdrücke für t und p ein, dann erhält man

$$Pg = Q\frac{cf}{d} + Q\frac{a}{b}\frac{d-c}{d}e = \frac{Q}{d}\left[cf + \frac{a}{b}e(d-c)\right];$$

wählt man das Hebelverhältnis $\frac{a}{b}$ dem Verhältnis $\frac{f}{e}$ gleich, dann folgt

$$Pg = \frac{Q}{d}\left[cf + \frac{f}{e}e(d-c)\right] = Q\frac{f}{d}(c+d-c) = Qf,$$

somit ist, die angedeutete Konstruktion zu Grunde gelegt,

$$P = Q\frac{f}{g}.$$

Hierdurch wird man unabhängig von den andern Dimensionen der Wage und hat weiter nichts nötig als $\frac{f}{g}$ nach dem Dezimalsystem $\frac{f}{g} = \frac{1}{10}$ auszuführen (Dezimalwage), dann wird $P = {}^1/_{10}\,Q$.

### Anwendung des Hebelgesetzes auf einfache Flaschenzüge und Hebmaschinen.

Der einfachste Flaschenzug besteht aus einer festen Rolle, Fig. 27. Last Q und Kraft P sind im Gleichgewicht, im Ruhezustand, wenn



$$Pr = Qr \text{ oder } P = Q.$$

Fig. 27.

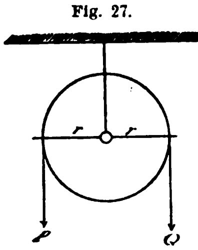
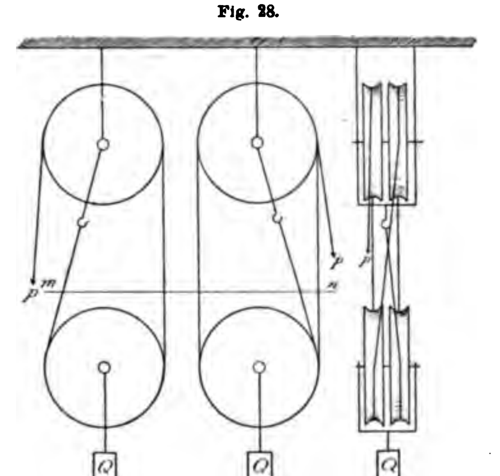


Fig. 28.



Selbstredend sehen wir vorläufig von etwaigen Widerständen und Reibungen ab.

1) Die Einrichtung der gewöhnlichen Flaschenzüge ist aus beistehenden Figuren ersichtlich, Fig. 28. In der ersten Figur ist eine Rolle pro Flasche, in den andern sind zwei gleich grosse nebeneinander liegende Rollen in der Flasche (Kloben) angewendet*).

*) Die Bezeichnung „Flaschenzug" kommt von der früheren Rollenzusammenstellung her, bei welcher die Rollen nicht nebeneinander, sondern übereinander mit abnehmenden Durchmessern gelagert waren und eine Form wie eine Flasche entstand.

Denkt man sich die Tragseite oder Ketten durchschnitten, mn, so zerlegt sich die Last Q in soviel Teile, als Lastkettenstränge vorhanden sind. Die Zugkräfte in den jedesmaligen Strängen sind

Bei 1 Rolle in der losen Flasche $\frac{Q}{2}$

„ 2 Rollen „ „ „ „ $\frac{Q}{2 \cdot 2} = \frac{Q}{4}$

„ 3 „ „ „ „ „ $\frac{Q}{3 \cdot 2} = \frac{Q}{6}$

„ 4 „ „ „ „ „ $\frac{Q}{4 \cdot 2} = \frac{Q}{8}$ u. s. w.

Die resultierenden Lastkräfte $\frac{Q}{2}, \frac{Q}{4}, \frac{Q}{6}, \frac{Q}{8} \cdots$ stellen die im letzten Seilende wirkende Zugkraft P dar. Die Fortsetzung der obigen Reihe liefert den allgemeinen Ausdruck bei n Rollen in der losen Flasche

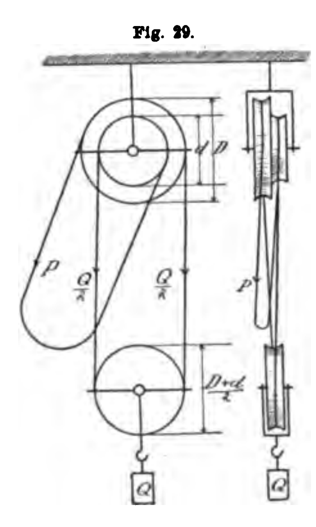
(29) . . . . . . . . . $P = \frac{Q}{2n}$.

Z. B. ein Flaschenzug (Kloben) von zwei Rollen in der Flasche, mit welchem eine Last Q = 600 Klg. gehoben werden soll, bedarf einer Kraft

$$P = \frac{Q}{2 \cdot 2} = \frac{600}{4} = 150 \text{ Klg.}$$

2) Die Differentialflaschenzüge. Wir beschränken uns vorläufig auf den einfachsten unter Weston's Patent bekannten Flaschenzug und behalten uns weiteres für später vor.

Fig. 29.



Auf einer Achse sind zwei ungleich grosse Rollen vom Durchmesser D und d festgekeilt und so verbunden, dass sich beide Rollen gleichzeitig drehen müssen, Fig. 29; eine über dieselben geschlungene Kette läuft unterhalb über eine lose Laufrolle, an welcher die Last durch einen geeigneten Bügel und Haken angehängt wird. Die Kette ist geschlossen; die Art und Weise der Umschlingung der drei Rollen ist aus der Figur hinreichend zu ersehen. Die Rollen sind am Umfang mit entsprechend verteilten Vorsprüngen, Ansätzen versehen, gegen welche sich die Kettenglieder anlegen und so die Drehung der Rollen veranlassen.

Wird mit der Kraft P am losen herabhängenden Kettenende in Richtung des Pfeiles gezogen, so dreht sich das Rollenpaar nach links, hierbei wickelt sich rechts infolge des grösseren Umfanges mehr auf, als links durch die kleinere Rolle Kettenlänge abgewickelt wird, infolgedessen muss die Last gehoben werden. Dreht man die Differentialrollen in umgekehrter Richtung, dann sinkt die Last.

Diese Einrichtung gewährt den grossen Vorteil im Gegensatz zu den einfachen Flaschenzügen, dass die Last in jeder Lage stehen bleibt, wenn die gewählte Differenz zwischen den Durchmessern der Rollen nicht zu gross wird.

Die Kraft P wirkt bei ihrer Linksdrehung am Hebelarm $\frac{D}{2}$, nach derselben Richtung dreht das Moment $\frac{Q}{2}\frac{d}{2}$, rechts herum hingegen dreht $\frac{Q}{2}$ auf der andern Seite am Hebelarm $\frac{D}{2}$, folglich liegt dem Gleichgewichtszustand folgende Momentengleichung zu Grunde

$$P\frac{D}{2}+\frac{Q}{2}\frac{d}{2}=\frac{Q}{2}\frac{D}{2}, \text{ hieraus folgt}$$

$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2D}}(\mathbf{D}-\mathbf{d})=\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{D}}\right)=\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}}\right). \quad . \quad (30)$$

Die Differenz D — d in dieser Formel hat diesem Flaschenzug zu seinen Namen verholfen.

Z. B. zur Hebung einer Last von 600 Klg. bei einer Differenz $D - d = 20^{mm}$ und einer Kettenrolle von $D = 150^{mm}$ Durchmesser ist eine Kraft erforderlich

$$P=\frac{60}{2\cdot 150}\,20=40 \text{ Klg.}$$

Die kleine Rolle würde hierbei den Durchmesser $d = 150 - 20 = 130^{mm}$ erhalten müssen.

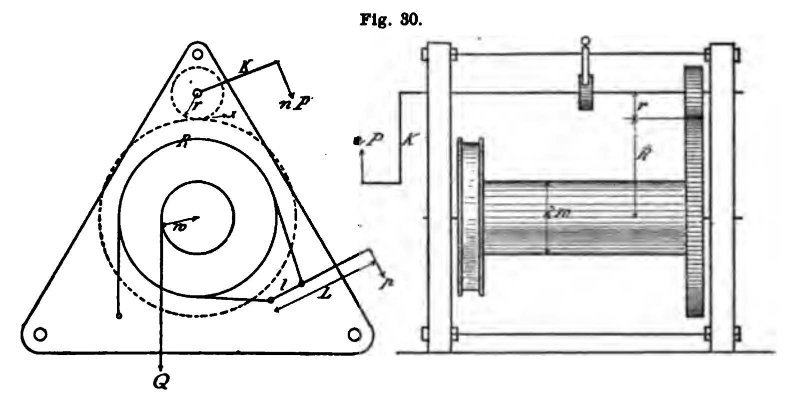
Je kleiner die Differenz, um so geringer wird die Zugkraft P, um so mehr nähert sich aber auch der Durchmesser bezw. Umfang der kleineren Rolle dem der grösseren, also um so mehr wickelt sich ab; hieraus folgt, dass die Last um so langsamer steigen und sinken wird. Eine grosse Differenz erfordert nicht allein ein grosses P, sondern bringt noch den Nachteil mit sich, dass das Moment $\frac{Q}{2}\frac{D}{2}$ auf der rechten Seite, wenn man die lose Kette frei hängen lässt, viel grösser wird als das

linke Moment $\frac{Q}{2}\frac{d}{2}$; dadurch werden die Widerstände, die sich dem Herabrollen entgegensetzen, leichter überwunden, die Last sinkt leichter von selbst. Den richtigen Mittelwert der zu wählenden Differenz werden wir in den Anwendungen aufstellen.

3) Die Winde.

Die Einrichtung einer Winde ist aus den Figuren 30 bis 33 zu ersehen. Fig. 30 ist eine einfache und Fig. 31 eine Winde mit doppeltem

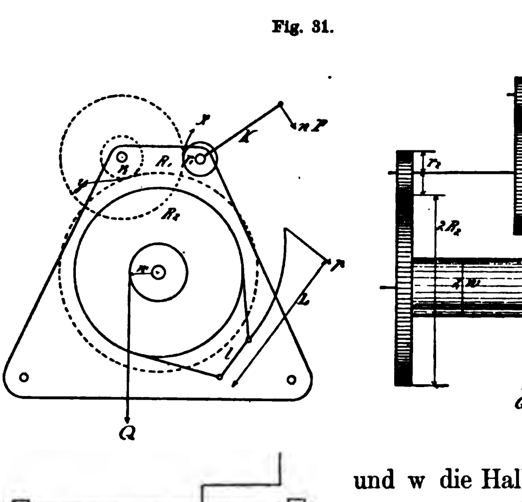
Fig. 30.

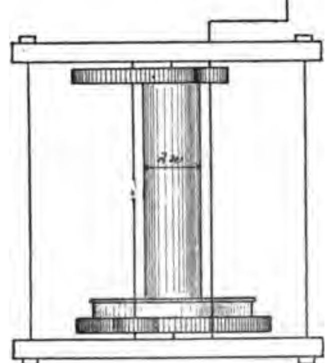



Vorgelege oder zwei Räderpaaren. Die Last Q hängt unmittelbar oder durch Vermittelung eines Flaschenzuges am Seil oder an der Kette, welche um eine Trommel geschlungen ist. Die Anzahl der Umwindungen und Breite der Trommel richtet sich nach der Höhe der zu hebenden Last. Mit der Trommelachse fest verbunden ist ein Zahnrad R, Fig. 30, in welches ein Getriebe r eingreift. Auf der Achse dieses sitzt die Betriebskurbel, der Drehling; und zwar wendet man, um die Achse beiderseitig durch mehrere Leute betriebsfähig zu machen, auf jeder Seite eine solche um 90° verstellte Kurbel an. Bei der doppelten Winde ist die Achse des vorerwähnten Getriebes $r_2$ Fig. 31 noch mit einem weiteren Zahnrade $R_1$ verbunden, in welches das Kurbelgetriebe $r_1$ eingreift. Ausserdem ist jede Winde mit einer Bremsvorrichtung versehen. Es ist dies eine mit Rand versehene Scheibe, um welche ein Stahlband geschlungen ist, welches durch einen Hebel angezogen, infolge seiner Reibung auf dem Umfang der Scheibe diese und somit die mit ihr in Verbindung stehende Trommel zum Stillstand bringt. Endlich versieht man, damit beim Loslassen der Kurbel die Last nicht von selbst sinkt, jede Winde mit einer Sperrvorrichtung, einem Sperrade, in dessen Zähne ein Sperrkegel (Klinke) eingreift und die Betriebs(kurbel)achse am Drehen hindert.

Bezeichnen wir die Länge der Kurbel mit K, die Kraft an der Kurbel, mit der ein Mann drückt, P, n die Zahl der Leute, ferner mit r, R

Fig. 31.





und w die Halbmesser der Zahnräder und Windetrommel und endlich mit x den Druck zwischen den Zähnen des ersten Räderpaares $R_1$ und $r_1$ der doppelten, bezw. R und r der einfachen Winde.

Damit die beiden Wellen der einfachen Winde im Gleichgewicht bleiben, müssen die Momentengleichungen erfüllt werden.

$nPK = xr$ für die erste Welle,
$xR = Qw$, Moment der zweiten Welle.

Setzt man aus der letzten Gleichung $x = \frac{Qw}{R}$ in die erste ein, dann folgt

$$nPK = Qw\frac{r}{R} \text{ oder } nPK\frac{R}{r} = Qw. \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Da sich die Halbmesser wie die Zähnezahlen, also Umfänge, verhalten müssen, lässt sich die letzte Gleichung auch schreiben

$$nPK\frac{Z}{z} = Qw. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a_1)$$

Die Momentenbetriebsgleichung der Winde mit doppelter Übersetzung ist im allgemeinen von derselben Form.

Sind die Räderhalbmesser $r_1 R_1$ und $r_2 R_2$, bezw. die Zähnezahlen $z_1 Z_1$; $Z_2 Z_2$; x der Druck zwischen den Zähnen des ersten, y der zwischen den Zähnen des zweiten Räderpaares, dann findet man leicht die drei Momentengleichungen für die drei Wellen.

$nPK = xr_1$, Moment der Kurbelwelle,
$xR_1 = yr_2$, „ „ Zwischenwelle,
$yR_2 = Qw$, „ „ Trommelwelle.

Aus der letzten Gleichung y in die mittlere eingesetzt, folgt

$$xR_1 = r_2 \frac{Qw}{R_2},$$

dann hieraus x entnommen und in die erste eingeführt, ergiebt sich

$$\text{(b)} \quad \ldots \quad nPK \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} = nPK \frac{Z_1}{z_1} \frac{Z_2}{z_2} = Qw.$$

Die Einschaltung eines weiteren Räderpaares hat nur eine weitere Multiplikation mit $\frac{R_3}{r_3} = \frac{Z_3}{z_3}$ links zur Folge. Setzt man darum allgemein das Zähne- oder Halbmesserverhältnis

$$\text{(31)} \quad \ldots \quad \begin{cases} i = \frac{R}{r} = \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} = \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \frac{R_3}{r_3} \cdots \text{ oder} \\ i = \frac{Z}{z} = \frac{Z_1}{z_1} \frac{Z_2}{z_2} = \frac{Z_1}{z_1} \frac{Z_2}{z_2} \frac{Z_3}{z_3} \cdots, \end{cases}$$

dann folgt

$$nPKi = Qw.$$

Qw ist aber weiter nichts als das zu überwindende Moment mit Hilfe der Kraft P bezw. nP an der Kurbel K und mit der Übersetzung i. Für alle Hebmaschinen kann man sonach die allgemeine Gleichung aufstellen

$$\text{(32)} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{nPKi = Qw = M.}$$

Kann man ein Räderpaar entbehren, wie die Anordnungen der Winden Fig. 32, 33 zeigen, dann wird für $i = 1$,

$$\text{(32a)} \quad \ldots \ldots \quad nPk = Qw.$$

Wir werden weiter unten Gelegenheit nehmen nach Besprechung der Widerstände näher auf die Hebmaschinen einzugehen.

**Beispiele. I.** Wieviel Last lässt sich bei $K = 400^{mm}$ Kurbelhalbmesser ohne Räderübersetzung von einem Manne ($n = 1$) heben, wenn die Windetrommel $w = 75^{mm}$ Halbmesser hat, und $P = 15$ Klg. Druck pro Mann an der Kurbel angenommen wird.

Aus $PK = Qw$ folgt $Qw \frac{PK}{20} = \frac{15 \cdot 400}{75} = 80$ Klg.

Nehmen wir (Fig. 32) für eine solche Brunnenanlage das Eimergewicht zu 10 Klg. an, so lassen sich ausser dem Eimer noch 10 Klg., das sind 7 Liter Wasser, heben.

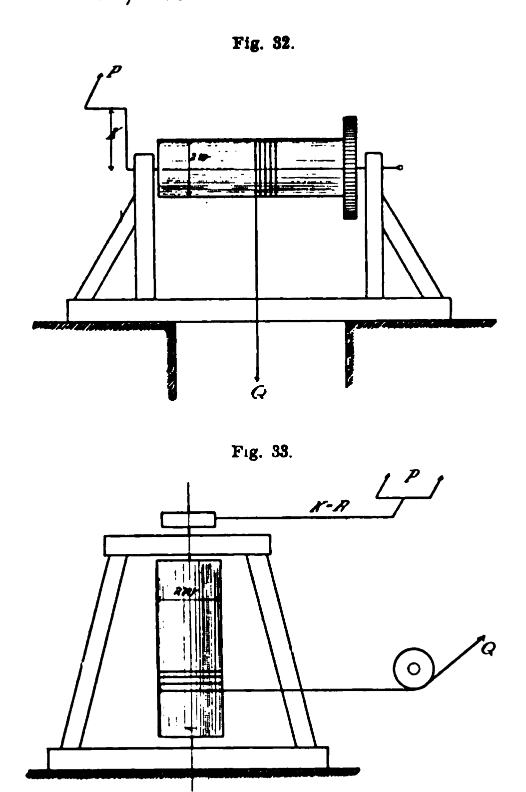



Fig. 32.

Fig. 33.

**II.** Es soll mit Hülfe einer Göpelanlage, wie die Figur 33 andeutet, und der Zugkraft eines Pferdes $P = 50$ Klg. Bauholz auf ein Gerüst aufgezogen werden. Nimmt man $w = 130^{mm}$ $K = 2{,}5^{m} = 2500^{mm}$, dann folgt aus (32a) für $i = 1$,

$$Q = \frac{PK}{w} = \frac{50 \cdot 2500}{130} = 962 \text{ Klg.}$$

Nehmen wir $5^{m}$ lange, $30/25^{ctm}$ starke Balken, dann wiegt bei 0,7 spez. Gew. ein solcher (Gl. 17) $G = 0{,}7 \cdot 1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 5 = 262$ Klg., somit können ungefähr $\frac{962}{262} = 4$ Balken auf einmal hoch gezogen werden.

**III.** Zur Hebung einer Last von 600 Klg. bei n = 2 Mann Bedienung, jeder Mann zu P = 15 Klg. gerechnet, K = 0,35$^m$ Kurbelhalbmesser, w = 0,1$^m$, ist welche Übersetzung erforderlich?

Die Gl. 32 liefert

$$i = \frac{Qw}{nPK} = \frac{600 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 15 \cdot 0{,}35} = 6\,\text{fach.}$$

Bekommt das Getriebe 15 Zähne, so muss das grosse Rad Z = 90 erhalten.

**IV.** Es soll eine Laufwinde für einen Laufkrahn zu einem Baugerüst ausgeführt werden. Die Maximallast, welche gehoben werden soll, sei Q = 600 Klg. = 120 Ctr.; hierbei soll K = 400$^{mm}$, w = 200$^{mm}$ angenommen werden. Zur Bedienung stehen n = 4 Mann zur Verfügung, jeder zu 15 Klg. Druck gerechnet.

Verwendet man eine Flaschenzugrolle, so kommt auf die Winde die Hälfte der Last 3000 Klg.; sämtliche Werte in Gl. 32 eingesetzt, erhält man (Fig. 31) die Übersetzung, nämlich

$$i = \frac{Qw}{nPK} = \frac{3000 \cdot 200}{4 \cdot 15 \cdot 400} = 25\,\text{fach.}$$

Von den beiden Vorgelegen erhält jedes eine 5fache Übersetzung $\frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_1}{r_1} = 5{,}5 = 25$; denn ein einziges Räderpaar würde eine zu grosse Winde liefern und die Kurbelachse soll nicht viel mehr als 1$^m$ über dem Boden liegen bei dergleichen von Hand betriebenen Winden.

(Hiervon können bereits einige der Aufgaben über belastete Balken s. unten angeschlossen werden).

---

## Arbeit.

Befördert man irgend ein Gewicht oder eine Last von einem Orte zum andern, so spricht man von einer grösseren oder kleineren **Arbeitsleistung**, je nachdem das Gewicht oder die Wegstrecke gross oder klein ist. Jede Arbeitsleistung ist sonach proportional der Wegstrecke s oder Hubhöhe h und dem zu befördernden Gewicht G. Da es sich in der Natur der Sache gleich bleibt, ob man ein Gewicht tragend von einem Ort zum andern befördert, oder ob man eine Kraftäusserung P ausführt auf die Länge eines gewissen Weges, so kann man den Begriff der Arbeitsleistung auch als Produkt von Kraft mal Weg darstellen, je grösser die

Kraft oder je länger der Weg, auf welchem die Kraft einwirkt, um so grösser die Arbeit, daher

$$\mathbf{A = Ps = Gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Z. B. eine Kraft P oder ein Gewicht G = 200 Klg. auf eine Höhe h oder eine Wegstrecke $s = 5^m$ befördert, giebt $A = 200 \cdot 5 = 1000$ Klgmeter Arbeit. Im Augenblick (Moment) der Multiplikation der beiden Arbeitsfaktoren erscheint das Produkt (Arbeitsmoment) wie im Sinne unserer obigen Momente, welche Zahl dann wieder in beliebige Faktoren zerlegbar ist.

Ob man 200 Klg. $5^m$ hoch oder 500 Klg. $2^m$ hoch, 1000 Klg. $1^m$ weit befördert, bleibt sich gleich, die geleistete Arbeit ist stets 1000 Klgmeter.

Ferner bleibt es sich gleich, ob man auf einmal die 200 Klg. oder diese geteilt in beliebige Teile $P_1 = 50$, $P_2 = 70$, $P_3 = 20$, $P_1 = 60$ auf die Weglänge s oder h befördert; es ist dann

$$A = 1000 = 50 \cdot 5 + 70 \cdot 5 + 20 \cdot 5 + 605.$$

Hat man also verschiedene Arbeiten $Q_1 s_1$, $Q_2 s_2$, $Q_3 s_3 \cdots$, so lassen sich diese zu einer einzigen summieren, oder die einzelnen Arbeiten von einer einzigen verrichten; dieses Gesetz der Arbeitsteilung lässt sich ausdrücken durch

$$A = Q_1 s_1 + Q_2 s_2 + Q_3 s_3 + \cdots = \Sigma Q s. \quad . \quad . \quad (33a)$$

Jede Maschinenfabrik repräsentiert uns den Wert der Arbeitsteilung, indem jede einzelne Maschine eine gewisse Arbeit verrichtet und die Betriebsmaschine (der Motor) die Gesamtarbeiten leisten muss.

Aus Gl. 22 ersahen wir, dass die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe h frei herabfällt ohne Anfangsgeschwindigkeit, $v = \sqrt{2gh}$ ist, umgekehrt also entspricht der Endgeschwindigkeit v, die Fallhöhe $h = \frac{v^2}{2g}$.

Setzt man in Gl. 20a S. 25 58 $s = \frac{G}{2g} \frac{v^2}{K}$ für $\frac{v^2}{2g} = h$, so nimmt sie die Form an $s = \frac{G}{K} h$.

Diese Gleichung liefert denselben Arbeitsausdruck der Gl. 33, $sK = Gh$, die Kraft K auf die Länge s des Weges wirkend, ist gleich einem Gewicht G, welches eine Höhe h herabfällt, oder eben auf die Höhe h gehoben werden soll; beide Arbeitsmomente sind gleich gross. Ob man ein Gewicht G = 60 Klg. auf eine Höhe $h = 12^m$ hebt, oder ob dieses Gewicht $12^m$ herabfällt, bleibt sich für die Arbeitsgrösse gleich; im letzteren Fall verrichtet die Anziehungskraft der Erde die Arbeit.

Bei beiden Arbeiten Ps bezw. Ks und Gh haben wir aber die Zeit der Arbeitsleistung noch ausser Acht gelassen. Beide Arbeiten sind nur in dem Fall vollständig gleichwertig, wenn sie in derselben Zeit ausgeführt werden. Die Zeit mit in Rücksicht gezogen, verändert das Arbeitsmoment keineswegs, sondern giebt uns nur einen Anhaltepunkt, eine nähere Beurteilung für das praktische Leben. Nach Gl. 23 gebraucht für $h = 12^m$ der Körper $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2{,}12}{9{,}81}} = 1{,}56$ Sek., während die Kraft P oder K den Weg s entlang, ebensoviel Minuten oder Tage gebrauchen kann, um die Arbeit $Gh = 60 \cdot 12 = 720$ Klgmeter zu verrichten, ohne thatsächlich mehr oder weniger zu leisten.

Man pflegt gewöhnlich die Arbeit eine gute, brauchbare zu nennen, wenn sie neben ihrer Brauchbarkeit in der kürzesten Zeit geleistet ist. Hierzu bedarf es einer Einheit, eines einheitlichen Massstabes in einer gewissen Zeit. Eine solche stellt der Begriff der Pferdekraft, Pferdeleistung, Pferdestärke dar, welcher auf

(34) . . . . **A = 75 Klgmeter in der Sekunde**

normiert ist.

75 Klgmeter oder 25 Klg. $3^m$, 75 Klg. $1^m$ hoch in der Sekunde zu heben, dürfte für ein Pferd wohl zu viel sein;*) und ist diese einheitliche Zahl eben zu einer Zeit entstanden, als man vor der praktischen Verwertung der Dampfmaschinen wenigstens einer Pferdeleistung ziemlich nahe liegende runde Zahl suchte. Es wäre sehr wünschenswert, wenn diese Arbeitseinheit auf 100 Klgmeter in der Sekunde abgerundet würde, welche Einheit viel besser mit unserem Zahl-, Mass- und Gewichtssystem übereinstimmen und die Rechnung erleichtern würde. Freilich müsste dann der Begriff oder der Ausdruck Pferdekraft oder Pferdeleistung auch in Wegfall kommen. Verfasser würde den Ausdruck Maschinenstärke, Maschinenleistung [N = ein MS, MK] vorschlagen.

Man bezeichnet die Pferdekraft mit N,

(34a) . . N = eine oder mehrere PK oder $\mathcal{HP}$**).

Gebraucht man zu einer Arbeitsleistung Ps oder Gh Klgmeter eine Zeit von $t''$, dann ist die sekundliche Arbeit

*) Man rechnet im Durchschnitt 56 Klgmeter pro Sekunde.

**) Einige deutsche Werke können nicht davon abkommen, die Pferdeleistungen mit den englischen Buchstaben (horse-power) HP zu bezeichnen!

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{Ps}{t} = \dfrac{Gh}{t} \text{ oder in } \mathcal{PS} \\ N = \dfrac{Ps}{75t} = \dfrac{Gh}{75t}\,\mathcal{PS}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34b)$$

Bewegt sich ein Gewicht oder eine Kraft bereits mit $v^m$ Geschwindigkeit (inliegend der sekundliche Begriff), dann ist unmittelbar die Leistungsfähigkeit in Pferdestärken

$$N = \frac{Pv}{75}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34c)$$

Zur Drehung eines Rades, dessen Halbmesser R, oder zur Bewegung einer Maschine sei das Moment $PR = M$ erforderlich. Hat nun die Maschine N $\mathcal{PS}$ und soll das Betriebsrad n Umdrehungen in der Minute machen, — mit anderen Worten, soll das Moment M so stark sein, dass es die Leistungsfähigkeit von N $\mathcal{PS}$ bei n Umdrehungen zu überwinden vermag; dann können wir leicht eine Beziehung zwischen Moment, Pferdekraft und Umdrehungen aus der letzten Gleichung aufstellen. Setzen wir in $N = \frac{Pv}{75}$, $v = \frac{2R\pi n}{60}$ (siehe Seite 6, Gl. 5a), dann folgt $N = \frac{P \cdot 2R\pi n}{60 \cdot 75}$; da nun $PR = M$, so wird $N = \frac{\pi n M}{30 \cdot 75}$, hieraus folgt selbstredend für Meter

$$\mathbf{M\ Klgmeter = 716{,}198\,\frac{N}{n} = 716{,}2\,\frac{N}{n}\ Klgmeter = 716\,198\,\frac{N}{n}\ Klg^{mm}.} \quad \mathbf{(35)}$$

Bemerkung. Würde man als Einheit 100 Klgmeter für eine Maschinenkraft (neue Pferdekraft) zu Grunde legen, dann müssen die Formeln 34b, 34c und 35 geschrieben werden.

$$N = \frac{Pv}{100} = 0{,}01\,\frac{Ps}{t};\ M = 955\,\frac{N}{n}. \quad \ldots \quad (35a)$$

Z. B. einem Moment von $M = 143$ Klgmeter würden bei $n = 60$ Umdrehungen

$N = \frac{Mn}{955} = \frac{143 \cdot 60}{955} = 9$ MK, (im Gegensatz zu $N = \frac{143 \cdot 60}{716{,}2} = 12\,\mathcal{PS}$) entsprechen.

Eine Last von $P = 500$ Klg. mit einer Geschwindigkeit $v = 0{,}3^m$ gehoben, erfordert

$N = \frac{Pv}{100} = \frac{500 \cdot 0{,}3}{100} = 1\,{}^1\!/_2$ MK (Maschinenkräfte), im Gegensatz zu $N = \frac{Pv}{75} = 2\,\mathcal{PS}$ (alten Pferdekräften).

**Beispiele. I.** Zur Hebung einer Last von Q = 600 Klg. auf h = $12^m$ Höhe ist die Arbeit $Qh = 600 \cdot 12 = 7200$ Klgmeter erforderlich. Will man hierzu eine Dampfwinde verwenden, aber keine längere Zeit als $t = 45''$ gebrauchen, dann muss die Betriebsmaschine eine Stärke haben nach Gl. 34b

$$N = \frac{Qh}{75t} = \frac{600 \cdot 12}{75 \cdot 45} = 2^1/_8 \text{ PS}.$$

**II.** Die Seilgeschwindigkeit eines Aufzuges sei $v = 0{,}4^m$; die jedesmal zu hebende Last 1000 Klg., dann ist die Stärke des Motors nach (34c)

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{1000 \cdot 0{,}4}{75} = 5^1/_3 \text{ PS}.$$

**III.** Wie verhalten sich die Wege von Kraft und Last bei Flaschenzügen, wie ihre Geschwindigkeiten und die Bewegungszeiten?

Der Weg, den die Kraft P bei einem Kraftzug zurücklegt, sei $s^m$, in der gleichen Zeit erhebt sich die Last $\sigma^m$ hoch, beide Arbeiten sind gleich

$$Ps = Q\sigma, \text{ somit ist der Lastweg}$$

$$\sigma = s\,\frac{P}{Q}.$$

Setzt man für P die oben entwickelten Formeln S. 38 und 39 ein, dann folgt

für den gewöhnlichen Kloben $\sigma = \frac{s}{2n}$

„ „ Differentialflaschenzug $\sigma = \frac{s}{2D}(D - d)$.

Die Zeiten und Geschwindigkeiten stehen in denselben Verhältnissen, wie man leicht aus Gl. 1 $s = vt$ folgern kann. Setzt man für $\sigma$ die ganze Erhebungshöhe ein, dann giebt der Kraftweg zugleich die gesamte Seil- oder Kettenlänge.

Wir hatten oben S. 38 für Q = 600 Klg., und n = 2 Rollen in der Flasche, P = 150 gefunden. Bewegt sich die Kraft P während eines Anzuges, $s = 0{,}6^m$ nach unten, so wird die Last

$$\sigma = 0{,}6\,\frac{150}{600} = 0{,}6\,\frac{1}{2\,.\,2} = 0{,}15^m$$

steigen, also auch mit dem $2n$ = vierten Teil der Geschwindigkeit der Kraft, bezw. es ist zur Hebung die vierfache Zeit erforderlich, wie bei einer Rolle. Soll die Last $\sigma = 10^m$ gehoben werden, dann ist eine Seillänge erforderlich von $s = \sigma\,\frac{Q}{P} = 10\,\frac{600}{150} = 40^m$.

Die Berechnung des Differentialflaschenzuges S. 39 liefert bei $20^{mm}$ Differenz der Rollendurchmesser und derselben Last die Kraft $P = 40$ Klg. Hier ist der Lastweg $\sigma = s \frac{P}{Q} = \frac{s}{15}$, das ist der 15. Teil des Kraftweges, wenn $s = 0{,}6^{m}$, ist also nur $0{,}04^{m} = 4^{ctm}$ Erhebungshöhe möglich. Dieser Differentialflaschenzug gebraucht demnach $\frac{0{,}15}{0{,}04} = 3\,{}^{3}/_{4}$ so viel Zeit zur Erhebung der Last wie obiger gewöhnlicher Kloben. (S. S. 32 Bemerkung über virtuelle Geschwindigkeit).

**IV.** Wollte man zum Betrieb einer oder mehrerer Maschinen, welche $N = 1$ *PS* erfordern und täglich 5 Stunden im Betrieb sein sollen, ein sinkendes Gewicht von einer Höhe nicht über $15^{m}$ verwenden, welches nur einmal täglich in die Höhe gehoben, aufgezogen werden soll (Gewichtsaccumulator), so wird die Rechnung sofort zeigen, dass hierzu ein enorm schweres Gewicht gehören würde.

Setzen wir ein gleichmässiges Sinken voraus, dann folgt zunächst aus $h = vt$ die Geschwindigkeit $v = \frac{h}{t} = \frac{15}{5 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}000\,83^{m}$. Diesen Wert in Gl. 34c eingeführt, folgt aus

$$1{,}0 = \frac{G \cdot 0{,}000\,83}{75}, \quad G = \frac{1 \cdot 75}{0{,}000\,83} = 90\,000 \text{ Klg. oder}$$

$$G = \frac{90\,000}{50} = 1800 \text{ Ctr.}$$

Diesem Gewicht würde eine eiserne Kugel entsprechen, deren Durchmesser sich aus der Gl. 17 berechnen lässt. In diese $V = \frac{\pi}{6} d^{3}$ und 7,5 für das spez. Gewicht eingesetzt, folgt

$$90\,000 = 1000 \cdot 7{,}5 \cdot \frac{\pi}{6} d^{3}, \text{ hieraus findet man}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 90\,000}{1000 \cdot 7{,}5 \cdot \pi}} = 2{,}84^{m}.$$

Solche Betriebsgewichte rentieren sich nur zur Ausbeutung von kleinen, geringen Arbeitsleistungen. Sinkt ein Uhrgewicht von $G = 5$ Klg. gleichmässig alle 24 St. $2^{m}$ herab, dann ist nach (34b) die geleistete Arbeit $Gh = 5 \cdot 2 = 10$ Klgmeter; in der Sekunde

$$A = \frac{5 \cdot 2}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{8640} \text{ Klgmeter,}$$

welche zur Drehung der Zeiger und Bewegung des Perpendikels genügt.

Das Gewicht lässt sich alle Tage in der kürzesten Zeit, sagen wir in $t = 5''$ leicht wieder heben, aufziehen; die erforderliche Arbeit ist $A = \frac{G h}{t} = \frac{5 \cdot 2}{5} = 2$ Klgmeter pro Sek., oder $\frac{2}{75}$ PS, welche Leistung ein Kind durchführen kann.

Wollte man zur Leistung von $\frac{1}{2}$ PS Stundenbetrieb einrichten mit einem sinkenden Gewichte, dann wäre nach 34b $\frac{1}{2} = \frac{G \cdot 15}{75 \cdot 60 \cdot 60}$, hieraus $G = 9000$ Klg.; der zehnte Teil des obigen Gewichtes entspricht einer Kugel von $\frac{2{,}84}{\sqrt[3]{10}} = 1{,}3^{m}$ Durchmesser.

Zur Hebung dieses Gewichtes auf die Höhe zurück, würde ein Windewerk mit $n = 4$ Mann Bedienung, $w = 150^{mm}$ Trommelwelle gerechnet, $K = 450^{mm}$ Kurbellänge von $i = 150$facher Übersetzung nötig sein; denn nach Gl. 32 ist (selbstredend theoretisch)

$$i = \frac{Q w}{n P K} = \frac{9000 \cdot 150}{4 \cdot 15 \cdot 450} = 150.$$

Wenden wir hierzu eine Flaschenzugrolle an, dann wäre die Übersetzung der doppelten Winde $i = \frac{150}{2} = 75$fach. Rechnen wir weiter alle Sekunden 1 Umdrehung der Kurbelwelle, dann sind 150 Sek. Zeit oder $2\frac{1}{2}$ Minute jedesmal zum Aufziehen erforderlich.

**V.** Ein Wasserlauf liefert nach vorausgegangenen Messungen in der Sekunde $Q = 1{,}4$ Kubikm. Wasser; dasselbe fällt, indem es ein Wasserrad treibt, $h = 3{,}4^{m}$ herab; eine wie starke Maschine kann durch Vermittelung des Motors in Betrieb gesetzt werden?

Das Gewicht des Wassers ist 1000 Q, die Arbeit in der Sekunde, weil Q sekundlich zufliesst, ist $A = 1000\,Q h$, somit die Leistungsfähigkeit

$$N = \frac{1000\,Q h}{75} = \frac{1000 \cdot 1{,}4 \cdot 3{,}4}{75} = 63\tfrac{2}{3}\ \text{PS}.$$

**VI.** Wie gross ist die Riemenspannung P, wenn durch zwei Riemscheiben eine Kraft von $N = 6$ PS bei 100 resp. 40 Umdrehungen übertragen werden soll und der Durchmesser der kleineren Riemscheibe $d = 0{,}4^{m}$ ist.

Zunächst ist der Durchmesser der grösseren Riemscheibe aus $D : d = n : n_1$, wenn n die Umdrehungen

$$D = d\,\frac{n}{n_1} = 0{,}4 \cdot \frac{100}{40} = 1{,}0^{m}.$$

Fig. 34.

Das Moment in der kleineren Riemscheibe ist, Gl. 35,

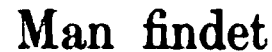
$$M = 716{,}2\,\frac{N}{n} = 716{,}2\,\frac{6}{100} = 43 \text{ Klgmeter.}$$

Da nun $M = \frac{d}{2}\,P = 43$, so folgt

$$P = \frac{43}{d/2} = \frac{43}{0{,}2} = 215 \text{ Klg.}$$

Das gleiche Resultat erhält man aus dem Moment der oberen Scheibe und deren Halbmesser.

Man findet



$$M = 716{,}2\,\frac{6}{40} = 107^1/_2 \text{ Klgmeter, } P = \frac{107{,}5}{0{,}5} = 215 \text{ Klg.}$$

Hiernach lässt sich die Stärke des Riemens berechnen.

**VII.** Soll ein Zahnrad N = 30 PS bei n = 60 Umdrehungen übertragen, und ist der Halbmesser desselben $R = 0{,}7^m$, der Zahndruck P, dann ist

$$PR = 716{,}2\,\frac{N}{n}, \text{ hieraus } P = \frac{716{,}2 \cdot 30}{60 \cdot 0{,}7} = 511 \text{ Klg.}$$

**VIII.** Ein ausgewachsener Mensch wiegt im Mittel 70 Klg. und hebt seinen Körper bei jedem Schritt ungefähr $0{,}07^m$ hoch; die geleistete Arbeit beim Gehen ist demnach $A = 70 \cdot 0{,}07 = 5$ Klgmeter ca. Macht man alle Sekunden einen Schritt, dann leistet man beim Gehen $N = \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$ PS. Hieraus folgt aber noch nicht, dass man nach 15 zurückgelegten Sekundenschritten eine Pferdeleistung ausgeführt habe; man würde dies vollbringen, wenn man auf die Wegstrecke der 15 Schritte seinen Körper in einer Sekunde tragen könnte. Die Leistung des Menschen wird natürlich grösser, wenn er eine Last trägt, zu einer Treppe oder Leiter hinaufsteigt.

Bemerkung. Bei jedem Schritt, dessen Länge s, Fig. 35, sein möge, dreht sich das Bein l um den Fusspunkt a, und gelangt der Mensch M nach b. Die Höhe des Schwingungsbogens ist h, die wir oben zu $7^{ctm}$ annahmen. Aus dem Dreieck acd folgt $l^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (l - h)^2$ oder, diese Gleichung nach h aufgelöst, $h = l - \sqrt{l^2 - \frac{s^2}{4}}$. Mit Hülfe

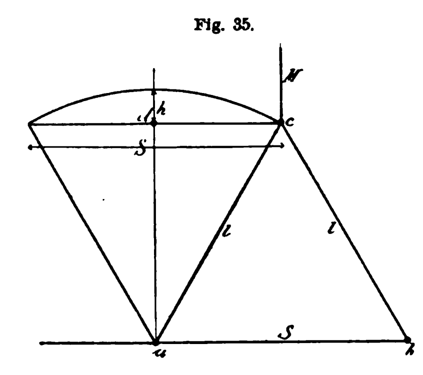


Fig. 35.

des binomischen Lehrsatzes findet sich die Wurzel zergliedert genau genug $h = \frac{s^2}{8l}$, die Körperhebungshöhe abhängig von der Schrittlänge und der Beinlänge.

Setzt man h in die Arbeitsgleichung $A = Gh$, dann erhält man

$$A = G \frac{s^2}{8l}.$$

Statt nun das Körpergewicht G, $h^m$ hoch zu heben, kann man auch eine Kraft P auf die Weglänge s arbeiten lassen und erhält aus

$$A = G \frac{s^2}{8l} = Ps, \quad P = G \frac{s}{8l}.$$

Setzt man $G = 70$, $s = 0{,}7$, $l = 0{,}9$ als Mittelwerte, dann ergiebt sich $P = 70 \frac{0{,}7}{8 \cdot 0{,}9} = 6{,}8$ Klg. Die Arbeit des Gehens heisst also soviel als eine Kraft von 6,8 Klg. der Schrittlänge $s = 0{,}7^m$ entlang wirken zu lassen. Für $s = 0{,}7$, $l = 0{,}9$ findet man $h = 0{,}068^m \sim 0{,}07^m$. Nach Gl. 33 folgt unmittelbar $P = \frac{Gh}{s} = \frac{70 \cdot 0{,}07}{0{,}7} = 7$ Klg.

---

Wie die Bewegungslehre, so lässt sich auch die Arbeit bildlich, graphisch darstellen und gewinnt man dadurch eine für die Anwendung sehr brauchbare Übersicht. Betrachtet man in der Gleichung $A = Ps = Gh$ die beiden Faktoren als Seiten eines Rechteckes, so stellt die Arbeit den Inhalt des Rechteckes dar. Die horizontalen Linien sind die zurückgelegten Wege, die vertikalen die Grössen der Kräfte, Fig. 36.

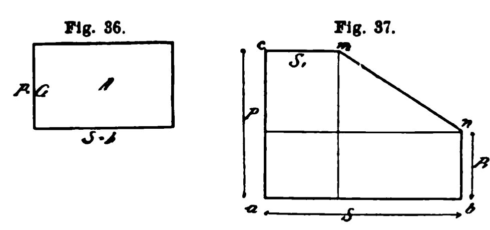


Fig. 36. Fig. 37.

Ist die letztere veränderlich, abnehmend, Fig. 37, innerhalb des zurückgelegten Weges, dann ist die Arbeit kleiner. Wie die Zeichnung andeutet, wirkt die Kraft nur auf die Wegstrecke $s_1$ konstant, nimmt dann aber immer mehr und mehr ab und zwar im Verhältnis der Neigung der Linie mn, bis am Ende des Weges nur noch

die Kraft $P_1$ vorhanden ist. Die Gesamtarbeit ist $A = abnmc$, oder

$$A = P_1 s + \frac{s + s_1}{2}(P - P_1) = P s_1 + \frac{P + P_1}{2}(s - s_1).$$

Ein ähnliches Bild, wie das der letzten Figur, erhält man durch die Darstellung der Dampfkraft bezw. Dampfarbeit im Innern eines Dampfcylinders, wenn der Dampf nicht während des ganzen Kolbenweges, sondern nur auf einen Teil desselben wirkt (Expansionsmaschinen). Den nahezu vollen Druck des Dampfes lässt man, wenn l die Länge des Cylinders bedeutet, nur auf einen Teil dieses Hubes $l_1$ einwirken, und nennt das Verhältnis $\frac{l_1}{l}$ das Expansionsverhältnis. Die Kraft des Dampfes drückt sich durch den Druck auf den □ᵐ des Kolbens aus, welcher sich aus der Anzahl der Atmosphären und dem Druck einer Atmosphäre auf die Quadrateinheit zusammensetzt. Am Ende des Weges $l_1$ wird der Dampf abgestellt, verliert aber hierdurch nicht plötzlich seine Kraft, sondern behält noch eine gewisse Ausdehnungsfähigkeit (Expansionskraft), die erst nach und nach, je nach seiner Temperatur und Spannkraft, zu Ende geht. Die Abnahme ist aber nicht regelmässig, wie die schiefe Linie mn, Fig. 37, andeutet, sondern nach einer krummen Linie $m_1 n_1$ gebildet, Fig. 37a. Den Flächeninhalt der ganzen Arbeitsfigur gewinnt man dadurch, dass man die Fläche in Streifen zerlegt, die nahezu geradlinig begrenzt sind, und die Flächeninhalte dieser einzelnen addiert. Man nennt im Dampfmaschinenbau eine solche Figur ein **Diagramm**.

Fig. 37a.

Der Dampf soll während des Hin- und Herganges des Kolbens einen regelmässigen Widerstand überwinden beim Eintritt eines sogenannten Normalzustandes. Dieser Arbeit auf die Länge des Weges mag ein gewisser idealer Druck $P_i$ entsprechen; es muss dann in der letzten Figur der Flächeninhalt des Rechteckes $P_i l$ dem der Arbeitsfläche A gleich sein. Die in der Figur schraffierten Flächen müssen sich somit gegenseitig ausgleichen; die Mehrarbeit des Dampfes zu Anfang muss am Ende wieder abgegeben werden an die Widerstandsarbeit. Hierzu bedarf es allerdings verschiedener Regulierungsapparate, die wir weiter unten näher kennen lernen werden, da sie gleichzeitig noch weiteren Zwecken dienen.

Ist O□ᵐ der Dampfcylinder- oder Kolbenquerschnitt, und drückt eine

Atmosphäre mit 10 334 Klg. auf den $\square^m$, sind $p_i$ die Anzahl der idealen Atmosphären dem Druck $P_i$ entsprechend, dann ist die Arbeit

$$A = P_i l = 10\,334\, O p_i l.$$

Bewegt sich der Kolben mit $v^m$ mittlerer Geschwindigkeit in der Sekunde, dann ist in PS ausgedrückt,

$$N = \frac{10\,334\, O p_i v}{75}.$$

v ist zu Anfang und zu Ende des Kolbenhubes Null, inmitten also grösser. Den Mittelwert kann man aus der Anzahl der Umdrehungen der Kurbel-(Schwungrad)welle n, und dem Kurbelhalbmesser R rechnen, (Gl. 5a):

$$v = \frac{2 R \pi n}{60}.$$

$p_i$ ist abhängig (wie selbstredend auch $P_i$) vom Expansionsverhältnis $l_1 : l$ und dem ursprünglich im Kessel erzeugten Dampfdruck von der Spannung p; auch von dem Gegendruck r Atmosphären, welcher vor dem Kolben herrscht und auch dazu aufgewendet wird, um den Dampf aus dem Cylinder in die Luft zu befördern oder in den Kondensator zu treiben, im letzteren Fall ist er kleiner als der gewöhnliche Atmosphärendruck. Stellt ein Koefficient f diejenige Zahl der Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{l_1}{l}$ dar, mit welcher p multipliziert werden muss, um einen gewissen mittleren Druck $p_m$ zu erhalten, und zieht man von diesem Produkt $p_m f$ den Gegendruck r ab, so wird $p_i = p_m f - r$ und man kann die letzte Gleichung auch schreiben

$$N = \frac{10\,334\, O v\, (p_m f - r)}{75},$$

hieraus findet man den Cylinder(kolben)querschnitt, wenn die Maschine N PS leisten soll,

$$O = \frac{75\, N}{10\,334\, v\, (p_m f - r)} = \frac{75\, N}{10\,334\, v p_i}.$$

Führt man obige Beziehung zwischen v, R, n ein, dann erhält man

$$O = \frac{716{,}2}{10334} \; \frac{N}{n R\, (p_m f - r)} \; \square^m.$$

Z. B. 1) Abgesehen von noch anderen Verlusten an Kraft, sei eine Dampfmaschine von $N = 20$ PS, $v = 1^m$ mittlerer Kolbengeschwindigkeit, $r = 1{,}15$ Atm. Gegendruck, $p_m = 4$ Atm. reduzierter Kesseldruck zu berechnen, wenn das Expansionsverhältnis $\frac{l_1}{l} = 0{,}4$ und $f = 0{,}78$ sich

durch anderweitige Rechnung ergeben hat. Es folgt

$$O = \frac{75 \cdot 20}{10\,334 \cdot 1\,(4 \cdot 0{,}78 - 1{,}15)} = 0{,}07\,\square^m.$$

Hieraus, abgesehen auch von dem Kolbenstangenquerschnitt, folgt, weil

$$0{,}07 = \frac{\pi D^2}{4},\ D = 0{,}38^m.$$

2) Eine Dampfmaschine habe N = 12 *PS* und macht die Kurbelwelle n = 60 Umdrehungen in der Minute; es ist dann das Betriebsmoment in der Kurbelwelle $M = 716{,}2\,\frac{12}{60} = 143$ Klgmeter. Hat die Kurbel eine Länge von $R = 0{,}2^m$, dann folgt für den senkrechten Zapfendruck aus

$$PR = 143,\ P = \frac{143}{1 \cdot 2} = 715 \text{ Klg.}$$

Nehmen wir den Durchmesser des Dampfkolbens zu $22^{ctm}$ an, dann ist der Querschnitt $\frac{22^2 \cdot \pi}{4} = 380\,\square^{ctm}$; den Atmosphärendruck pro $\square^{ctm}$ zu rund 1 Klg. gesetzt, findet sich $p_i$ aus

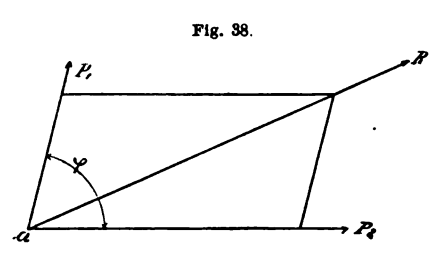
$$p_i\,380 = 715,\ p_i = \frac{715}{380} = 1{,}9 \text{ Atm.}$$

---

## Die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften bez. Geschwindigkeiten.

Wir haben in den ersten Abschnitten unserer Betrachtungen vorausgesetzt, dass eine einzige Kraft nach einer bestimmten Richtung wirkt oder sich bewegt, also infolge der Kraftwirkung dem Körper eine gewisse Geschwindigkeit nach einer Richtung hin erteilt. Wirken nun auf einem Körper a, Fig. 38, gleichzeitig zwei Kräfte ein, $P_1$ und $P_2$, dann bewegt sich der Körper nach der Richtung der Diagonale R, welche man aus dem Parallelogramm der unter dem Winkel φ auf dem Körper einwirkenden Kräfte konstruiert.

Fig. 38.

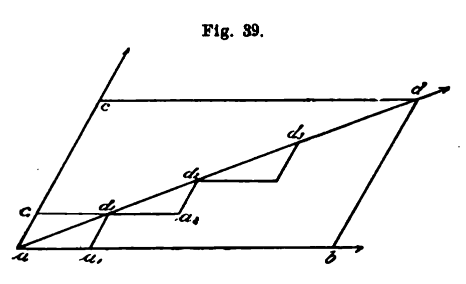



Man nennt die gegebenen Kräfte Komponenten oder Komposan-

ten, Teilkräfte, Seitenkräfte, die sich zusammensetzen, komponieren, zu einem Resultat, der Resultante, Resultierenden R.

Da die Längen der Linien $P_1 P_2$ und R ebensowohl die Kraftgrössen in Längenmassen aufgetragen, als auch die Geschwindigkeiten darstellen können, mit welcher sich der Punkt oder Körper a bewegt infolge der Kraftwirkung, so stellt das gezeichnete Parallelogramm sowohl das Parallelogramm der Geschwindigkeiten als auch das der Kräfte dar, und lassen sich beide in der Theorie und Praxis vereinigen.

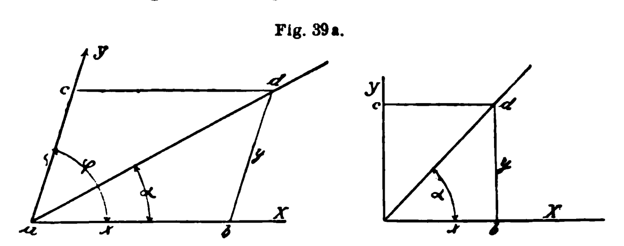
Fig. 39.



Denken wir uns der Körper gelangt durch eine Kraftwirkung nach b (Fig. 39) in einer Sekunde, bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $v_2 = ab$; dann wird er in einer unendlich kleinen Zeit, z. B. in $^1/_6$ Sek., in $a_1$ angelangt sein. Gleichzeitig soll er sich aber auch mit der Geschwindigkeit $v_1 = ac$ nach c bewegen; in einer Zeit von $^1/_6$ Sek. würde er in $c_1$ anlangen. Folgen sich beide Bewegungen aufeinander, dann gelangt der Körper erst nach $a_1$ und von da parallel zur Richtung ac nach $d_1$. In der nächstfolgenden kleinen Zeitperiode von $^1/_6$ Sek. gelangt er erst nach $a_2$ und von dort nach $d_2$ u. s. f., bis er in d der Diagonale, der Verbindungslinie der einzelnen Punkte $a d_1 d_2 \ldots$ ankommt.*)

*) Mit Zuhülfenahme der analyt. Geom. lässt es sich etwas näher auf die Beweisführung des Parallelogramms eingehen.

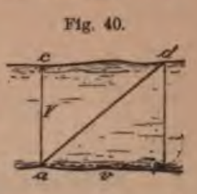
Fig. 39a.



Der Körper oder Punkt a bewegt sich in der Zeit von t" nach b, legt also den Weg $x = ab = v_2 t$ zurück; gleichzeitig in derselben Zeit t" mit der Geschwindigkeit $v_1$ den Weg $y = ac = v_1 t$. Um unabhängig von der Zeit zu werden, entnehmen wir $t = \frac{x}{v_2}$ aus der ersten Gleichung und setzen diesen Wert in y ein, dann findet sich $y = \frac{v_1}{v_2} x$. $\frac{v_1}{v_2}$ ist aber eine feststehende, konstante Zahl A

Die Wirkung des Parallelogramms kann man an sich selbst erproben, wenn man versucht, über einen Fluss, der mit der Geschwindigkeit $2^m$ fliesst, zu schwimmen und hierbei mit der Kraftanstrengung der Geschwindigkeit $V^m$ entsprechend senkrecht zur Flussrichtung nach c zu gelangen sucht. Das letztere Ziel wird man nie erreichen, sondern stets nach einem Punkt d gelangen, der sich aus dem Parallelogramm (hier Rechteck) durch Konstruktion der Diagonale **ad** findet. In allen Fällen bleibt es sich gleich, ob man, wie auch hier, eine der Geschwindigkeit entsprechende Kraft, oder die erstere selbst annimmt, oder ob man von der Weglänge in der Sekunde ausgeht.

Fig. 40.




Stellen wir uns nun die Aufgabe die Resultierende und die Beziehungen zwischen R und den Teilkräften durch Rechnung zu finden.

Fig. 41.

Der einfachste Fall ist, wenn die Teilkräfte $P_1$ und $P_2$ als Kräfte (oder Geschwindigkeiten $v_1 v_2$) rechtwinkelig aufeinander einwirken, dann ist

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{P}_1{}^2 + \mathbf{P}_2{}^2}, \text{ bezw. } P_1 = \sqrt{R^2 - P_2{}^2} \text{ oder } P_2 = \sqrt{R^2 - P_1{}^2}. \qquad \textbf{(36)}$$

---

und man erhält die Gleichung, allgemein ausgedrückt, $y = Ax$. Nach den Grundsätzen der analytischen Geometrie ist dies aber die Gleichung einer geraden Linie von dem Punkt a nach d unter einem Winkel $\alpha$ geneigt, welcher Winkel zu dem halben Parallelogramm **abd** gehört, und von den Geschwindigkeiten der Komponenten, Teilgeschwindigkeiten, abhängig ist. A bedeutet in der ersten Figur den Ausdruck (schiefwinkelige Coordinaten) $A = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi}$, für $\varphi = 90°$ in der zweiten rechtwinkeligen Anordnung $A = \operatorname{tg}\alpha$. Die Gleichung der geraden Linie ist in den beiden Fällen $y = \frac{a}{\sin\varphi - a\cos\varphi}x$, bezw. $y = ax$. Z. B. für $\varphi = 45°$, $a = 1/4$ (a als tg eines Winkel, kann jede Zahl bedeuten), folgt

$$y = \frac{1/4}{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1/4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}x = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\,x, \text{ bezw. } y = 1/4\,x.$$

Betrachtet man x und y als Kräfte und setzt $x = 1$, dann folgt aus der ersten Gleichung $y = 1/3\sqrt{2}$, die Resultante ist alsdann

$$R = \sqrt{1^2 + (1/3\sqrt{2})^2 + 1/3\sqrt{2}\,.\cos 45} = \sqrt{5/3}, \text{ weil } \cos 45 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Aus der zweiten Gl. $y = 1/4\,x$ wird für $x = 2$, $y = 1/2$, somit

$$R = \sqrt{2^2 + 1/4} = \sqrt{\tfrac{9}{4}} = 3/2,$$

wenn die Komponenten $x = 2$, $y = 0{,}5$ rechtwinkelig aufeinander stehen.

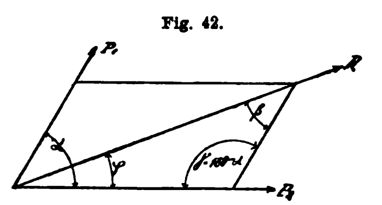


Fig. 42.

Wirken, Fig. 42, die Kräfte $P_1$ und $P_2$ unter einem Winkel $\alpha$ aufeinander, dann ist nach dem Cosinussatze

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 - 2P_1P_2 \cos(180 - \alpha),$$

und

$$\text{(37)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}}.$$

Bildet die Resultierende mit einer Komponente $P_2$ den Winkel $\varphi$, dann lässt sich die andere Komponente berechnen aus

$$\text{(37a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P_1 = \sqrt{R^2 + P_2{}^2 - 2 P_2 R \cos \varphi}.$$

Eine Lösung ist ausgeschlossen, wenn $R^2 + P_2{}^2 \overset{=}{<} 2 P_2 R \cos \varphi$.

Sind endlich beide anschliessende Winkel $\varphi$ und $\beta$ gegeben, dann verhält sich nach dem Sinussatze

$$\text{(38)} \quad . \quad \mathbf{P_1 : \sin \varphi = R : \sin \gamma = P_2 : \sin \beta = R : \sin (\varphi + \beta)}.$$

Aus diesen Beziehungen lassen sich die unbekannten Glieder leicht berechnen.

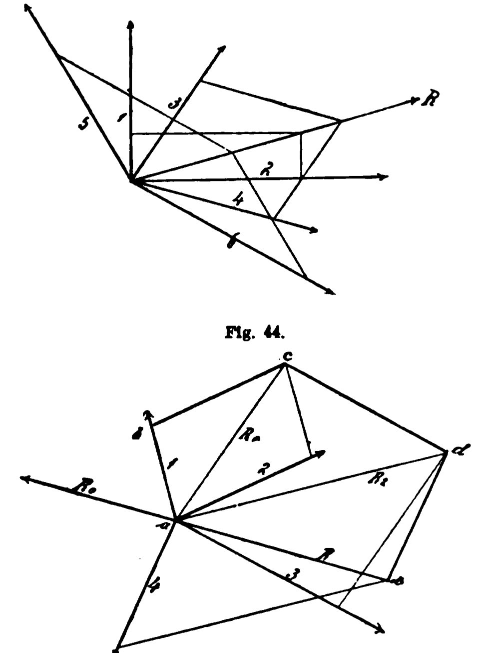


Fig. 43.

Fig. 44.

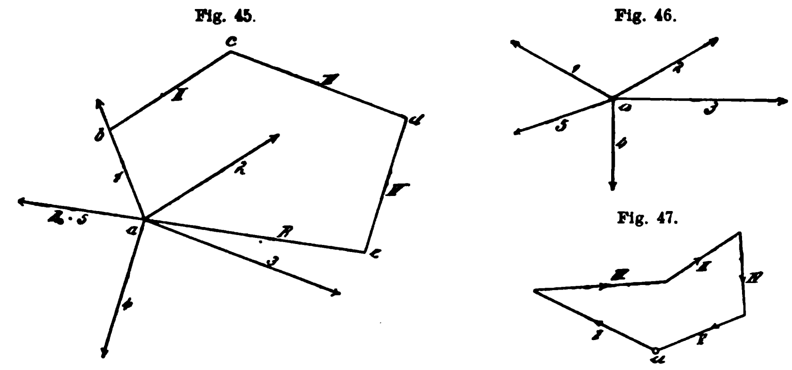
Ebenso wie man zwei Kräfte zusammensetzen kann, lässt sich auch jede Kraft in zwei beliebige Komponenten zerlegen. In beistehender Figur ist die gegebene Kraft R in die beiden rechtwinkeligen Komponenten 1 und 2 und in die schiefwinkelige 3, 4 und 5, 6 zerlegt.

Zerlegt man eine solche Komponente wieder in zwei, dann lässt sich, wie man leicht übersieht, überhaupt eine Kraft als die Resultierende beliebiger Kräfte darstellen; umgekehrt können wir beliebige Kräfte um einen Punkt herum annehmen, und nach und nach zunächst durch Konstruktion deren Zusammensetzung bewirken.

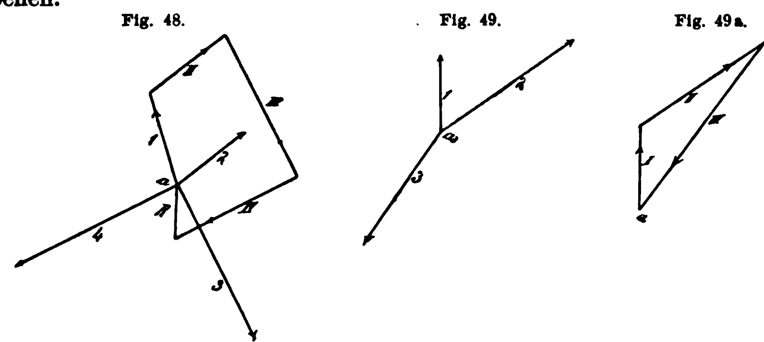
In Fig. 44 wirken um a herum 4 beliebige Kräfte 1, 2, 3, 4. Wir können 1 und 2 durch deren Resultante $R_1$ ersetzen, diese mit 3 verbunden, giebt $R_2$ die Resultierende. $R_2$ mit 4 vereinigt, erhält man als

endgültige Kraft R, nach welcher Richtung hin sich der Punkt mit der Stärke R bewegt. Denkt man sich eine Kraft als 5. auf a einwirken, $R_0$, welche so gross wie R, aber entgegengesetzt wirkt wie R, dann ist Gleichgewicht hergestellt.

Die Konstruktion der verschiedenen Parallelogramme lässt sich auch vereinfachen, wenn man bedenkt, dass bc gleich und parallel 2; cd $\#$ 3 und de $\#$ 4 sind. e mit a verbunden liefert R. ea = R ist die Schlusslinie; ist $R_0$ noch als 5. Kraft gegeben, so würde schliesslich ea $\#$ $R_0$ $\#$ 5 (Fig. 45), und dieses sogenannte Kräfte- oder Geschwindigkeitspolygon abc de a wird ein geschlossenes, die letzte Linie fällt nach a zurück und a ist im Gleichgewicht. In Fig. 46 und 47 ist das Polygon ausser-

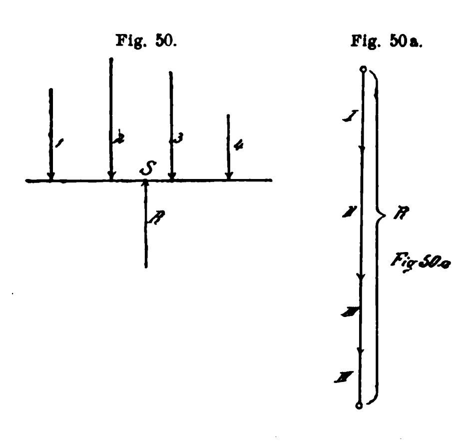

Fig. 45. Fig. 46. Fig. 47.

halb der Kräfte gezeichnet und in anderer Reihenfolge. In Fig. 48 findet man noch die Resultante R = 5, 50, 500 etc. je nach dem angenommenen Mass, auch hier sind die Kräfte im Polygon gleich und parallel den gegebenen.


Fig. 48. Fig. 49. Fig. 49a.

Das einfachste Kräftepolygon ist offenbar das Kräftedreieck (Fig. 49); das Schliessen desselben deutet wieder den Gleichgewichtszustand des Körpers a an.

Wirken die Kräfte parallel unter sich, wie Fig. 50 zeigt, dann ist die Resultierende R die Summe der einzelnen Kräfte. Der Angriffspunkt S derselben, die sog. Mittelkraft dieser parallelen Kräfte, muss so gelegen sein, dass rechts und links von S Gleichgewicht stattfindet; d. h. die rechts drehenden müssen den links drehenden Momenten gleich sein. Wir werden weiter unten auf den Punkt S, den Schwerpunkt, zurückkommen. —


Fig. 50. Fig. 50a.

Versuchen wir nun auch die Resultante R, wenn mehrere Kräfte auf einen Punkt wirken, durch Rechnung zu bestimmen.

Es seien die Kräfte $P_1$ $P_2$ $P_3$ $P_4$ $P_5$ (Fig. 51), um den Punkt 0 herum wirkend, gegeben. Legen wir zwei senkrechte Linien durch 0,

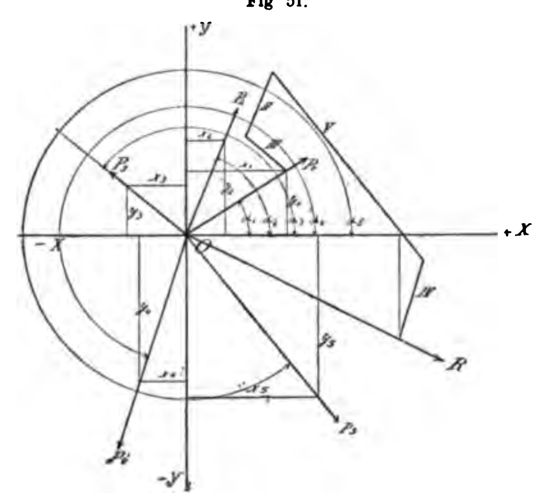
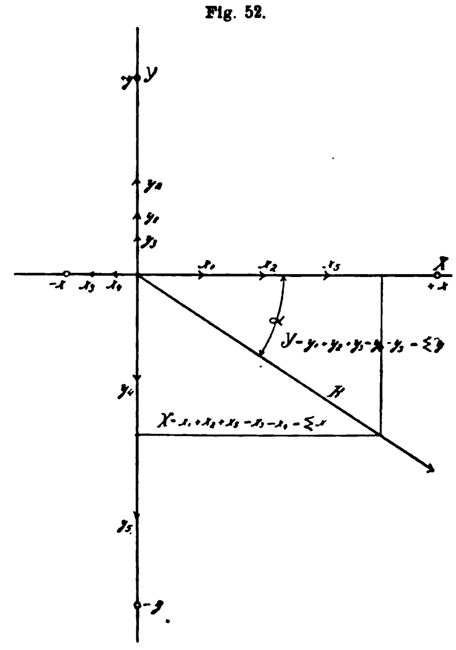


Fig 51.

Richtungsachsen (Koordinatensystem) XX, YY; dann erhalten wir 4 Fächer, Quadranten, in denen die Kräfte verteilt liegen. Von dem rechts oben liegenden Quadranten wollen wir (wie in der Trigonometrie) ausgehen, für ihn seien YO und XO possitiv, ebenso rechnen wir die sämtlichen Winkel, von der Linie OX aus und zwar links herum; dann liegen $P_1$ $P_2$ unter spitzen Winkeln, $P_3$ unter einem stumpfen und $P_4$ $P_5$ sind überstumpfe Winkel.

Wir können nun jede der einzelnen gegebenen Kräfte in je 2 Komponenten zerlegen, welche senkrecht aufeinander stehen, selbstredend in O angreifen sollen und in die gewählten Achsen fallen müssen; dann können wir die Kraft $P_1$ ersetzen durch $x_1\ y_1$; $P_2$ durch $x_2\ y_2$, $P_3$ durch $x_3\ y_3$ ..... In Fig. 52 haben wir die sämtlichen Ersatzkräfte einge-

Fig. 52.




zeichnet, erhalten also eine Zusammenstellung von rechtwinkelig aufeinander stehenden, teils nach einer, teils nach entgegengesetzter Richtung hin wirkenden Kräften, und zwar wirken $y_5$ und $y_4$ negativ (entgegengesetzt) von $y_1\ y_2\ y_3$; $x_3\ x_4$ negativ, $x_1\ x_2\ x_5$ positiv. Die endgültigen Seitenkräfte

$$X = x_1 + x_2 + x_5 - x_4 - x_3 = \Sigma x$$
$$Y = y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 = \Sigma y$$

bilden die hier im 4. Quadranten liegende Resultierende

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Bedenkt man nun, dass nach den Grundsätzen der Trigonometrie

$$x_1 = P_1 \cos \alpha_1;\ x_2 = P_2 \cos \alpha_2;\ x_3 = P_3 \cos \alpha_3 \ldots.$$
$$y_1 = P_1 \sin \alpha_1;\ y_2 = P_2 \sin \alpha_2;\ y_3 = P_3 \sin \alpha_3 \ldots.$$

so geben diese unmittelbar aus den Winkelfunktionen des cos und sin in den verschiedenen Quadrantenlagen, den positiven oder negativen Wert der Kräftekomponenten.

Mit obigen Gleichungen gleichlautend folgt dann

$$(40)\quad \begin{cases} X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots\ldots = \Sigma P \cos \alpha \\ Y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \ldots\ldots = \Sigma P \sin \alpha \end{cases}$$

$$(39a)\quad \ldots\ldots \quad R = \sqrt{(\Sigma P \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \sin \alpha)^2}.$$

Der Winkel, den die Resultierende R mit der Ausgangslinie OX bildet, findet sich aus

$$(41)\quad . \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\Sigma P \sin \alpha}{\Sigma P \cos \alpha}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{X}{R}.$$

Man übersieht leicht, dass das Verfahren, die Resultierende durch Rechnung zu bestimmen, langwieriger, aber wenn man sich die trig. Grundsätze der Winkelfunktionen klar gelegt hat, durchaus nicht verwickelt ist, wie aus dem folgenden Beispiele leicht ersehen werden kann.

**Beispiele. I.** Es sei $P_1 = 60$; $P_2 = 50$; $P_3 = 30$; $P_4 = 70$; $P_5 = 140$ Klg.; die zugehörigen Winkel seien $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 70°$, $\alpha_3 = 135° 30$, $\alpha_4 = 260°$, $\alpha_5 = 310° 50'$.

Die horizontalen Komposanten sind der Reihe nach:

$$x_1 = P_1 \cos \alpha_1 = 60 \cdot \cos 30 = + 60 \cdot 0{,}866 = + 51{,}96$$
$$x_2 = P_2 \cos \alpha_2 = 50 \cdot \cos 70 = + 50 \cdot 0{,}342 = + 17{,}10$$
$$x_3 = P_3 \cos \alpha_3 = 30 \cos 135° 30' = - 30 \cos (180 - 135° 30)$$
$$= - 30 \cdot 0{,}713 = - 21{,}39$$
$$x_4 = P_4 \cos \alpha_4 = 70 \cos 260° = - 70 \cos (260 - 180)$$
$$= - 70 \cos 80 = - 70 \cdot 0{,}174 = - 12{,}18$$
$$x_5 = P_5 \cos \alpha_5 = 140 \cos 310° 50' = + 140 \cos (360 - 310° 50')$$
$$= + 140 \cos 49° 10' = + 140 \cdot 0{,}654 = + 91{,}56.$$

Die vertikalen Komponenten sind

$$y_1 = P_1 \sin \alpha_1 = 60 \cdot \sin 30 = + 60 \cdot 0{,}5 = + 30{,}00$$
$$y_2 = P_2 \sin \alpha_2 = 50 \sin 70 = + 50 \cdot 0{,}940 = + 47{,}00$$
$$y_3 = P_3 \sin \alpha_3 = 30 \sin 135° 30' = + 30 \cdot \sin 44° 30$$
$$= + 30 \cdot 0{,}701 = 21{,}03$$
$$y_4 = P_4 \sin \alpha_4 = 70 \sin 260° = - 70 \cdot \sin 80° = - 70 \cdot 0{,}985$$
$$= - 68{,}95$$
$$y_5 = P_5 \sin \alpha_5 = 140 \cdot \sin 310° 50' = 140 \sin 49° 10$$
$$= - 140 \cdot 0{,}757 = - 105{,}98.$$

Die algebraischen Summen sind

$$X = \Sigma P \cos \alpha = 51{,}96 + 17{,}10 - 21{,}39 - 12{,}18 + 91{,}56$$
$$= + 127{,}05 \text{ Klg.}$$
$$Y = \Sigma P \sin \alpha = 30 + 47{,}00 + 21{,}03 - 68{,}95 - 105{,}98$$
$$= - 76{,}90 \text{ Klg.}$$

Die endgültige Resultierende ist nach (39)

$$R = \sqrt{127{,}05^2 + 76{,}90^2} = 149 \text{ Klg.};$$

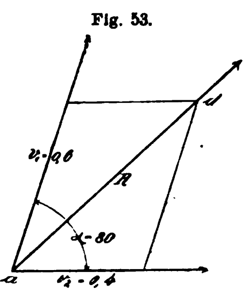
der zugehörige Winkel $\alpha$ ist nach

$$\text{tg. } \alpha = -\frac{76{,}90}{127{,}05} = -0{,}605;\ \alpha = 31^\circ\ 10'.$$

Die Resultante liegt im 4. Quadranten, und zwar um $\alpha_1 + \alpha = 30^\circ + 31^\circ\ 10'$ d. sind $61^\circ\ 10'$ von der ersten Kraft $P_1$ entfernt.

Das Kräftepolygon der Figur 51 giebt auch thatächlich den Polygonschluss und begründet durch Zeichnung das gefundene Rechnungsresultat.

Fig. 53.




**II.** Ein Fluss fliesst mit $v_2 = v{,}4^m$ Geschwindigkeit, ein Schwimmer sucht unter einem Winkel $\alpha = 80^\circ$ denselben zu überschwimmen und zwar mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}6^m$, wie gross ist die Resultierende R, mit welcher er von a in d anlangt?

Gl. 37 liefert uns

$$R = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cos 80} = 0{,}995^m.$$

Also mit fast $1^m$ Geschwindigkeit gelangt der Schwimmer unterstützt von der Gewalt des Wassers neben seiner eigenen Kraft in d an.

Fig. 54.

**III.** Die Resultierende $R = 1000$ bildet mit den Teilkräften $P_2 = 600$ Klg. und $P_1 = 500$ Klg. einen gewissen Winkel $\alpha$, wie gross ist derselbe?

Quadriert man Gl. 37 a, dann folgt

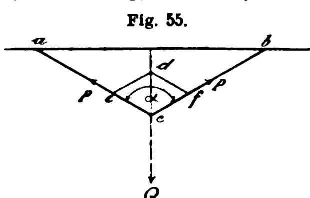
$$P_1{}^2 = R^2 + P_2{}^2 - 2\,RP_2 \cos \alpha,$$

hieraus

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + P_2 - P_1{}^2}{2\,RP_2} = \frac{1000^2 + 600^2 - 500^2}{2 \cdot 600 \cdot 500} = 0{,}925.$$

Die Cos-Tabelle zeigt auf $\alpha = 22^\circ\ 20'$. (S. Anhang, Tab. II).

Fig. 55.



**IV.** In der Hälfte eines Drahtes, welcher (Fig. 55) in a und b befestigt ist, hängt eine Last $Q = 80$ Klg., wie gross sind die Kräfte P in den beiden Drahthälften? Die beiden Kräfte P sind hier offenbar gleich gross ce und cf, Q ist die Resultante der-

selben. Vervollständigt man das Parallelogramm, dann ist, weil edcf ein Rhombus, nach dem Cosin-Satz

$$\overline{df}^2 = \overline{dc}^2 + \overline{cf}^2 - 2\,\overline{dc} \cdot \overline{cf} \cos \alpha/_2, \text{ oder}$$

$$P^2 = Q^2 + P^2 - 2\,PQ \cos \alpha/_2, \text{ hieraus findet man}$$

$$P = \frac{Q}{2 \cos \alpha/_2}.$$

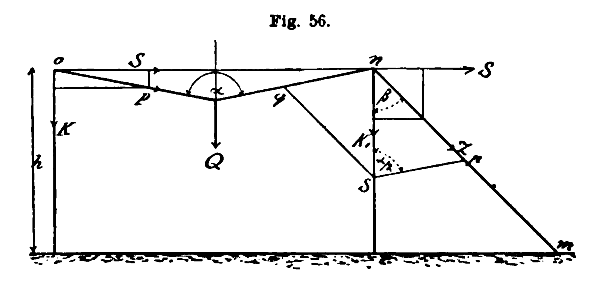
Nehmen wir $\alpha$ zu 76° an, dann ist

$$P = \frac{80}{2 \cos 38} = \frac{80}{1{,}576} = 51 \text{ Klg.}$$

Lässt man $\alpha$ immer kleiner werden, also rückt man die beiden Drahtenden a und b näher bis sie sich endlich berühren, so kann man $\alpha = 0$ annehmen, es wird dann $\cos \alpha/_2 = 1$ und $P = \frac{Q}{2}$; d. h. in einer senkrecht hängenden Schlinge hat jedes Drahtende die Hälfte der Last als Zugkraft zu tragen. Versucht man andererseits den Draht horizontal zu spannen und hängt die Last in die Mitte, so würde $\alpha = 180$, folglich weil $\cos \alpha/_2 = \cos 90° = 0$, $P = \frac{Q}{0} = \infty$; hiernach würde eine unendliche Kraft erforderlich sein, um einen Draht in horizontaler Spannung zu erhalten, denn selbst wenn der Draht keine Last zu halten hat, so hat er immerhin sein Eigengewicht zu tragen, eine Zugkraft Q ist, wenn auch noch so klein, doch immerhin vorhanden. Ein Draht, Schnur oder Kette lässt sich also nie, in eine gerade Linie gestreckt, an 2 Punkten aufhängen.

Ist der Draht (Fig. 56) zwischen 2 Stangen aufgespannt, an der einen bei o fest, an der anderen Stange durch mn gehalten, dann findet

Fig. 56.




man die Bedingungen, unter denen die Stangen senkrecht stehen müssen, wenn wir bei n und o eine Zerlegung der Kräfte vornehmen. Die Last Q mag wieder in der Mitte hängen. Die Zerlegung der Kraft P bei o führt zu den Teilkräften K und S, von denen die horizontale S am

Hebelarm h die Stange abbrechen, die vertikale K die Stange zerknicken will.

Aus den rechtwinkeligen Dreiecken bei O folgt

$$\frac{S}{P} = \cos(90 - \alpha/_2) = \sin \alpha/_2 \text{ und}$$

$$\frac{K}{P} = \sin(90 - \alpha/_2) = \cos \alpha/_2.$$

Behalten wir $\alpha = 76°$ und $P = 51$ Kg bei, dann wird

$$S = 51 \cdot \sin 38 = 51 \cdot 0{,}616 = 31{,}4 \text{ Klg.}$$
$$K = 51 \cdot \cos 38 = 51 \cdot 0{,}788 = 40{,}2 \quad \text{„}$$

Hat die Stange die Höhe $h = 5^m$, dann muss ihr Fuss dem Moment $M = hS = 31{,}4 \cdot 5 = 157$ Klgmeter Widerstand leisten, während sie gleichzeitig den senkrechten Druck von 40,2 Klg. aushalten muss.

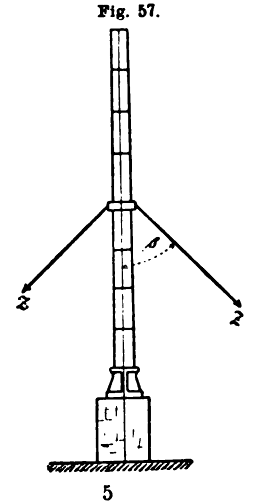
Um die Kraft Z im Spanndraht mn zu ermitteln, zerlegen wir, wenn $\beta = 40°$ der Neigungswinkel von mn ist, die Kraft Z in S und $K^1$. S hat den gleichen Wert wie oben, $K_1$ wird offenbar grösser wie K.

Es ist $\frac{S}{Z} = \sin \beta$ und

$$Z = \frac{S}{\sin \beta} = \frac{31{,}4}{0{,}643} = 49 \text{ Klg.}$$

Z nähert sich um so mehr der horizontal wirkenden Zugkraft S, je grösser $\beta$ wird; denn für $\beta = 90°$ würde $Z = S$; umgekehrt folgt aber auch, dass je kleiner $\beta$, eine um so grössere Gewalt in Anwendung kommen muss, der Zugkraft S, bezw. der Kraft P im hängenden Draht das Gleichgewicht zu halten, für $\beta = 0°$ wird $Z = \infty$. Eine senkrechte Stange oder beispielsweise ein Schornstein wird sich um so günstiger vertikal erhalten lassen, wenn man (Fig. 57) die seitlichen Stangen möglichst weit vom Schornstein ab befestigt. Zu dem gleichen Resultate gelangt man aber auch, wenn man das Parallelogramm nqsp (Fig. 56) konstruiert, in welchem der Winkel $nsp = \alpha/_2$. Nach dem Sin-Satz verhält sich

Fig. 57.



$$np : \sin \alpha/_2 = nq\ (sp) : \sin \beta \text{ oder}$$

$$Z : \sin \alpha/_2 = P; \sin \beta, \text{ hieraus folgt}$$

$$Z = P \frac{\sin \alpha/_2}{\sin \beta} = 51 \frac{0{,}616}{0{,}643} = 49 \text{ Klg.}$$

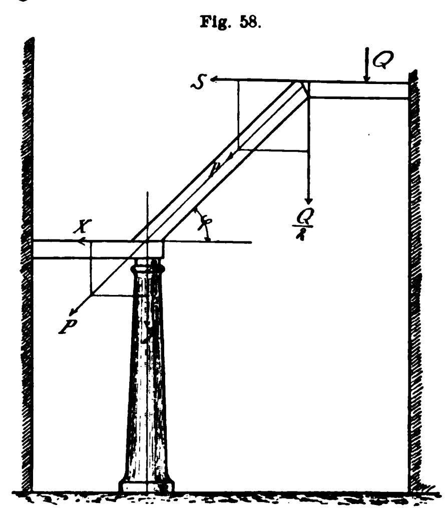
Die Druckkraft $K_1$ folgt aus

$$K_1 : \sin[180 - (\alpha/_2 + \beta)] = P : \sin\beta, \text{ oder}$$

$$K_1 = P \frac{\sin(\alpha/_2 + \beta)}{\sin\beta} = 51 \frac{\sin 78}{\sin 40} = 77{,}6 \text{ Klg.}$$

**V.** Auf einer Säule stützt sich eine Treppe, deren Potest mit Q = 5000 Klg. belastet sein soll. Der Treppenwinkel sei $\varphi = 36°$, wie ist die Kräfteverteilung?

Fig. 58.




Die Hälfte der Last Q, nämlich 2500 Klg., wirken senkrecht auf den Endpunkt der Treppe. Betrachten wir diese Kraft als Komponente der in der Richtung der Treppe laufenden Kraft P, dann ist

$$\frac{Q}{2} = P \sin\varphi, \text{ hieraus } P = \frac{Q}{2\sin\varphi} = \frac{2500}{2 \cdot 0{,}588} = 4252 \text{ Klg.}$$

Die Zugkraft S, welche das Treppenpotest aus der Mauer herauszuziehen strebt, ist zu berechnen aus $\frac{S}{Q/2} = \operatorname{cotg}\varphi$, nämlich $S = Q/_2 \operatorname{cotg}\varphi = 2500 \cdot 1{,}376 = 3440$ Klg. Es pflanzt sich nun der Druck P durch die Treppe hindurch fort bis auf den Säulenkopf, dort zerlegen wir P in Y und X, selbstredend wieder rechtwinkelig.

Es folgt dann

$Y = P \sin\varphi$ und $X = P \cos\varphi$, oder die Zahlen eingesetzt,

$Y = 4252, \sin 36 = 4252 \cdot 0{,}588 = 2500$ Klg.

$X = 4252 \cos 36 = 4252 \cdot 0{,}809 = 3440$ Klg.

Führt man $P = \frac{Q}{2 \sin \varphi}$ in Y und X ein, dann erhält man

$$Y = \frac{Q}{2 \sin \varphi} \sin \varphi = \frac{Q}{2} \text{ und } X = \frac{Q}{2 \sin \varphi} \cos \varphi = \frac{Q}{2} \operatorname{cotg} \varphi = S$$

wie oben.

Aus dieser Kräfteverteilung ersehen wir, dass sich die Druckkraft $Q/_2$ durch die Treppe bis auf den Fuss der Säule fortpflanzt, und dass die rechte Wand dieselbe Zugkraft S wie die linke Druckkraft X aushalten muss.

**VI.** Eine lose aufgehängte Rolle wird rechtwinkelig von den gleichen Kräften P = 400 Klg. angespannt, wie gross ist der Achsendruck, die Resultierende R? Nach Gl. 36, folgt

Fig. 59.

$$R = \sqrt{P^2 + P^2} = P \sqrt{2} = 1{,}414 \cdot 400 = 565{,}6 \text{ Klg.}$$

Würden beide Kräfte P unter einem Winkel von 60° auf die Achse einwirken, dann käme Gl. 37 in Betracht, in welcher wir $P_1 = P_2$ setzen. Es wird

$$R = \sqrt{2 P^2 + 2 P^2 \cos \alpha} = P \sqrt{2 (1 + \cos \alpha)}$$
$$= 400 \sqrt{2 (1 + 0{,}5)} = 693 \text{ Klg.}$$

Für $\alpha = o$ wird $R = 2 P$, wenn $\alpha = 180°$ wird $R = o$, dann hat die Rolle keinen Druck auszuhalten, dient nur zur Leitung.

**VII.** Der hohle Körper a vom Gewicht Q lässt sich an der Stange bc auf- und abschieben, wie gross ist eine unter einem Winkel $\alpha$ wirkende Zugkraft P? P zerlegt sich in eine horizontale Komponente p und in die vertikale, welche dem Gewicht Q gleich und entgegengesetzt ist.

Fig. 60.

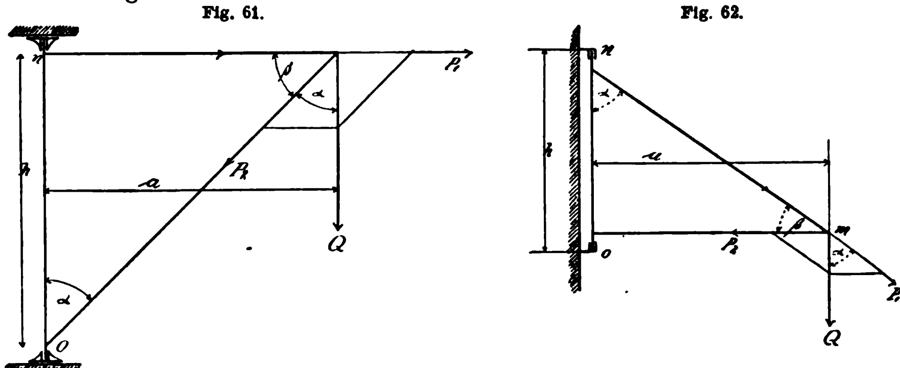
Es ist $\frac{Q}{P} = \cos \alpha$, hieraus

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

Für $\alpha = o°$ wird natürlich $P = Q$; hingegen für $\alpha = 90°$ wird $P = p = \infty$; durch eine horizontal wirkende Zugkraft ist es unmöglich das Gewicht hoch zu ziehen.

**VIII.** Die folgenden Figuren (Fig. 61 bis 66) stellen Krahngerüste dar; es handelt sich für uns zunächst um die Verteilung der Kräfte $P_1$, $P_2$ in den Lastknotenpunkten, wenn Q die dort senkrecht wirkende Zugkraft ist, welche sich aus der Last und dem Eigengewicht des Krahnes zusammensetzt.

Es sei Fig. 61, 62 die Höhe $h = 5^m$, $a = 4{,}2$ Ausladung, $Q = 2000$ Klg.




Zunächst wird $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h} = \frac{4{,}2}{5{,}0} = 0{,}84$, $\alpha = 50°$, sonach

$$\beta = 90 - \alpha = 40°.$$

$P_1$ wirkt als Zugkraft, die Strebe lässt sich also durch eine Kette oder Zugstange ersetzen; die Strebe der Kraft $P_2$ muss aber steif sein, weil in ihr eine Druckkraft wirkt, die sie zu zerknicken droht. Betrachtet man Q als Resultante der beiden Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$, wie die Zerlegung in den Figuren andeuten soll, dann findet man aus Fig. 61

$$\frac{Q}{P_2} = \cos\alpha \text{ und } \frac{P_1}{Q} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ somit}$$

$$\text{(a)} \quad . \; . \; . \quad P_2 = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{2000}{\cos 50} = \frac{2000}{0{,}643} = 3110 \text{ Klg.}$$

$$\text{(b)} \quad . \; . \; . \quad P_1 = Q \operatorname{tg}\alpha = \frac{Q}{\operatorname{tg}\beta} = 2000 \cdot 1{,}192 = 2384 \text{ Kg.}$$

Aus der Zerlegung in Fig. 62 ergiebt sich

$$\frac{Q}{P_1} = \cos\alpha \text{ und } \frac{P_2}{Q} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ somit}$$

$$\text{(c)} \quad . \; . \; . \quad P_1 = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = 3110 \text{ Klg.}$$

$$\text{(d)} \quad . \; . \; . \quad P_2 = Q \operatorname{tg}\alpha = Q \operatorname{cotg}\beta = 2584 \text{ Klg.}$$

Die Verteilung von Druck und Zug ist hier also umgekehrt, wie in Fig. 61; die vorstehenden Formeln würden paarweise identisch, $P_2 = Q \operatorname{tg}\alpha$ und $P_1 = \frac{Q}{\cos\alpha}$, wenn man die Bezeichnungen der Kräfte in den Streben Fig. 61 umkehren würde.

Fassen wir, wie in den Figuren 63 bis 65 geschehen, die Krahnstreben unter beliebigen Winkeln zusammen, dann sind in diesen allge-

Fig. 63.

Fig. 64.

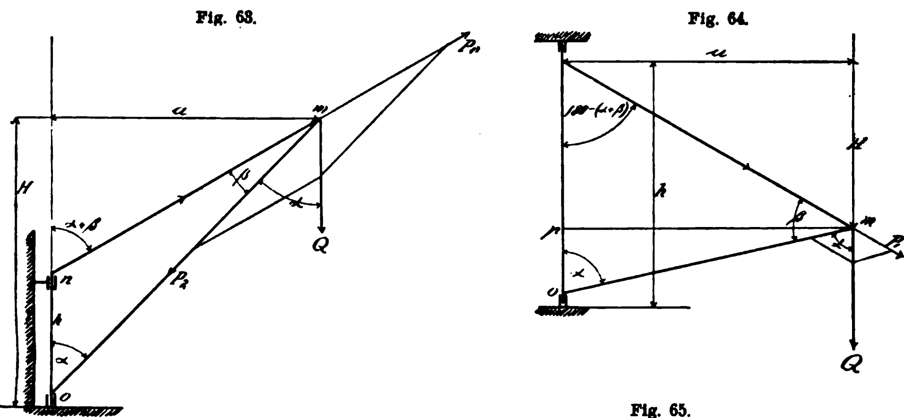
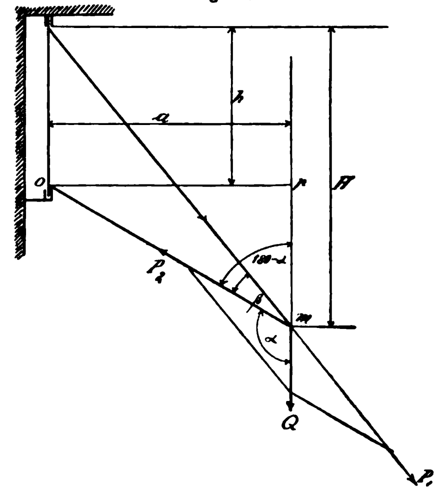


Fig. 65.



meinen Fällen die obigen enthalten. Wird die Strebe der Kraft $P_1$ horizontal, dann resultiert der Fall Fig. 61, liegt die Druckstrebe $P_2$ horizontal, dann erhält man den Fall Fig. 62. Die Verteilung der Kräfte ist aus den Parallelogrammen, in denen Q Resultierende, leicht zu ersehen. $\alpha$ ist der Winkel, den Q mit $P_2$, und $\beta$ der, den $P_2$ mit $P_1$ bildet. Aus den beiden Dreiecken (Fig. 63) pnm und opm findet man die Winkel $\alpha$ und $\beta$, nämlich

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{a}{H},\ \text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{a}{H - h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Im zweiten Krahngerüst ist

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{a}{h - H} \text{ und } \text{tg}\,[180 - (\alpha + \beta)] = \frac{a}{H} \quad . \quad . \quad (f)$$

Die Winkel im 3. Krahngerüst ergeben sich aus den Gleichungen

$$\text{tg}\,(180 - \alpha) = \frac{a}{H - h} \text{ und } \text{tg}\,[180 - (\alpha + \beta)] = \frac{a}{H}. \quad . \quad (g)$$

Für alle 3 Krahngerüste kann man jetzt den Sin-Satz in Anwendung bringen, um $P_1$ und $P_2$, weil der Winkel $\alpha$ und $\beta$ bekannt, zu berechnen.

Aus den Proportionen

$P_1 : \sin\alpha = Q : \sin\beta$ und $P_2 : \sin[180 - (\alpha + \beta)] = Q : \sin\beta$

ergiebt sich

(h) . . . . . . . $P_1 = Q \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ und

(i) . . . . . . . $P_2 = Q \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

Setzt man $\alpha = 90°$ bezw. $\beta = 90 - \alpha$, dann erhält man wieder obige Gleichungen, da die Krahngerüste (Fig. 61, 62) wie gesagt nur besondere Fälle der letzteren sind.

Man erhält, wenn der Winkel $\alpha$ (Fig. 64, 65) in 90° übergeht

$$P_1 = \frac{Q \sin 90}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{Q}{\cos\alpha}, \text{ Gl. (c).}$$

$$P_2 = Q \frac{\sin(90+\beta)}{\sin\beta} = Q \operatorname{cotg}\beta = Q \operatorname{tg}\alpha, \text{ Gl. (d).}$$

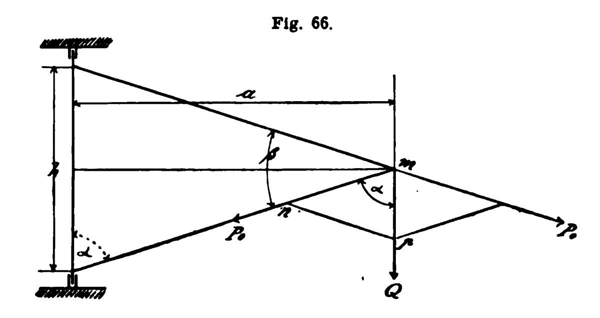
Setzt man in (h) und (i) $\beta = 90 - \alpha$, oder $\alpha = 90 - \beta$, dann wird, wie Gl. a und b

$$P_1 = Q \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)} = Q \operatorname{tg}\alpha = \frac{Q}{\operatorname{tg}\beta}, \text{ Gl. (b).}$$

$$P_2 = Q \frac{\sin(\alpha + 90 - \alpha)}{\sin(90-\alpha)} = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta}, \text{ Gl. (a).}$$

Aus der Figur 64 lässt sich noch der besondere Fall ableiten, für welchen $H = \frac{1}{2}$ h, wie aus beistehender Figur ersichtlich.

Fig. 66.



Setzt man in (f) $H = \frac{1}{2}$ h, dann folgt

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{h - h/2} = \frac{2a}{h};$$

$\beta$ ergiebt sich aus

($f_1$) . . . . . . . . $\beta = 180 - 2\alpha$.

Beide Winkel in (h) und (i) eingeführt, findet man

$$P_1 = Q \frac{\sin\alpha}{\sin(180 - 2\alpha)} = Q \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = Q \frac{\sin\alpha}{2 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{Q}{2\cos\alpha}$$

$$P_2 = Q \frac{\sin(\alpha + 180 - 2\alpha)}{\sin(180 - 2\alpha)} = \frac{Q}{2\cos\alpha};$$

Die Kräfte in beiden Streben werden also gleich gross

$$P_1 = P_2 = P_0 = \frac{Q}{2\cos\alpha}. \quad \ldots\ldots \quad (i_1)$$

Setzen wir, wie im Beispiel 4, infolge der Symmetrie eine gleichmässige Verteilung der Kräfte voraus, dann folgt auch nach dem Cos-Satz,

$$\overline{np}^2 = \overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - 2\,\overline{mn} \cdot mp \cos\alpha \text{ oder}$$
$$P_0{}^2 = Q^2 + P_0{}^2 - 2\,P_0\,Q \cos\alpha, \text{ hieraus wieder}$$
$$P_0 = \frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

Nehmen wir als Beispiel wieder $Q = 2000$ Klg. und (Fig. 63 u. 65)

$H = 5^m$, $h = 3^m$, $a = 4{,}2^m$.

Nach Gl. (c) sind für den Fall Fig. 63 die Winkel

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{H} = \frac{4{,}2}{5} = 0{,}84, \quad \alpha = 40°.$$

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{a}{H - h} = \frac{4{,}2}{5 - 3} = 2{,}1, \quad \alpha + \beta = 62°\,30', \text{ also } \beta =$$
$24°\,30'$.

Die Kräfte sind nach Gl. h, i:

$$P_1 = Q \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2000 \frac{\sin 40}{\sin 24°\,30} = 2000 \frac{0{,}643}{0{,}415} = 3100 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = Q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} = 2000 \frac{\sin 64°\,30}{0{,}415} = 2000 \frac{0{,}903}{0{,}415} = 4350 \text{ Klg.}$$

Die Berechnung der Winkel in Fig. 65 erfolgt nach Gl. g. Man erhält

$$\operatorname{tang}(180 - \alpha) = \frac{a}{H - h} = \frac{4{,}2}{5 - 3} = 2{,}1; \quad 180 - \alpha = 64°\,30,$$

somit ist hier $\alpha = 115°\,30$; ferner wird

$$\operatorname{tang}[180 - (\alpha + \beta)] = \frac{a}{H} = 0{,}84; \quad 180 - (\alpha + \beta) = 40°$$

gesetzt, findet man $\beta = 24°\,30'$.

Beide Winkel müssen, da die Lage des Krahnes nur als eine symmetrische Figur gegenüber der eben berechneten aufzufassen ist, mit dem

obigen übereinstimmen. Auch die Kräfte sind, entgegengesetzt, dieselben. Man findet

$$P_1 = Q\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2000\frac{\sin 115^\circ\,30}{\sin 24^\circ\,30} = 4350 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = 2000\frac{\sin 140}{\sin 24\,30^\circ} = 2000\frac{\cos 50}{0{,}415} = 3100 \text{ Klg.}$$

Nehmen wir für das Krahngerüst Fig. 64, um möglichst dieselben Verhältnisse beizubehalten $h = 5^m$, $H = 3^m$ und $a = 4{,}2^m$ Ausladung. Dann sind die Winkel nach Gl. (f) wieder aus

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{h - H} = \frac{4{,}2}{5 - 3} = 2{,}1, \quad \alpha = 64^\circ\,30' \text{ und aus}$$

$$\operatorname{tang}[180 - (\alpha + \beta)] = \frac{a}{H} = \frac{4{,}2}{5} = 0{,}84, \quad \alpha + \beta = 140^\circ,$$

somit $\beta = 75^\circ\,30'$.

Die Verteilung der Kräfte ist hier nach (h), (i):

$$P_1 = 2000\frac{\sin 64^\circ\,30}{\sin 75^\circ\,30} = 1866 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = 2000\frac{\sin 140}{\sin\beta} = \frac{2000\cdot 0{,}643}{0{,}968} = 1330.$$

Für den besonderen Fall Fig. 66 sei wieder $Q = 2000$, $h = 5^m$, $a = 4{,}2^m$, dann ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2a}{h} = 1{,}68$$

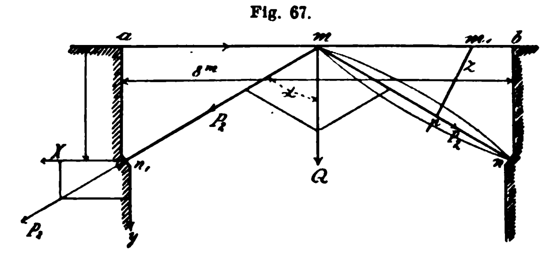
$\alpha = 59^\circ\,20'$, $\cos\alpha = 0{,}51$, demnach

$$P_0 = \frac{Q}{2\cos\alpha} = \frac{2000}{2\cdot 0{,}501} = 1960 \text{ Klg.}$$

die Kraft in beiden Streben.

**IX.** In beistehendem Sprengwerk sei der horizontale Träger ab in der Mitte unterstützt, abgesprengt durch die Streben mn und $mn_1$, die

Fig. 67.




in m wirkende Zugkraft Q verteilt sich mit der Kraft $P_2$ je nach n und nach $n_1$; wie gross ist $P_2$ und die Kräfte X, Y, Seitenschub und vertikaler Druck, in welche sich $P_2$ zerlegt?

Wendet man, wie in Fig. 55, Beispiel 4, geschehen, den Cos-Satz an, dann erhält man

$$P_2 = \frac{Q}{2 \cos \alpha} = \frac{10\,000}{2 \cos 53^\circ 10} = \frac{10\,0000}{2 \cdot 0{,}599} = 8347 \text{ Klg.}$$

Es ist nämlich tang $\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}33\,333$, somit $\alpha = 53^\circ 10'$.

Teilt man das Sprengwerk im Knotenpunkt m und betrachtet jede Hälfte als Krahngerüst mit der Last $Q/2 = 5000$ Klg., dann erhält man, wenn man die gleiche Zerlegung, wie in Fig. 61 vorgenommen denkt, die Formeln (a) und (b) S. 68, nämlich

$$P_1 = 5000 \text{ tg } 53^\circ 10 = 6670 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = \frac{5000}{\cos 53^\circ 10} = 8347 \text{ Klg, wie oben.}$$

Die Kraft $P_2$ bewirkt, wie schon angedeutet, einen Seiten- und einen vertikalen Druck, welche sich aus den Formeln ergeben.

$$\frac{X}{P_2} = \sin \alpha \text{ und } \frac{Y}{P_2} = \cos \alpha; \text{ und zwar}$$

$$X = P \sin \alpha = 8347 \cdot \sin 53^\circ 10 = 6670 \text{ Klg.}$$

$$Y = P \cos \alpha = 8347 \cos 53^\circ 10 = 5000 \text{ Klg.}$$

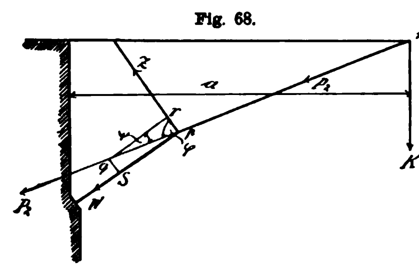
Die gleiche Verteilung der Kräfte ist uns bereits aus Beispiel 5, Fig. 58, bekannt. Der vertikale Druck Q verteilt sich zu gleichen Teilen auf das Fundament und die Zugkraft $P_1$ ist dem Seitenschub X gleich.

Tritt der Fall ein, dass die Strebe mn zu schwach ausgeführt werden würde, oder schwächer ausgeführt werden müsste, als es die Rechnung, um der Druckkraft $P_2$ Widerstand zu leisten, zuliesse, dann wäre eine Ausbiegung nach der einen oder anderen Seite, wie die gebogenen Linien auf der rechten Seite der Figur andeuten, unvermeidlich. Man setzt zur Verstärkung eine Zange z ein, welche die Biegung (Knickung) verhindern soll, dadurch entsteht bei p ein neuer Knotenpunkt und ist das Zerknickungsvermögen der Strebe auf die halbe Länge oder einen Teil vermindert. Die Richtung der Ausbiegung ist bei quadratischem Querschnitt mehr dem Zufall anheimgestellt, hängt aber von der inneren Beschaffenheit des Materiales, von der Form des Querschnittes und von der Lage der Strebe mn ab; um allem vorzubeugen, auch wenn die Last in $m_1$ wirkt, nehmen wir eine steife Zange an in diesem Fall, weil deren Dimensionen gewöhnlich so stark sind, dass sie ohne Kontrollrechnung derselben Druckkraft als Zugkraft Widerstand leisten können.

Setzen wir, wie in Fig. 68 angegeben, eine Zerknickung voraus und versuchen die Kraft z durch Zerlegung von $P_2$ im Knotenpunkt p zu be-

stimmen, dann teilt sich $P_2$ wie aus dem eingezeichneten Parallelogramm ersichtlich, in W und Z. Da diese Zerlegung auch einem Krahngerüst angehören kann, wollen wir die in m wirkende Zugkraft K nennen; für obiges Sprengwerk würde $K = Q/2$.

Fig. 68.




Nach dem Cos-Satz ist

$$W^2 = Z^2 + P_2{}^2 - 2\,Z P_2 \cos\varphi.$$

Für $\varphi = 90°$ wird, weil $P_2$ mit W zusammenfällt, wie in Fig. 67

$$P_2 = Z^2 + P_1{}^2 \text{ oder } Z = 0.$$

Ist Z rechtwinkelig auf die Richtung der Kraft W, dann wird pqr ein rechtwinkeliges Dreieck und es folgt

(k) . . . . . $W = P_2 \sin\varphi;\ Z = P_2 \cos\varphi.$

Bezeichnet man den Winkel bei q mit $\psi$, dann ergiebt sich nach dem Sin-Satz

$$W : \sin\varphi = Z : \sin\psi = P_2 : \sin\,[180 - (\varphi + \psi)] = P_2;\ \sin(\varphi + \psi),$$

hieraus folgt

(l) . . . $W = P_2 \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \psi)},\ Z = P_2 \dfrac{\sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)}.$

Für $\psi = 90 - \varphi$ folgen wieder die Gl. (k).

Nehmen wir $a = 4^m$ Ausladung, $K = 5000$ Klg., dann wird

$$P_2 = 8347 \text{ Klg. (S. 73).}$$

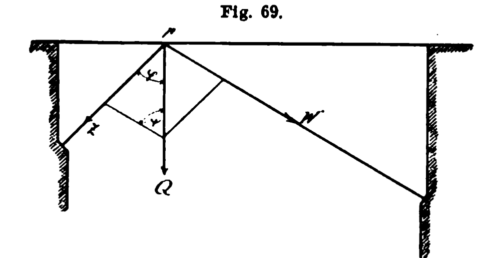
Aus der Figur entnehmen wir $\varphi = 50°$, $\varphi = 15°$, dann folgt

$$W = 8347 \frac{\sin 50°}{\sin 65°} = 8347 \frac{0{,}766}{0{,}906} = 7000 \text{ Klg.}$$

$$Z = 8347 \frac{\sin 15°}{\sin 65°} = 8347 \frac{0{,}259}{0{,}906} = 2360 \text{ Klg.}$$

Beides sind Druckkräfte, welche die Hölzer zu zerknicken streben.

Fig. 69.




Die in Fig. 68 gezeichnete Zerlegung kann auch für das Sprengwerk, Fig. 69, dienen. Nimmt man pq (Fig. 68) senkrecht wirkend an und setzt in (l) $P_2 = Q$, dann folgen die Druckkräfte der Streben für Fig. 69 aus

(m) . . . $W = Q \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \psi)};\ Z = Q \dfrac{\sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)}.$

Die Berechnung (Theorie) eines Hängewerkes ist ganz dieselbe, wie die des eben betrachteten (einfachen) Sprengwerkes. Die Konstruktion

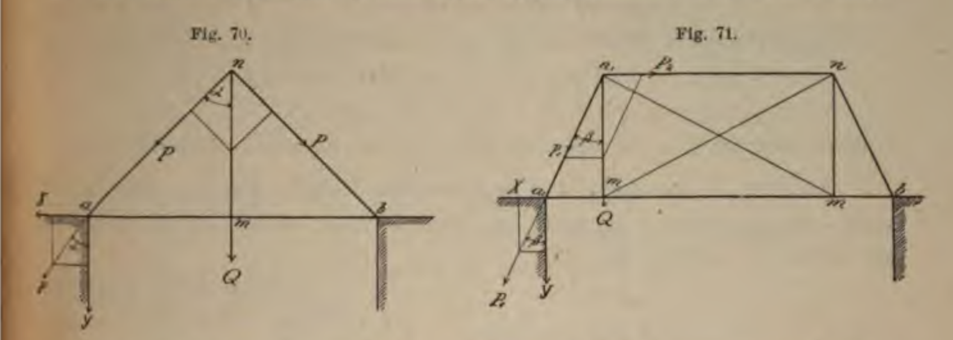


Fig. 70. Fig. 71.

ist aus obigen Figuren ersichtlich. Während beim Sprengwerk der horizontale mit der Kraft Q belastete Träger ab unterstützt ist, damit er am Durchbiegen (Brechen) verhindert werde, legt er sich beim Hängewerk in eine eiserne Kappe, welche an der Hängesäule mn befestigt ist, bewirkt dadurch eine Zugkraft in mn, die sich im Knotenpunkt n resp. $n_1$ durch eine Druckkraft auf die seitlichen schiefen Streben na, nb, $n_1a_1$ äussert, welche sich endgültig als Horizontalschub X und Vertikaldruck Y in den Widerlagern darstellt.

Fig. 71a.

Nach dem Cos-Satz folgt, Fig. 70,

$$P^2 = Q^2 + P^2 - 2\,PQ \cos \alpha \text{ und hieraus wieder}$$

$$P = \frac{Q}{2 \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

Die Zerlegung bei a ergiebt, wie beim Sprengwerk

$$x = P \sin \alpha,\ Y = P \cos \alpha. \quad \ldots\ldots \quad \text{(o)}$$

Für den Knotenpunkt $n_1$, Fig. 71, sind die Teilkräfte (s. Fig. 61, 62)

$$P_1 = \frac{Q}{\cos \beta} \text{ und } P_2 = Q \operatorname{tang} \beta. \quad \ldots\ldots \quad \text{(p)}$$

Während die Streben na, $n_1a_1$ Druckstreben, also steif sein müssen, da sie eventuell zerknickt werden durch die in ihnen wirkenden Kräfte, so sind, wie schon angedeutet mn, $m_1n_1$ Zugstangen, welche eventuell durch Ketten ersetzt werden können, da sie nicht steif zu sein brauchen.

Das Hängewerk, Fig. 70, sei belastet mit Q = 3000 Klg., die Spannweite ab sei $6^m$, die Höhe mn = $3{,}5^m$; dann ist zunächst

$$\frac{mn}{am} = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{3{,}5}{3} = 1{,}1{,}67, \text{ somit } \alpha = 49^\circ\, 20'.$$

Ferner sind die Kräfte

$$P = \frac{Q}{2 \cdot \cos 49^\circ 20'} = \frac{3000}{2 \cdot 0{,}652} = 2300 \text{ Klg.},$$

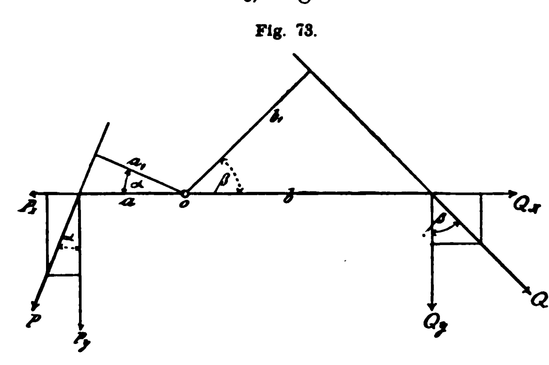
$$X = P \sin \alpha = 2300 \cdot \sin 49^\circ 20' = 2300 \cdot 0{,}759 = 1750 \text{ Klg.},$$

$$Y = P \cos \alpha = 2300 \cos 49^\circ 20' = 2300 \cdot 0{,}652 = 1500 \text{ Klg.}$$

## Anwendung der Zerlegung der Kräfte auf das Hebelgesetz.

An den Endpunkten des beistehenden Hebels, welcher sich um o dreht und gewichtslos gedacht ist, wirken unter den Winkeln $\alpha$ und $\beta$ die Kräfte P und Q, Fig. 72.

Fig. 73.



Verlängern wir die Richtungen der Kräfte und fällen die Senkrechten $a_1$ und $b_1$ von o aus auf dieselben, dann erhalten wir die Momente $Pa_1$ und $Qb_1$. Zerlegen wir P und Q in je eine horizontale und vertikale Seitenkraft, dann müssen die Momente $P_y a$ und $Q_y b$ sich das Gleichgewicht halten. Beide Momentengleichungen $P_y a = Q_y b$ und $Qb_1 = Pa_1$ sind aber identisch; denn es ist $a_1 = a \cos \alpha$, $b_1 = b \cos \beta$, ferner $P_y = P \cos \alpha$ und $Q_y = Q \cos \beta$, somit in die Momentengleichungen eingesetzt, schreiben sich beide

(42) . . . . . . . $$\mathbf{P a \cos \alpha = Q b \cos \beta.}$$

Die horizontalen Seitenkräfte

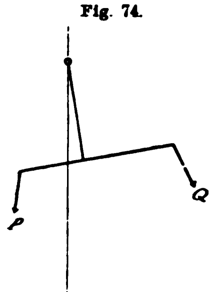
(43) . . . . $P_x = P \sin \alpha$ und $Q_x = Q \sin \beta$

ziehen in entgegengesetzten Richtungen am Drehpunkt o, die Differenz dieser beiden Kräfte,

(43a) . . . . $R = P_x - Q_x$

zieht den Hebel nach der einen oder anderen (überwiegenden) Richtung, welche Zugkraft der Drehpunkt selbstredend aushalten muss.

Fig. 74.



Hängt man einen solchen Hebel auf wie dies Fig. 73 andeuten soll, so dass er im Drehpunkt frei pendeln kann; wenn kein Gleichgewicht vorhanden, wird er sich schief hängen. Die Anziehungskraft der Erde, das Gewicht des Hebels selbst in Gemein-

schaft mit den Widerständen der Aufhängung verhindern eine vollständige Drehung.

**Beispiele. I.** Es sei $P = 12$, $Q = 22$ Klg., $a = 0,8$, $b = 1,2^m$, $\alpha = 15° 30'$; wie gross muss $\beta$ sein, damit Gleichgewicht stattfindet?

Aus Gl. 42 folgt

$$\cos\beta = \frac{P a \cos\alpha}{Q b} = \frac{12 \cdot 0,8 \cdot \cos 15° 30'}{22 \cdot 1,2} = 0,354, \text{ also}$$

$$\beta = 40° 20'.$$

Die Seitenkräfte sind nach Gl. (43)

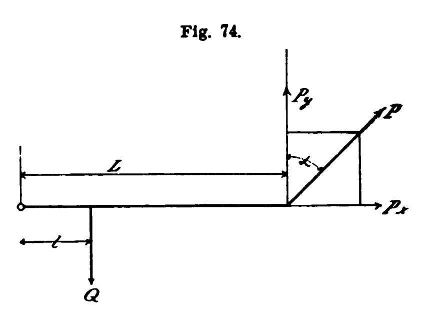
$$P_x = 12 \sin 15° 30' = P \sin\alpha = 12 \cdot 0,267 = 3,204 \text{ Klg.}$$

$$Q_x = Q \sin\beta = 22 \cdot \sin 40° 20' = 14,234 \text{ Klg.}$$

Mit der Differenzkraft

$$R = 14,234 - 3,204 = 11,03 \text{ Klg.}$$

wird der Hebel nach rechts gezogen.




**II.** Es soll eine Last Q, welche an einem einarmigen Hebel hängt, der sich um a drehen kann, in die Höhe gehoben werden, und zwar mit einer unter $\alpha = 32°$ wirkenden Kraft P am Ende des Hebels $L = 0,8^m$; Fig. 74.

Zerlegen wir die Kraft P in eine senkrechte $P_y$ und in eine horizontale $P_x$, so bildet erstere mit Q, L und l die Momentengleichung

$$Q l = P_y L;$$

die letztere $P_x$ aber zieht am Drehpunkt nach rechts.

Die Zerlegung liefert $P_y = P \cos\alpha$ und $P_x = P \sin\alpha$, folglich wird $P_y$ eingesetzt.

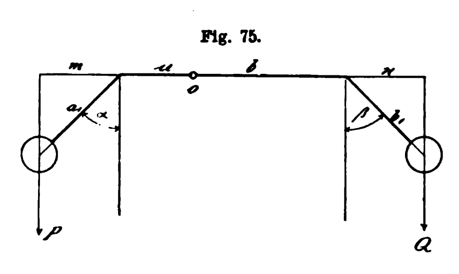
$$Q l = L P \cos\alpha, \text{ hieraus, wenn } l = 0,15,\ Q = 130,$$

$$P = Q \frac{l}{L \cos\alpha} = 130 \frac{0,15}{0,8 \cdot \cos 32°} = 130 \frac{0,15}{0,8 \cdot 0,848} = 29 \text{ Klg.}$$

Je senkrechter die Kraft P auf den Endpunkt des Hebels einwirkt, um so mehr nähert sich $\cos\alpha = \cos 90° = 1$; für $\alpha = 90°$ wurde $P = \infty$, weil $\cos 90° = o$, dann wäre es unmöglich, die Last Q zu heben.

Die Zugkraft $P_x = P \sin\alpha = 29 \cdot 0,53 = 15$ Klg. wirkt in Richtung des Hebels auf den Drehpunkt desselben.

**III.** Denkt man an den Endpunkten eines sich um o drehenden Hebels unter den Winkeln $\alpha$, $\beta$ zwei Gewichte wirken, die an den Stangen $a_1$


Fig. 75.

und $b_1$ befestigt sind, wie Fig. 75 zeigt, dann ist Gleichgewicht vorhanden, wenn

$$P(a + m) = Q(b + n).$$

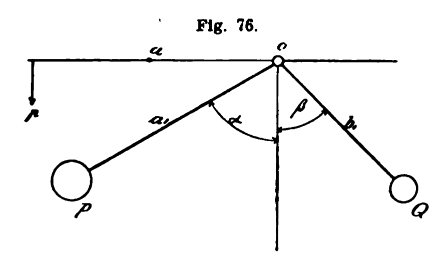
Hier wirken P und Q als Gewichte senkrecht nach unten, somit an den oben bemerkten Hebelarmen $a + m$ und $b + n$.

Da nun $m = a_1 \sin\alpha$ und $n = b_1 \sin\beta$, so ist die allgemeine Momentengleichung

(44) . . . . $P(a + a_1 \sin\alpha) = Q(b + b_1 \sin\beta)$.

Sind $\alpha$ und $\beta$ sehr klein oder $\alpha = \beta = 0$, dann wird $Pa = Qb$; sind beide Winkel 90°, so wird

(44a) . . . . . $P(a + a_1) = Q(b + b_1)$.


Fig. 76.

Sind $a = b = 0$, wie Fig. 76 andeutet, dann folgt zur Herstellung des Gleichgewichtes des um 0 sich drehenden Pendels

$P a_1 \sin\alpha = Q b \sin\beta$ oder

(44b) $P a_1 \sin\alpha - Q b \sin\beta = 0$.

Es sei z. B. $P = 60$, $Q = 85$ Klg., $\alpha_1 = 65°$, $\beta = 37°$, $a_1 = 3{,}5^m$, $b_1 = 5{,}1^m$, dann sind die beiden Momente

$P a_1 \sin\alpha = 60 \cdot 3{,}5 \cdot \sin 65° = 60 \cdot 3{,}5 \cdot 0{,}906 = 190$ Klgmeter.

$Q b_1 \sin\beta = 85 \cdot 5{,}1 \cdot \sin 37° = 85 \cdot 5{,}1 \cdot 0{,}602 = 261$ Klgmeter.

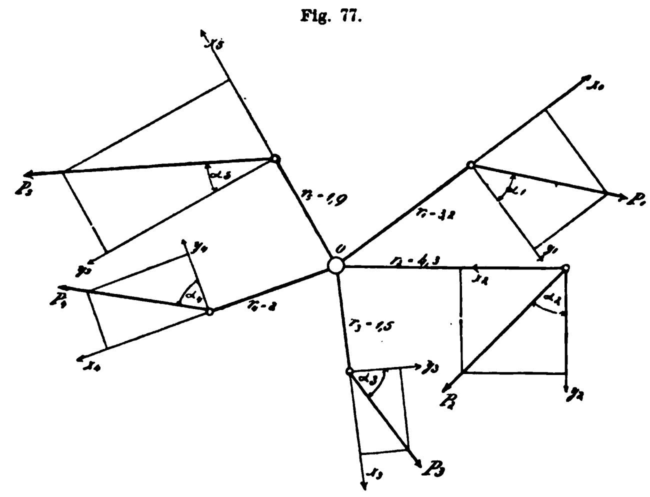
Das rechtsdrehende Moment ist also dem linksdrehenden überwiegend, zur Herstellung des Gleichgewichtes muss ein linksdrehendes Moment $261 - 190 = 71$ Klgmeter auf den Drehpunkt einwirken, das wären beispielsweise $p = 35$ Klg. am Hebelarm $a_0 = 2{,}01^m$.

Um einen Punkt O (Fig. 77) wirken an verschiedenen Hebelarmen und in verschiedenen Richtungen die Kräfte $P_1\, P_2\, P_3$ . . . . Für Herstellung des Gleichgewichtes müssen wir jede einzelne Kraft in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine x in der Richtung des Hebelarmes liegt, die andere senkrecht auf diesen steht, wir haben die letzteren mit y bezeichnet.

Sind die sämtlichen Kräfte x im Gleichgewicht, dann hat der Drehpunkt O keinen Druck auszuhalten, anderenfalls wirkt nach einer zu suchenden Richtung eine Resultante auf O. Wir haben in Fig. 78 die

Resultante auf graphischem Wege, wie in Fig. 47, 48 bestimmt, statt das Rechnungsverfahren Beispiel 1, Seite 62 einzuschlagen.

Fig. 77.



Bezeichnet man die Winkel der Reihe nach mit $\alpha_1$ $\alpha_2$ $\alpha_3$ u. s. w. den Kräften entsprechend, dann ist allgemein

$$\frac{x}{P} = \sin \alpha \text{ und } \frac{y}{P} = \cos \alpha.$$

Hat man sich die Kräfte und Winkel, wie in Fig. 77 geschehen, genau aufgetragen, dann kann man die Teilkräfte

$$x_1 = P_1 \cos \alpha_1,\; x_2 = P_2 \cos \alpha_2 \;\ldots\ldots$$
$$y_1 = P_1 \sin \alpha_1,\; y_2 = P_2 \sin \alpha_2 \;\ldots\ldots$$

Der Reihe nach aus den Parallelogrammen abgreifen mit einem Zirkel. Hier ist $1^{mm} = 158$ Klg.

Die Resultante der x Kräfte ist nach Fig. 78 $R_x = 1750$, ihre Richtung giebt die Figur.

Fig. 78.

Die Kräfte y sind mit ihren zugehörigen Hebelarmen

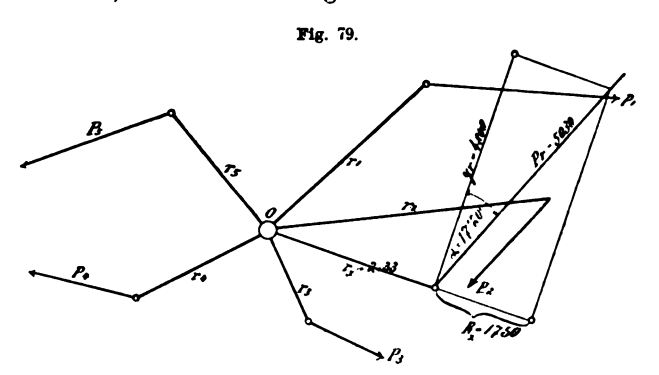
$y_1 = 2200$, $y_2 = 1400$, $y_3 = 850$, $y_4 = 2600$, $y_5 = 3100$ Klg.
$r = 3{,}2^m$, $r_2 = 4{,}3$, $r_3 = 1{,}9$, $r_4 = 2{,}0$, $r_5 = 1{,}5^m$.

Bildet man sich jetzt die Momentensumme, dann ist das resultierende Moment, die Rechts- und Linksdrehung berücksichtigt,

$$M_1 = 3{,}2 \cdot 2200 + 1400 \cdot 4{,}3 - 850 \cdot 1{,}9 + 2 \cdot 2600 - 1{,}5 \cdot 3100$$
$$= +\, 12\,000 \text{ Klgmeter.}$$

Eine Kraft von 4800 Klg. an einem Hebelarm von 2,33$^m$ wirkend und links drehend, stellt das Gleichgewicht her.

Fig. 79.



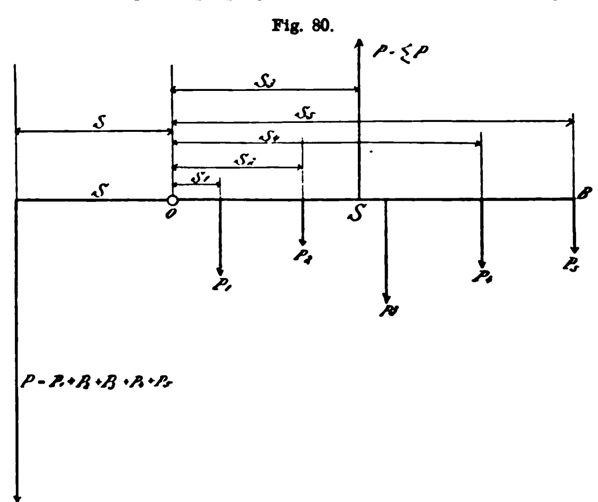
Trägt man endlich, wie in Fig. 79 geschehen, obige Resultante R und das letzte Moment $r_r = 2{,}33^m$, $y_r = 4800$ Klg. auf, dann findet man schliesslich $P_r = 5030$ und $\alpha_r = 17° 20'$.

---

## Der Schwerpunkt.

Denken wir uns eine gewichtslose Stange OB, Fig. 80, an welcher in gewissen Entfernungen $s_1$ $s_2$ $s_3$ .... von einem beliebigen in Richtung

Fig. 80.



der Stange liegenden Drehpunkt O die Kräfte oder Gewichte $P_1$ $P_2$ ... $P_5$ wirken, so wollen wir uns die Aufgabe stellen, einen Punkt S ausfindig

zu machen, in welchem wir entgegengesetzt, aber parallel zu den Kräften $P_1$ $P_2$ .... eine Kraft P anbringen müssen, welche der Grösse der Summe der sämtlichen Kräfte

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \Sigma P$$

gleichkommen soll, so dass die Stange im Gleichgewicht erhalten bleibt.

Bezeichnen wir SO mit s, dann können wir Ps als Moment betrachten, welches den Momenten $P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots$ das Gleichgewicht halten soll; die Schwerpunktsgleichung lautet sonach

$$sP = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdot + P_5 s_5 = \Sigma Ps,$$

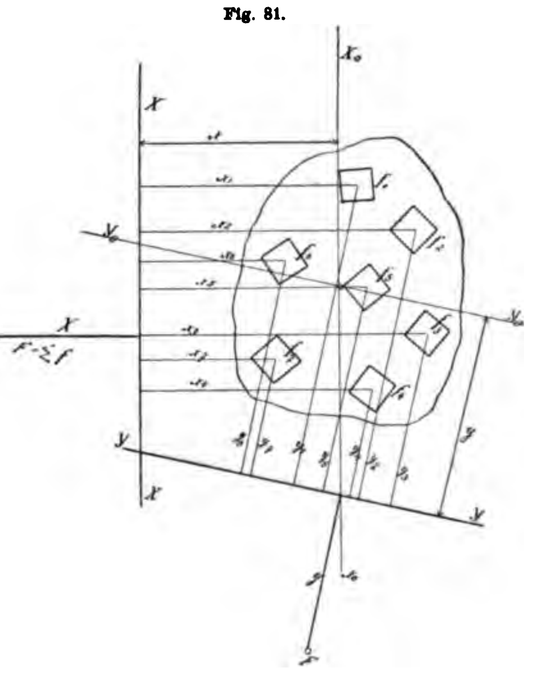
hieraus folgt die Schwerpunktsentfernung

$$s = \frac{P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots} = \frac{\Sigma Ps}{P} \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Man nennt S den Schwerpunkt oder den Angriffspunkt der Mittelkraft paralleler Kräfte.

S ist der Vereinigungspunkt der sämtlichen Gewichte; die Wirkung bleibt die gleiche, ob sich die verteilten Gewichte (oder Massen), oder ob sich die in S konzentriert gedachten Gewichte bewegen. —

Fig. 81.



Haben wir eine Fläche (Fig. 81) von beliebiger Gestalt vor uns und fragen nach der Lage des Schwerpunktes, so zerlegen wir dieselbe zunächst in ihre Elemente $f_1$ $f_2$ $f_3$ ...., so dass die ganze Fläche der Summe derselben gleich ist $F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots$

Hierauf nehmen wir zwei sich kreuzende Achsen an, XX, YY, auf welche wir die Schwerpunktsgleichungen beziehen. Sind $x_1$ $x_2$ $x_3$ .... die Entfernungen (am einfachsten die senkrechten) der Elemente von der X-Achse; $y_1\, y_2\, y_3$ .... die von der Y-Achse, x und y die Schwerpunkts-

entfernungen, an deren Enden F wirkt, dann tritt Gleichgewicht ein, wenn für die beiden Achsen die Gleichungen erfüllt werden,

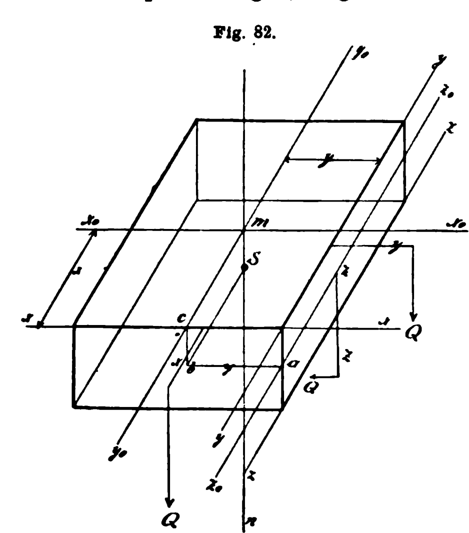
$$Fx = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots\ldots = \Sigma fx$$
$$Fy = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \ldots\ldots = \Sigma fy$$

Diese Gleichungen liefern die Entfernungen der sogenannten Schwerlinien von den angenommenen Drehungsachsen, deren Schnittpunkt der Schwerpunkt ist:

$$(45a) \quad \ldots \quad \begin{cases} x = \dfrac{f_1 \alpha_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots\ldots}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots} = \dfrac{\Sigma fx}{F} \\[2ex] y = \dfrac{f_1 y_1 + f_2 y_1 + f_3 y_3 + \ldots\ldots}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots} = \dfrac{\Sigma fy}{F} \end{cases}$$

Da die Flächenelemente sich auf der ganzen Fläche verteilen, so ist es naturgemäss, dass x und y keine Punktentfernungen, sondern Linienentfernungen darstellen müssen, in beiden Linien $x_0 x_0$, $y_0 y_0$ zugleich muss der Schwerpunkt liegen, folglich im Schnittpunkt S.

Fig. 82.



Bei einem Körper (Fig. 82) kommt noch die dritte Ausdehnung hinzu, folglich noch eine dritte Schwerpunktsgleichung.

Wie aus der Figur ersichtlich, haben wir einen regelmässigen Körper zu Grunde gelegt. Die Drehungsachsen liegen in den Kanten.

Wir teilen den Körper ein in Körperelemente $q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots$, welche bei gleichmässig verteilt gedachter Materie, Inhalte, aber besser Gewichte darstellen, so dass

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots = \Sigma q.$$

Sind nun xx, yy, zz die drei Achsen und x, y, z die drei zugehörenden Schwerpunktsentfernungen, so findet man zunächst durch den Schnitt m der beiden Schwerlinien $X_0 X_0$ und $Y_0 Y_0$, oder besser durch den Schnitt mn zweier durch $X_0 X_0$, $Y_0 Y_0$ gehenden senkrechten Ebenen die Schwerlinie mn. Letztere Linie wird durch die dritte Ebene, welche in der Entfernung z das Gleichgewicht um ZZ herstellt, horizontal durchschnitten und findet sich in S der Schwerpunkt.

Die drei Schwerpunktsgleichungen sind sonach

$$Qx = q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 + \ldots . = \Sigma q x$$
$$Qy = q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \ldots . = \Sigma q y$$
$$Qz = q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + \ldots . = \Sigma q z,$$

hieraus die fraglichen Schwerpunktsentfernungen von den Drehungsachsen

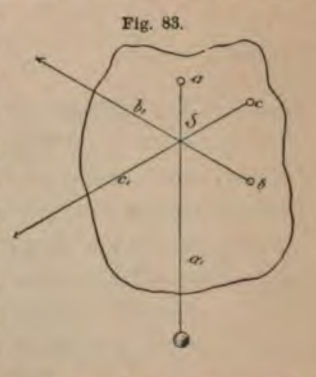
$$x = \frac{\Sigma q x}{Q}, \; y = \frac{\Sigma q y}{Q}, \; z = \frac{\Sigma q z}{Q}. \quad . \quad . \quad . \quad (45b)$$

In Vorstehendem haben wir in den Buchstaben f und q jedes einzelne Flächen- oder Körperelement durch seine Grösse resp. sein Gewicht dargestellt und denken uns die Kräfte, wie wir sie ursprünglich bei der Linie zu Grunde legten, im Schwerpunkt jedes einzelnen Elementes wirken, rechnen von diesen auch die Abstände der Elemente von der jeweiligen Drehungsachse, denn nach obiger Bemerkung wird jedes Element durch seine Mittelkraft in seinem Schwerpunkt angreifend, vertreten.

Hierin liegt allerdings für den ersten Moment ein scheinbarer Widerspruch, denn jedes Flächen- oder Körperelement stellt eine kleine Fläche oder einen kleinen Körper dar, deren Schwerpunktslage wir bereits voraussetzen, um nachher erst, mit Hülfe dieser Voraussetzung, den Schwerpunkt der ganzen Fläche oder des ganzen Körpers klar zu legen. Der Widerspruch wird aber dadurch hinfällig, dass wir uns die Elemente so klein denken wollen, dass sie gleichsam als Punkte aufgefasst werden können.*)

Die Schwerlinien kann man sich durch ein einfaches Verfahren praktisch bestimmen. Wir haben eine beliebig gestaltete Fläche (oder einen Körper) vor uns (Fig. 83) und lassen diese an verschiedenen Punkten a, b, c frei pendeln. Ein in diesen Punkten angebrachtes Pendel wird jedesmal in seiner senkrechten Lage die Richtung durch den Schwerpunkt S nehmen. — Die Fläche (der Körper) strebt infolge seiner Schwere nach dem Mittelpunkt der Erde, sein im Schwerpunkt konzentriert gedachtes Gewicht würde frei fallend nach der Verlängerungslinie vom Aufhängpunkt zum Schwerpunkt, nach dem Mittelpunkt der Erde gelangen. Der Schnittpunkt der sämtlichen Pendellinien ist somit der Schwerpunkt. — Das-

Fig. 83.



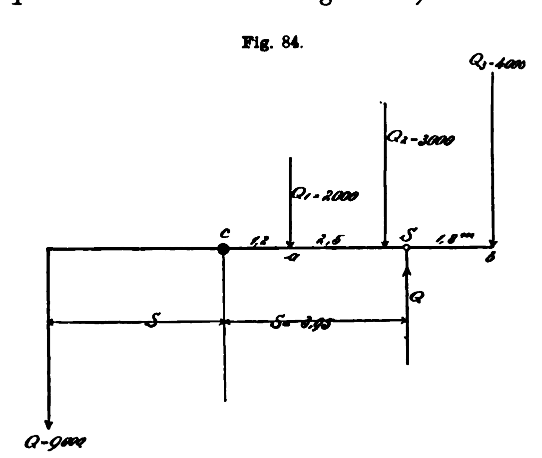

*) In der höheren Mathematik und Mechanik ist jeder Zweifel ausgeschlossen, da man gleich von vorhinein von unendlich kleinen, sozusagen unmessbaren Grössen ausgeht.

selbe Resultat erreicht man, wie leicht zu übersehen, wenn man den Gegenstand, Fläche oder Körper, nach zwei resp. drei sich schneidenden Richtungen auf horizontalen Unterlagen (Schneiden, wie bei Wagen) balancieren lässt; der Schnittpunkt der betreffenden Ebenen (Schwerlinien), welche senkrecht durch die Unterlagen gehen, treffen sich am Schwerpunkt.

Bei symmetrischen Flächen und Körpern und bei symmetrisch belasteten Linien liegt die Schwerlinie stets in der Symmetrielinie. Sind mehrere solcher Symmetrielinien vorhanden, dann ist der Schwerpunkt zugleich Mittelpunkt, Schnittpunkt der Symmetrielinien.

Eine genaue Bestimmung des Schwerpunktes eines aus vielen verschiedenen Elementen (Körpern) oder Teilen bestehenden Körpers, z. B. einer Maschine, ist durch Rechnung oft unmöglich, wenigstens langwierig oder ungenau zu bestimmen; man ist dann genötigt, zu einem der obigen praktischen Verfahren zu greifen.*)

Fig. 84.




**Beispiele und Anwendungen. I.** Es sei eine Stange ab mit drei Gewichten in bestimmten Entfernungen belastet, wo liegt der Schwerpunkt, der Angriffspunkt, der den drei Gewichten 2000 + 3000 + 4000 = 9000 Klg. entgegenwirkenden Kraft?

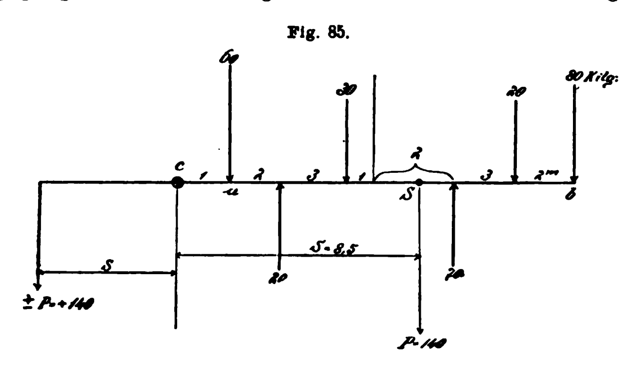
Nimmt man in irgend einer Entfernung hier $1{,}2^{m}$ einen Drehpunkt in der Verlängerung von ab an, dann ist das Moment Qs = 9000s mit den drei Gewichten im Gleichgewicht, wenn $9000s = 2000 \cdot 1{,}2 + 3000 \cdot 3{,}7 + 4000 \cdot 5{,}5;$ hieraus findet man $s = 3{,}95^{m}$, in dieser Entfernung von c, in S greift entgegengesetzt der Gewichte, das Gewicht 9000, zur Herstellung des Gleichgewichtes an. Legt man die (gewichtslos gedachte) Stange in S auf einen Messerrücken, dann tritt Gleichgewicht ein, denn es ist

$$2000\ (3{,}95 - 1{,}20) + 3000\ (3{,}95 - [1{,}2 + 2{,}5])$$
$$= 4000\ (1{,}2 + 2{,}5 + 1{,}8 - 3{,}95) \text{ oder}$$
$$5500 + 750 = 6250 \text{ Klgmeter.}$$

*) Redtenbacher bestimmte den Schwerpunkt einer Lokomotive nach einer vorausgegangenen Näherungsrechnung praktisch durch Aufhängen.

**II.** Ein auch gewichtslos gedachter Stab ab (Fig. 85) sei senkrecht nach entgegengesetzten Richtungen durch Kräfte in den eingezeichneten

Fig. 85.



Entfernungen beansprucht, wo liegt der Angriffspunkt der Mittelkraft dieser parallelen Kräfte?

Nehmen wir in der Entfernung $1^m$ von a den Drehpunkt c an, dann liegt der Schwerpunkt in der Entfernung s, an deren Endpunkt die Kraft

$$\pm P = 60 + 30 + 40 + 20 + 80 - (20 + 70) = + 140 \text{ Klg.}$$

das Gleichgewicht herstellen soll. Die Kraft P ergiebt sich aus der algebraischen Summe der nach unten (positiven) und nach oben (negativen) wirkenden Kräfte, hier sind die oberen überwiegend.

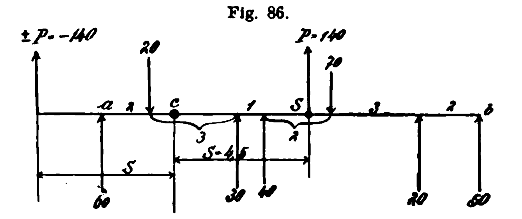
Bei Aufstellung der Schwerpunktsmomentengleichung, die rechts- und linksdrehenden Momente genau beachtend, ergiebt sich

$$s \cdot 140 + 20 \cdot 3 + 70 \cdot 9 = 60 \cdot 1 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 7 + 20 \cdot 12 + 80 \cdot 14,$$

oder $140 \cdot s = 1880 - 690$ und $s = 8{,}5^m$.

**III.** Die beistehende Stange ab sei entgegengesetzt belastet, wie Fig. 85, am Endpunkt der zu berechnenden Schwerpunktsentfernung s, wirkt somit die Kraft

Fig. 86.



$$P = 20 + 70 - (60 + 30 + 40 + 20 + 80) = - 140$$

nach oben; den Drehpunkt c haben wir in die Stange $1^m$ von der Kraft 20 Klg. verlegt, die Schwerpunktsgleichung ist dann

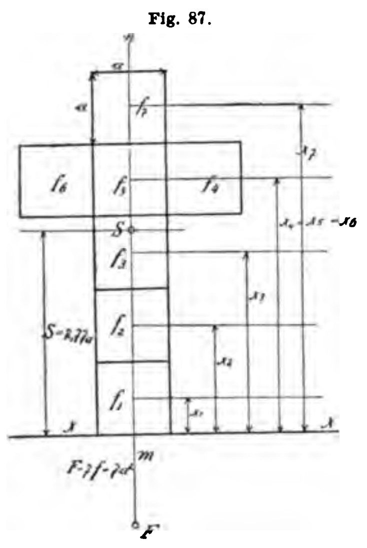
$$140 \cdot s + 60 \cdot 3 + 5 \cdot 70 = 20 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 20 \cdot 8 + 80 \cdot 10$$

hieraus ist $s = 4{,}5^m$.

Man übersieht leicht, dass diese Lage des Schwerpunkt mit der in Fig. 85 gefundenen identisch ist.

**IV.** Den Schwerpunkt eines Kreuzes zu finden (Fig. 87). Da wir hier eine symmetrisch gebaute Figur vor uns haben, so liegt eine Schwerlinie in der Mittellinie mn. Teilen wir das Kreuz in sieben quadratische Elemente von der Seite $a^m$, dann ist

Fig. 87.



$$f_1 = f_2 = f_3 \ldots . f_7 = a^2.$$

Jedes Element können wir als Gewicht oder Kraft ersetzen durch eine in der Mitte eines jeden Quadrates (Schwerpunkt) angreifende Kraft von der jedesmaligen Stärke $a^2$.

Die zweite Schwerlinie finden wir, wenn wir von der Drehungsachse xx in der Entfernung s das ganze Gewicht (Inhalt der Fläche) $F = 7\,a^2$ im Gleichgewicht mit den Momenten der einzelnen Flächenelemente wirken lassen. Die Hebelarme der Momente sind

$$x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = 1{,}5\,a,\ x_3 = 2{,}5\,a,\ x_4 = x_5 = x_6 = 3{,}5\,a,$$

$$x_7 = 4{,}5\,a;$$ die Schwerpunktsgleichung:

$$sF = s \cdot 7\,a^2 = \frac{a}{2}\,a^2 + 1{,}5\,a \cdot a^2 + 2{,}5\,a \cdot a^2 + 3 \cdot (3{,}5\,a\,a^2) + 4{,}5\,a \cdot a^2;$$

Fig. 88.

diese Gleichung liefert

$$s = \frac{19{,}5\,a^3}{7\,a^2} = 2{,}77\,a.$$

Schneidet man sich aus Papier ein solches Kreuz aus und balanciert es in der Entfernung s auf einer Messerschneide, so muss es im Gleichgewicht bleiben.

**V.** Den Schwerpunkt des beistehenden unsymmetrischen Querschnitts zu ermitteln. Hier sind wir genötigt zwei Drehungsachsen anzunehmen, XX und YY. Die drei Flächenelemente sind hier

$$f_1 = 10 \cdot 40 = 400,\ f_2 = 300,\ f_3 = 250.$$

Die Entfernungen der Schwerpunkte (Mittelpunkte) von der X-Achse sind

$$x_3 = \frac{25}{2},\ x_2 = \frac{10}{2},\ x_1 = \frac{40}{2},$$

die Schwerpunktsgleichung lautet

$$x\,(f_1 + f_2 + f_3) = x \cdot 950 = \frac{25}{2}\,250 + \frac{10}{2}\,300 + \frac{40}{2} \cdot 400,$$

hieraus zunächst $x = 13{,}3$.

In Bezug auf die Abstände von der Y-Achse sind die Hebelarme der Flächenelemente

$$y_1 = \frac{10}{2},\ y_2 = 10 + \frac{30}{2},\ y_3 = 30 + 10 + \frac{10}{2},$$

die zugehörige Momentengleichung ist

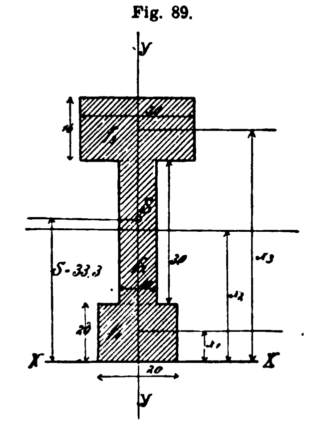
$$y \cdot 950 = 400 \cdot 5 + 300 \cdot 25 + 250 \cdot 45, \text{ alsdann hieraus}$$

$$y = \frac{1000 + 7500 + 1{,}250}{950} = 21{,}9.$$

Würde man in S ein feines gewichtsloses Fadenkreuz einspannen, die vorliegende Fläche in S aufhängen, dann müsste sie in allen Lagen horizontal hängen bleiben.

**VI.** Den Schwerpunkt des in Fig. 89 verzeichneten Tförmigen Querschnitts zu ermitteln.

Fig. 89.



Die drei Flächen sind hier $f_1 = 400$, $f_2 = 300$, $f_4 = 480$, die Entfernungen der Mitten derselben von der horizontalen in XX angenommenen Drehungsachse sind

$$x_1 = \frac{20}{2} = 10,\ x_2 = 10 + \frac{30}{2} = 25,\ x_3 = 58.$$

Die Schwerpunktsgleichung ist, weil

$$F = f_1 + f_2 + f_3 = 1180,$$

$$s \cdot 1180 = 400 \cdot 10 + 25 \cdot 300 + 58 \cdot 480,$$

hieraus folgt $s = 33{,}3$ als Schwerpunktsentfernung von XX.

Der Schwerpunkt S liegt somit in der Kreuzung der um s von XX entfernten Schwerlinie und der Symmetrielinie YY, zugleich vertikale Schwerlinie.

**VII.** Auf den beistehenden Balken, Fig. 90, wirken in derselben Ebene, aber unter verschiedenen Winkeln drei Kräfte; zur Herstellung des Gleichgewichtes kommt es darauf an, die Lage der Mittelkraft zu bestimmen.

Zerlegen wir die Kräfte $P_1$ und $P_3$ in ihre Komponenten, von denen $p_x$ und $q_x$ horizontal, $p_y$, $q_y$ vertikal wirken, dann folgt aus den einge-

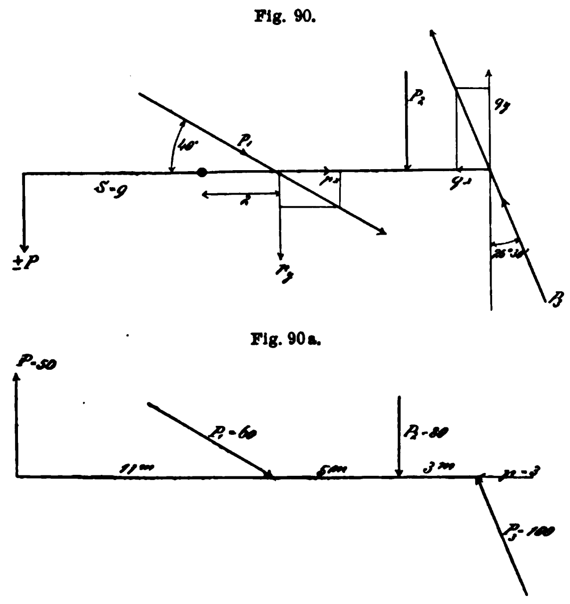


Fig. 90.

Fig. 90a.

zeichneten Parallelogrammen

$$p_x = 60 \cos 40 = 60 \cdot 0{,}766 = 46 \text{ Klg.}$$
$$p_y = 60 \cdot \sin 40 = 60 \cdot 0{,}643 = 39 \text{ Klg.}$$
$$q_x = 100 \sin 25^\circ\, 30 = 43 \text{ Klg.}$$
$$q_y = 100 \cos 25^\circ\, 30 = 90 \text{ Klg.}$$

Die senkrecht am Schwerpunktsabstand wirkende, das Gleichgewicht herstellende Kraft ist

$$P = p_y + P_2 - q_y = 39 + 80 - 90 = 29.$$

Verlegt man den Drehpunkt in $2^m$ Entfernung vom Angriffspunkt der ersten Kraft, dann folgt aus

$$Ps = p_y 2 + 80 \cdot 7 - q_y \cdot 10 = 39 \cdot 2 + 80 \cdot 7 - 90 \cdot 10$$
$$s = -\frac{262}{29} = -9^m.$$

Die Mittelkraft P wirkt demnach in $9^m$ Entfernung links vom Drehpunkt und zwar nach oben.

Im horizontalen Sinne aber wirken noch die beiden Kräfte $p_x$ und $q_x$, deren Gleichgewicht durch die Differenz $p = p_x - q_x = 46 - 43 = 3$ Klg. Druck hergestellt wird. In Fig. 90a haben wir das ganze Kräftesystem seiner Grösse und Richtung nach eingetragen.

**VIII.** In Fig. 91 haben wir eine Ebene, Scheibe vor uns, auf welche nach gleicher Richtung beliebig verteilt Kräfte wirken oder wenn

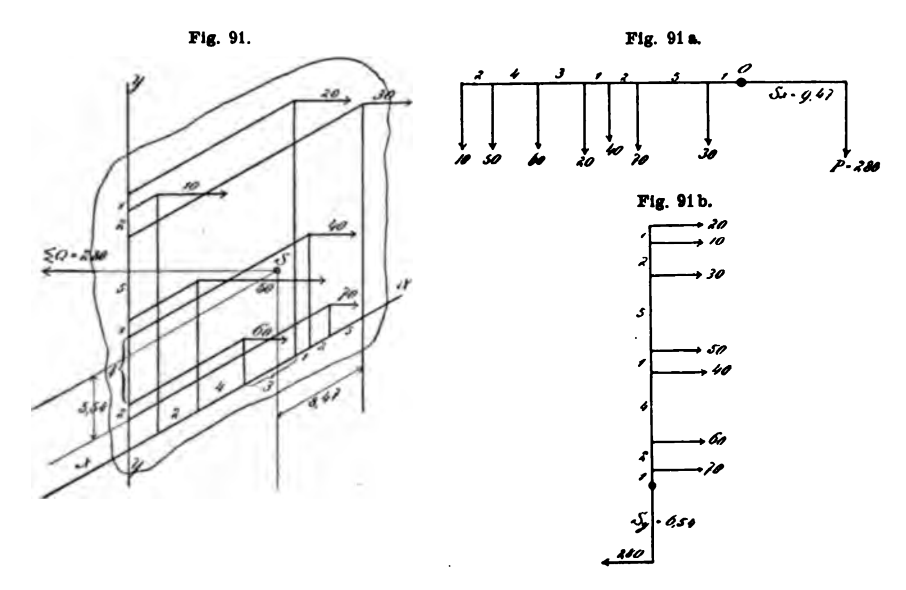


Fig. 91. Fig. 91 a. Fig. 91 b.

die Scheibe horizontal liegt oder hängt, Gewichte hängen.

Bemerkung. Die Wirkung bleibt offenbar dieselbe, wenn man sich statt der Ebene einen Körper vorstellt, dessen Eigengewicht unbeachtet lässt, und die beliebig nach gleicher Richtung wirkenden Kräfte auf eine ebene Fläche reduziert, welche senkrecht auf der Kräfterichtung stehen mag. Ist die Kräfterichtung geneigt unter einem Winkel $\alpha$, Fig. 92, dann kommt die senkrechte Komponente $p = Q \cos \alpha$ in Betracht, während eine entgegengesetzt gerichtete Kraft zur Komponente $q = Q \sin \alpha$ noch besonders auf die Ebene einwirken muss. Die Seitenkraft q kann hierbei senkrecht oder unter irgend einem Winkel zur Senkrechten liegen. —

Fig. 92.

Projiziert man die sämtlichen in Fig. 91 eingezeichneten Kräfte Q auf die beiden Achsen XX, YY, wie dies die Figuren 91 a und b andeuten sollen, dann erhält man unter Annahme der beliebigen Drehachsen O die Schwerpunktsgleichungen

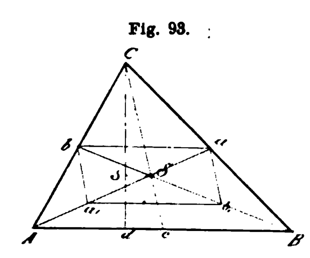
$\Sigma Q s_x = 30 \cdot 1 + 70{,}6 + 40 \cdot 8 + 20 \cdot 9 + 60 \cdot 12 + 50 \cdot 16 + 10 \cdot 18$ und
$\Sigma Q s_y = 70 \cdot 1 + 60 \cdot 3 + 40 \cdot 7 + 50 \cdot 8 + 30 \cdot 13 + 10 \cdot 15 + 12 \cdot 18.$
$\Sigma Q = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 = 280$ eingesetzt, findet man

$$s_x = 9{,}47 \text{ und } s_y = 6{,}54.$$

In Fig. 91 haben wir die beiden Schwerlinien eingezeichnet, der Schnitt derselben ist der Angriffspunkt der Mittelkraft S.

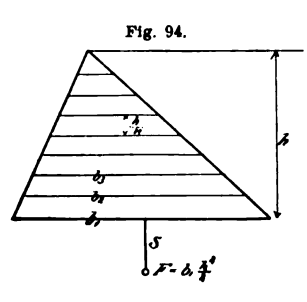
**IX.** Der Schwerpunkt eines Dreiecks, Fig. 93, liegt im Schnittpunkt der drei Transversalen, welche zugleich die Schwerlinien vertreten, also im Schnittpunkt der Linien von den Spitzen zu den Seitenmitten aA, bB, cC. Der Schnittpunkt S, der Schwerpunkt, teilt diese Linien im Verhältnis 1 : 2, woraus folgt, dass $cS = {}^1/_3\, cC$, also auch $ds = {}^1/_3\, h$ sein muss. S fällt demnach auch in $^1/_3$ der Dreieckshöhe. Teilt man das Dreieck in lauter unendlich schmale, den Seiten parallel laufenden Streifen, dann fallen die sämtlichen Mitten (Schwerpunkte) derselben in die genannten Schwerlinien*).

Fig. 93.




*) Behufs Aufstellung einer Momentenschwerpunktsgleichung wollen wir die Anzahl der gleich hohen Teilungsflächen, Fig. 94, parallel zur Basis geteilt n nennen, dann ist die Höhe einer solchen $\frac{h}{n}$; sind $b_1$ (Basis) $b_2$, $b_3$ .... die Breiten, so sind die einzelnen Flächen

Fig. 94.



$$f_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}\,\frac{h}{n},\quad f_2 = \frac{b_2 + b_3}{2}\,\frac{h}{n},$$
$$f_3 = \frac{b_3 + b_4}{2}\,\frac{h}{n},\quad b_4 = \frac{b_4 + b_5}{2}\,\frac{h}{n} \ldots.$$

Die Entfernungen dieser von der Basis als Drehachse sind bis zu den Mittelpunkten der Flächenstreifen gerechnet:

$$\rho_1 = \frac{h}{2n},\quad \rho_2 = \frac{h}{n} + \frac{h}{2n} = \frac{3}{2}\,\frac{h}{n},\quad \rho_3 = 2\,\frac{h}{n} + \frac{h}{2n} = \frac{5}{2}\,\frac{h}{n},$$
$$\rho_4 = 3\,\frac{h}{n} + \frac{h}{2n} = {}^7/_2\,\frac{h}{n} \ldots.$$

Die Schwerpunktsgleichung ist jetzt

$$s\,\frac{b_1 h}{2} = f_1\,\frac{h}{2n} + f_2\,\frac{3}{2}\,\frac{h}{n} + f_3\,\frac{5}{2}\,\frac{h}{n} + \ldots,$$ oder $f_1\, f_2 \ldots.$ eingeführt,

$$s\,\frac{b_1 h}{2} = \frac{h}{n}\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\,\frac{h}{2n} + \frac{b_2 + b_3}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{h}{n} + \frac{b_3 + b_4}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{h}{n} + \ldots\right)$$

Sind b und a die Mitten der Seiten AC und CB, dann ist ab || AB und $\triangle$ abS $\sim$ ASB, überträgt man das $\triangle$ abS nach $a_1\, b_1$ S;

---

oder hieraus, zunächst

$$s = \frac{h}{2\, b_1 n^2}\,[(b_1 + b_2) + (b_2 + b_3)\,3 + 5\,(b_3 + b_4) + 7\,(b_4 + b_5) + \ldots]$$

Bedenkt man, dass infolge der durch die Teilung entstandenen ähnlichen Dreiecke die Proportionen gelten müssen:

$$b_1 : h = b_2 : h - \frac{h}{n},\; b_1 : b_3 = h : h - 2\,\frac{h}{n},\; b_1 : b_4 = h : h - 3\,\frac{h}{n},$$

woraus die Ausdrücke für die Breiten folgen

$$b_1 = b_1,\; b_2 = b_1\left(1 - \frac{1}{n}\right),\; b_3 = b_1\left(1 - \frac{2}{n}\right),\; b_4 = b_1\left(1 - \frac{3}{n}\right)\ldots,$$

dann wird die Schwerpunktsentfernung

$$s = \frac{h}{2\, b_1 n^2}\left[b_1 + b_1\,\frac{n-1}{n} + 3\left(b_1\,\frac{n-1}{n} + b_1\,\frac{n-2}{n}\right)\right.$$
$$\left. + 5\left(b_1\,\frac{n-2}{n} + b_1\,\frac{n-3}{n}\right) + \ldots\right].$$

Löst man die Klammern auf und reduziert, dann ergiebt sich

$$s = \frac{h}{2n^2}\,[2n\,(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots) - (1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots)].$$

Je mehr Glieder oder Streifen man wählt, je grösser n, um so mehr nähert man sich

$$s = \frac{h}{3};\text{ für } n = 10 \text{ wird } s = \frac{h}{2000}\,672.$$

Nach den Gesetzen der arithm. Reihen ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots = n^2;$$

die Summe der ersten n ungeraden Quadrate

$$1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots = \frac{n}{3}\,(4n^2 - 1).$$

Führt man diese Summen in die Gleichung für s ein, dann folgt auch, reduziert

$$s = {}^1\!/_6\,\frac{h}{n^2}\,(2n^2 - 1) \text{ oder mit } n^2 \text{ dividiert}$$

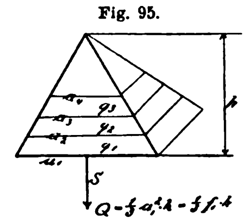
$$s = {}^1\!/_6\,h\left(2 - \frac{1}{n^2}\right);$$

nimmt man nun unendlich viel Teile an, so wird für $n = \infty$, $\frac{1}{n^2} = 0$, somit

$$s = {}^2\!/_6\,h = {}^1\!/_3\,h.$$

In ähnlicher Weise lässt sich auch der Schwerpunkt einer **Pyramide** bestimmen. Wir haben Fig. 95 die Vorderansicht einer vierseitigen angenommen; teilen wir die Höhe h wieder in n Teile von der Höhe $\frac{h}{n}$ und stellen die Momentengleichung der einzelnen Volumina der abgekürzten Pyramiden $q_1\, q_2\, q_3 \ldots$ auf in Bezug auf die Achse XX und dem Gesamt-Moment s ${}^1\!/_3 f h = s\,{}^1\!/_3\, a_1^2 h = sQ$,

Fig. 95.



$a_1 b \parallel ab_1 \parallel cC$, dann sind $a_1$ und $b_1$ die Hälften von AS und BS, somit $aS = {}^1/_3\, Aa$ und $bS = {}^1/_3\, bB$.

---

worin Q der Inhalt der Pyramide, dann erhalten wir die Gleichung

$$\frac{s}{3} a_1^2 h = q_1 \frac{h}{2n} + q_2\left(\frac{h}{n} + \frac{h}{2n}\right) + q_3\left(2\frac{h}{n} + \frac{h}{2n}\right) + q_4\left(3\frac{h}{n} + \frac{h}{2n}\right) + \dots$$

oder

$$\frac{s}{3} a_1^2 h = q_1 \frac{h}{2n} + q_2 \frac{h}{n}\frac{3}{2} + q_3 \frac{h}{n}\frac{5}{2} + q_4 \frac{h}{n}\,{}^7/_2 + \dots$$

Die einzelnen Inhalte $q_1\, q_2\, q_3 \dots$ sind aber

$$q_1 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \frac{h}{n},\quad q_2 = \left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right)^2 \frac{h}{n},\quad q_3 = \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \frac{h}{n} \dots,$$

eingeführt, erhält man, zugleich etwas reduziert

$$s = \frac{3}{8}\frac{h}{n^2 a_1^2}\left[(a_1 + a_2)^2 + 3(a_2 + a_3)^2 + 5(a_3 + a_4)^2 + \dots\right]$$

Nun verhalten sich

$$a_1 : a_2 = h : h - \frac{h}{n},\quad a_1 : a_3 = h : h - 2\frac{h}{n} \dots, \text{ woraus}$$

$$a_2 = a_1\left(1 - \frac{1}{n}\right);\quad a_3 = a_1\left(1 - \frac{2}{n}\right);\quad a_4 = a_1\left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots$$

Man erhält durch Substitution schliesslich

$$s = {}^3/_8 \frac{h}{n^4}\left[(2n - 1)^2 + 3(2n - 3)^2 + 5(2n - 5)^2 + \dots\right]$$

$n = 10$ Schichten liefern das Resultat

$$s = {}^3/_8 \frac{6574}{10\,000} h = \frac{19\,722}{80\,000} h.$$

Die vorletzte Gleichung für s lässt sich auch schreiben, wenn man die Klammern löst und nach Potenzen ordnet:

$$s = {}^3/_8 \frac{h}{n^4}\left[4n^2(1 + 3 + 5 + 7 + \dots) - 4n(1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots) + 1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots\right].$$

Führt man für die ungeraden Zahlenreihen ihre Summenwerte

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots = n^2;\quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots = \frac{n}{3}(4n^2 - 1)$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots = n^2(2n^2 - 1)$$

ein, dann folgt für s

$$s = {}^3/_8 \frac{h}{n^4}\left(4n^4 - \frac{4}{3}n^2(4n^2 - 1) + n^2(2n^2 - 1)\right) = \frac{h}{8n^2}(2n^2 + 1), \text{ oder}$$

$$s = \frac{h}{8}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right);$$

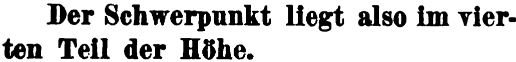
läßt man $n = \infty$ werden, dann wird endlich die Schwerpunktshöhe von der Basis zugleich für alle pyramidalen Körper (auch Kegel) $s = \frac{h}{4}$.

Zieht man endlich Ss || AB, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke, $\triangle CsS \sim dcC$, weil $cS = \frac{1}{3}\, Cc$ auch **$ds = \frac{1}{3}\, dC = \frac{1}{3}\, h$, der Höhe des Dreiecks.**

**X.** Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Verbindungslinie von der Spitze D nach dem Schwerpunkt der Basisfläche G. Legt man die in Fig. 96 angenommene dreiseitige Pyramide auf die Fläche BCD, deren Schwerpunkt E ist, dann ist S, der Kreuzungspunkt der beiden Schwerlinien, der Schwerpunkt.

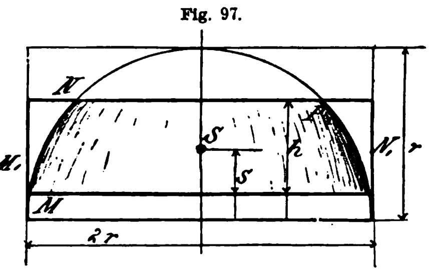
Fig. 96.

Verbindet man die beiden Schwerpunkte G und E, so entstehen ähnliche Dreiecke $SGE \sim SAD$; da nun $EF = \frac{1}{3}\, DF$, $FG = \frac{1}{3}\, AF$, so ist auch $EG = \frac{1}{3}\, AD$, somit $GS = \frac{1}{3}\, SD = \frac{1}{4}\, DG$.


**Der Schwerpunkt liegt also im vierten Teil der Höhe.**

**XI.** Der Schwerpunkt S einer Kugelzone MNPQ liegt in der halben Höhe (Fig. 97), $s = \frac{h}{2}$.

Fig. 97.



Denn denkt man sich die Kugelzone durch ihren halben Cylinder ersetzt $M_1 N_1$, so liegt der Schwerpunkt desselben in der halben Höhe, da beide Oberflächen gleich sind.*)

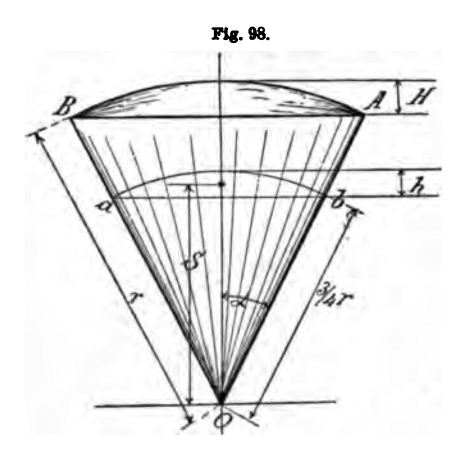
Der Schwerpunkt der halbkugelförmigen Zone liegt in der Höhe

$$s = \frac{r}{2}.$$

**XII.** Man kann sich bekanntlich einen Kugelausschnitt (Kugelsektor), Fig. 98, aus lauter (unendlich vielen) Pyramiden zusammengesetzt denken, deren sämtliche Schwerpunkte in $\frac{3}{4}\, r$, d. h. $\frac{1}{4}$ Höhe oder

*) Bei der Halbkugel ist die Oberfläche $\frac{4 r^2 \pi}{2}$, die des einschliessenden Cylinders $2 r \pi \,.\, r = 2 r^2 \pi$, also dieselbe; die Schwerpunktshöhe ist $\frac{r}{2}$, weil die des Cylinders in der halben Höhe (Radius) liegt.

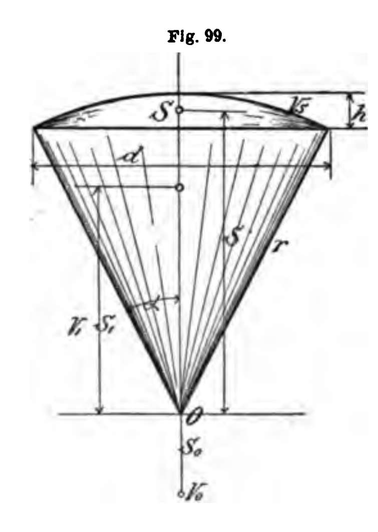
Fig. 98.




$^1/_4$ r von AB aus gerechnet, liegen, demnach in der Kugelzone **ab** zusammenkommen, der Schwerpunkt der letzteren liegt von **ab** als Sehne in der Höhe $^1/_2$ h. Da sich nun $h : H = 3 : 4$ verhalten muss, so folgt $s = {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, H$ die Schwerpunktsentfernung von O. Setzt man $H = r - r \cos \alpha$ ein, dann wird auch $s = {}^3/_4\,(r - H/_2) = {}^3/_8\, r\,(1 + \cos \alpha)$.

Die Schwerpunktshöhe eines halbkugelförmigen Körpers folgt aus letzter Formel, für $H = r$ gesetzt, $s = {}^3/_8\, r$.

Fig. 99.




**XIII.** Ein Kugelausschnitt ist aus einem Kugelsegment und aus einem Kegel zusammengesetzt; sind die Inhalte derselben $V_s$ und $V_1$, ihre Schwerpunktsabstände vom Kugelmittel O, s und $s_1$, $s_0$ und $V_0$ die entsprechenden Werte für den Kugelausschnitt, dann lässt sich die Momenten-Gleichung aufstellen

$$V_0\, s_0 = V_1\, s_1 + V_s\, s.$$

Setzt man die Volumina, und die oben gefundenen Ausdrücke für $s_0$ und $s_1$ ein, dann erhält man schliesslich den Schwerpunkt des Kugelabschnittes aus

$$s = \frac{V_0\, s_0 - V_1\, s_1}{V_s} = {}^3/_4\, \frac{(2\,r - h)^2}{3\,r - h} = {}^3/_4\, r\, \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{2 + \cos \alpha}.$$

Wenn $\alpha = 90^0$, oder $h = r$, so findet man aus beiden Formeln für die Halbkugel wieder $s = {}^3/_8\, r$.

Bemerkung. Die Inhalte und Abstände der Schwerpunkte sind

Sektor: $V_0 = {}^2/_3\, \pi\, r^2\, h,\ s_0 = {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, h,$

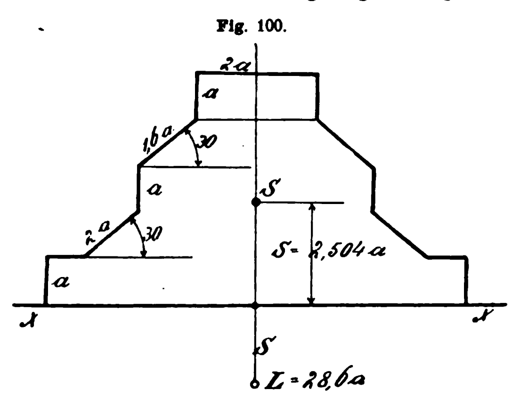
Segment: $V_s = \pi h^2\,(r - {}^1/_3\, h),$

Kegel: $V_1 = \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} (r - h)$, $s_1 = {}^3/_4 (r - h)$;
ferner $(d/_2)^2 = 2 rh - h^2$ und $h = r(1 - \cos\alpha)$.

Für eine $^1/_4$ Kugel findet sich, da $\alpha = 45^0$, $V = \frac{1}{3} r^3 \pi$ und $s = 0{,}808\,r$.

**XIV.** Den Schwerpunkt des beistehenden Linienzuges (Profiles) zu bestimmen, welchen man sich aus Draht gebogen hergestellt denken kann.

Fig. 100.




Der Schwerpunkt liegt in der Symmetrielinie, die Entfernung s von der xx-Achse finden wir aus der Gleichung

$$sL = s \cdot 2 \cdot 8{,}6a = \left(a \frac{a}{2} + a \cdot a + 2a \frac{3}{2} a + a \frac{5}{2} a + 1{,}6a \cdot 3{,}4\,a + a \cdot 4{,}3\,a + a \cdot 4{,}8\,a\right) 2,$$

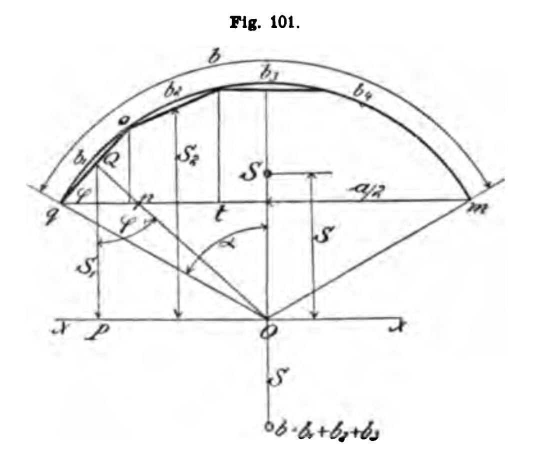
$$s = \frac{21{,}54}{8{,}6} a = 2{,}504\,a.$$

**XV.** Um den Schwerpunkt eines **Kreisbogens**, eines kreisförmig gebogenen Drahtes, zu finden, seien Figur 101 $b_1 b_2 b_3 \ldots.$ die Elemente des Bogens; ihre Entfernungen von der durch den Kreismittelpunkt gehenden Achse xx seien

$$s_1\, s_2\, s_3 \ldots.$$

Verbinden wir die Schwerpunkte dieser Elemente, ihre Mittelpunkte, mit O und projicieren sie auf die Sehne qm,

Fig. 101.



dann entstehen die rechtwinkeligen ähnlichen Dreiecke qpo und QPO; es genügt das erste ins Auge zu fassen.

Die jedesmalige Entfernung s findet sich aus der für jedes Element analogen Proportion

$$b_1 : qp = QO : s_1 = r : s_1, \text{ woraus}$$

$$s_1 = \frac{r\overline{pq}}{b_1}.$$

Das zweite Bogenelement, wegen der geringen Grösse der Elemente wieder Sehnenelement, liegt in der Entfernung

$$s_2 = \frac{r\overline{pt}}{b_2} \text{ u. s. w.}$$

Die Schwerpunktsgleichung lautet jetzt

$$(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)\, s = b_1 s_1 + b_2 s_2 + \ldots, \text{ oder}$$

$$b \cdot s = b_1 \frac{r\overline{pq}}{b_1} + b_2 \frac{r\overline{pt}}{b_2} + \ldots = r(\overline{pq} + \overline{pt} + \ldots) = r \cdot a,$$

hieraus folgt

$$\mathbf{s = r\frac{a}{b} = Radius\,\frac{Sehne}{Bogen}}.$$

Da auch $\frac{a}{2} = r \sin \alpha$, $b = 2\alpha r$, so folgt

$$\mathbf{s = r\frac{\sin \alpha}{\alpha}}.$$

Für den halbkreisförmigen Bogen ist

$$a = 2r,\ b = \frac{1}{2} 2r\pi = r\pi, \text{ somit } s = \frac{2r}{\pi}.$$

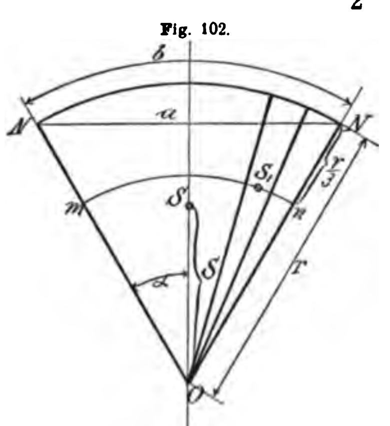


Fig. 102.

**XVI.** Einen **Kreisausschnitt** kann man sich aus unendlich vielen Dreiecken zusammengesetzt denken, ihre sämtlichen Schwerpunkte, welche in den Bogen mn fallen, $S_1$, ersetzen den Sektor MNO, Figur 102. Der Schwerpunkt des letzteren ist somit Schwerpunkt des Bogens mn, seine Entfernung von O also auf a, b, r bezogen,

$$s = {}^2/_3\, r\frac{a}{b} = {}^2/_3\, r\frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Der Schwerpunkt des Halbkreises (Halbkreisfläche) ist, weil

$$\sin\alpha = \sin 90^0 = 1,\quad \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ oder } b = {}^1/_2\, 2 r\pi,\quad a = 2r$$

$$s = {}^4/_3 \frac{r}{\pi}.$$

**XVII.** Den Schwerpunkt eines **Kreisabschnittes** MPN (**Segment**) finden wir nach einer ähnlichen Momentengleichung wie im Beispiel 12.

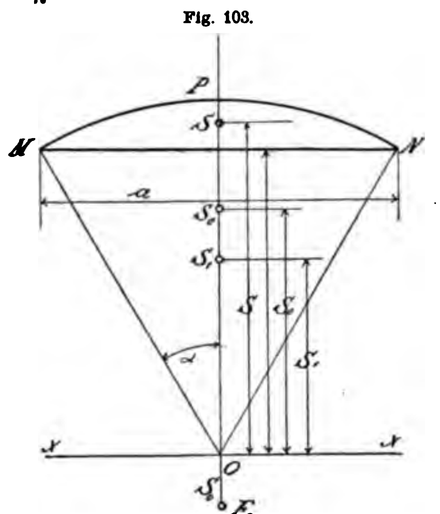


Fig. 103.

Es sind die Flächen und Schwerpunktsabstände von der durch das Kreiscentrum gehenden Achse XX

des Abschnittes MNP, F und s
„ Ausschnittes OMPN, $F_o$ und $s_o$
„ Dreiecks MNO $F_1$ und $s_1$,

Demnach muss F und $F_1$ an s und $s_1$ mit $F_o$ an $s_o$ im Gleichgewicht sein,

$F_o s_o = Fs + F_1 s_1$ hieraus wird

$$s = \frac{F_o s_o - F_1 s_1}{F}.$$

$$F_o = r\, 2\alpha \frac{r}{2} = r^2\alpha;\quad F_1 = \frac{r\cos\alpha}{2}(r\sin\alpha + r\sin\alpha) = r^2 \sin\alpha\cos\alpha;$$

$$F = r^2\alpha - r^2\sin\alpha\cos\alpha;\ \text{ferner}\ s_o = {}^2/_3\, r\frac{\sin\alpha}{\alpha},\quad s_1 = {}^2/_3\, r\cos\alpha$$

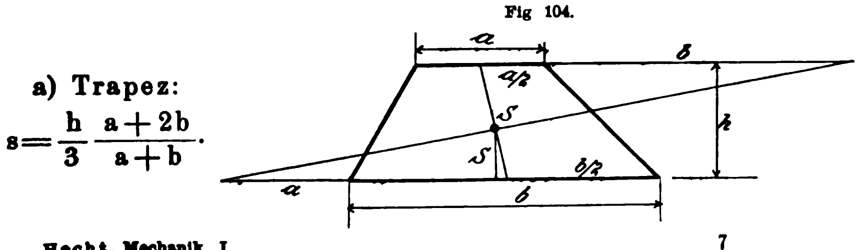
eingesetzt, findet man

$$s = {}^2/_3\, r \frac{r^2\sin^3\alpha}{r^2\alpha - r^2\sin\alpha\cos\alpha} = {}^2/_3\, r\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$ oder wenn $a = 2r\sin\alpha$,

die Sehne eingeführt wird, $s = \frac{1}{12}\frac{a^3}{F}$.

**XVIII.** Im Folgenden sind noch einige in der Praxis mehrfach vorkommende Schwerpunktsentfernungen resultatweise angegeben:

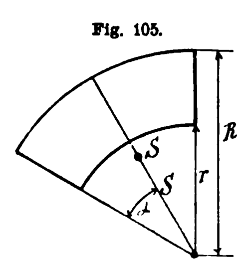
Fig 104.




**a) Trapez:**

$$s = \frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}.$$

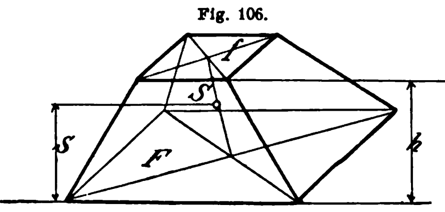
Fig. 105.



b) Kreisring:

$$s = \frac{2}{3} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Fig. 106.



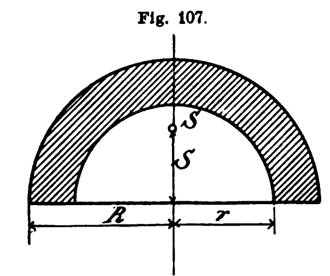
c) Abgestumpfte Pyramide:

$$s = \frac{h}{4} \frac{F + 3f + 2\sqrt{Ff}}{F + f + \sqrt{Ff}}.$$

d) Abgestumpfter Kegel: $F = R^2\pi$, $f = r^2\pi$

$$s = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 3r^2 + 2Rr}{R^2 + r^2 + Rr}.$$

Fig. 107.



e) Hohle Halbkugel:

$$s = \frac{3}{8} \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

f) Halbe Parabelfläche, Fig. 108:

$$x_0 = \frac{3}{5} x$$

$$y_0 = \frac{3}{8} y.$$

Fig. 108.

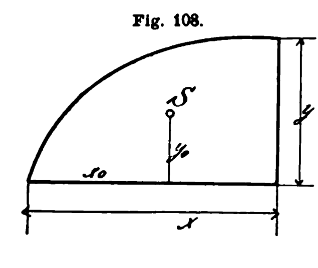


Fig. 109.

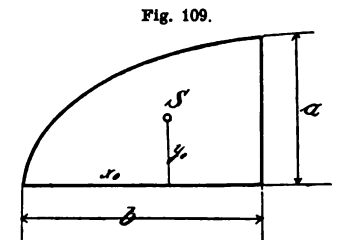
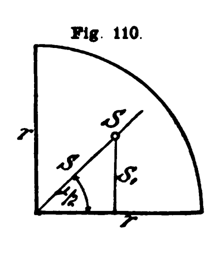


Fig. 110.



g) Viertelellipse, Fig. 109: $x_0 = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}$

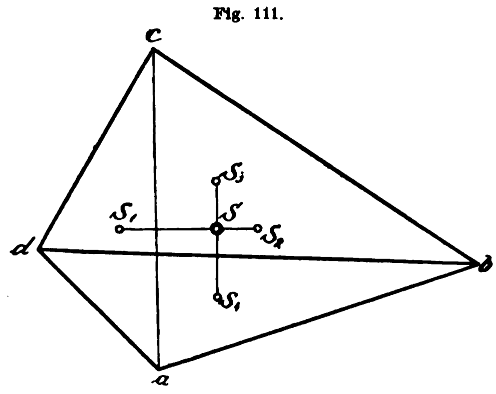
$$y_0 = \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}.$$

h) Viertelkreis, Fig. 110: $s_1 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$, $s = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \sqrt{2}.$

i) Unregelmässiges Viereck, Fig. 111:

Man teilt dasselbe abcd in die zwei Dreiecke adc, acb, deren Schwerpunkte $S_1$ und $S_2$, durch die andere Diagonale in die Dreiecke dcb, dba, sucht auch deren Schwerpunkte $S_3$, $S_4$, der Schnittpunkt S der Schwerlinien $S_1 S_2$, $S_3 S_4$ ist Schwerpunkt des Vierecks.

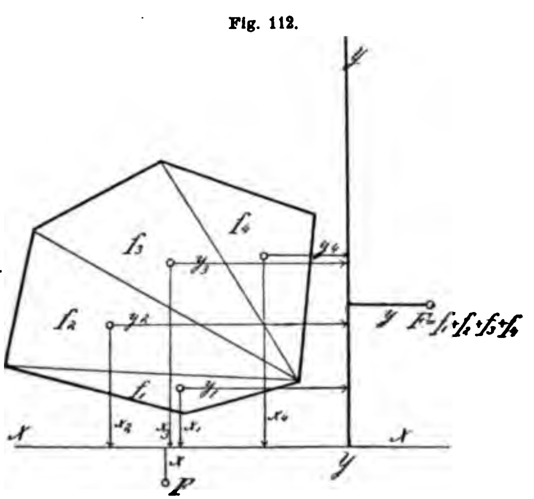
Fig. 111.




k) Um den Schwerpunkt eines unregelmässigen*) Sechseckes zu finden, teilt man dasselbe von zwei Eckpunkten aus durch Diagonalen in Dreiecke resp. in zwei unregelmässige Vierecke, deren Schwerpunkte gesucht werden; die Verbindungslinie beider ist eine Schwerlinie. Kreuzt man diese mit einer Schwerlinie, welche von einem andern Eckpunkt aus in derselben Weise gefunden wird, dann liefert der Kreuzungspunkt den Schwerpunkt.

Ein unregelmässiges Fünfeck teilt man durch eine Diagonale in ein Viereck und Dreieck, sucht deren Schwerpunkte, die Verbindungslinie ist Schwerlinie; durch eine andere Diagonale in analoger Weise zerlegt, erhält man eine andere Schwerlinie, die Kreuzung beider ist der Schwerpunkt.

Fig. 112.



l) Ein unregelmässiges Vieleck (Fig. 112) teilt man von einem Eckpunkt aus in Dreiecke, deren Flächen $f_1 f_2 f_3 f_4$; die Entfernungen der Schwerpunkte dieser von zwei beliebigen Achsen XX, YY sind $x_1 x_2 x_3 x_4$, resp. $y_1 - y_4$;

*) Um einen Raum, dessen Grundriss ein unregelmässiges Vieleck einzuwölben, geht man bekanntlich vom Schwerpunkt aus.

7*

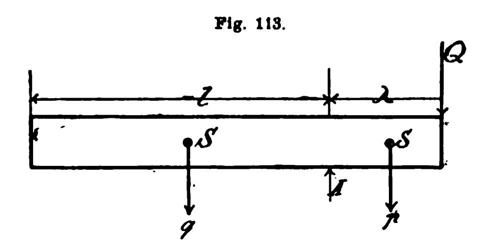
dann sind die Schwerpunktsabstände

$$x = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4}{F},$$

$$y = \frac{\Sigma fg}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + f_4 y_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}.$$

**XIX.** Legt man einen beliebig langen prismatischen Balken (Fig. 113) so auf eine Unterlage A, dass das eine Ende, dessen Gewicht q sein mag, mit dem anderen Teil p und einem am Ende aufgelegten Gewichte Q im Gleichgewicht ist, so lässt sich das Balkengewicht $G = p + q$ folgendermassen berechnen. Bezeichnet man die beiden Balkenenden vom Auflager A an mit l und λ, so verhalten sich zunächst die Gewichte q und p, die in den Schwerpunkten angreifen

Fig. 113.




$$q : p = l : \lambda, \text{ woraus } q = p \frac{l}{\lambda}.$$

Die Momentengleichung um A ist

$$Q\lambda + p\frac{\lambda}{2} = q\frac{l}{2};$$

q eingesetzt, folgt

$$p = \frac{2 Q \lambda^2}{l^2 - \lambda^2};$$

das Balkengewicht ist demnach

$$G = q + p = p\frac{l}{\lambda} + p = p\left(1 + \frac{l}{\lambda}\right) = \frac{2 Q \lambda^2}{l^2 - \lambda^2}\left(1 + \frac{l}{\lambda}\right)$$

oder

$$G = \frac{2 Q \lambda}{l - \lambda}.$$

Legen wir uns einen Holzbalken von $2^1/_2$ m Länge auf eine scharfe Unterlage, und stellt sich ein Mann, dessen Gewicht $Q = 72$ Klg. sein möge, auf das eine Balkenende, so wollen wir annehmen, dass der Balken auf eine freie Länge von 2 m mit dem Gewicht des Mannes das Gleichgewicht herstellt, dann ist das Balkengewicht selbst

$$G = \frac{2 \cdot 72 \cdot 0{,}5}{2 - 0{,}5} = 48 \text{ Klg.}$$

Denn es sind die beiden Gewichte q und p

$$q = \frac{4}{5} \cdot 48 = 38{,}4, \quad p = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ Klg., somit}$$

$$38{,}4 \cdot 1{,}0 = 72 \cdot 0{,}5 + 9{,}6 \cdot 0{,}25 = 38{,}4 \text{ Klgmeter.}$$

Ist das spezifische Gewicht des Holzes 0,7, wiegt der Kubikmeter also 700 Klg., dann findet sich der Querschnitt des verwendeten Balkens aus

$$2{,}5 \cdot 700 \cdot f = 48, \quad f = \frac{48}{2{,}5 \cdot 700} = 0{,}0264 \,\square^{m};$$

entsprechend einer Bohle von $10^{ctm}$ Dicke und $26\,^1/_2\,^{ctm}$ Breite.

Setzt man in obige Formel $G = Q$, dann erhält man $l = 3\,\lambda$.

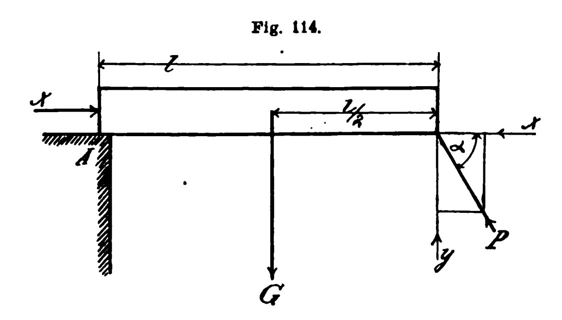
Eine Eisenstange von $l + \lambda = 4^m$ Länge, auf $1^m = \lambda$ Entfernung unterstützt, hat dasselbe Gewicht wie Q. Legt man $Q = 100$ Klg. auf, dann folgt $G = 100$ Klg., und aus

$$100 = f\,7500 \cdot 4, \quad f = \frac{1}{300} \,\square^{m};$$

entspricht einem quadratischen Querschnitt von $58^{mm}$ Seite, wobei 7,5 als spez. Gewicht angenommen wurde.

**XX.** Es soll ein Stein, dessen Gewicht G von einer Seite unter einem Winkel $\alpha$ unterstützt werden (Fig. 114).

Fig. 114.

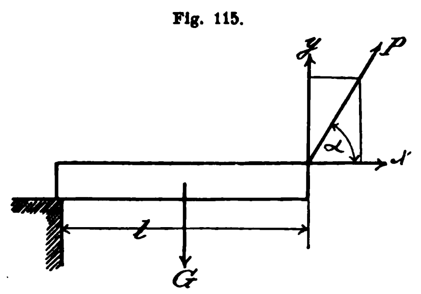



Die unterstützende Kraft P zerlegt man in die Seitenkräfte Y und X. Das Gewicht G des Steines greift im Schwerpunkt am Hebelarm $\frac{l}{2}$ an, und wirkt das Moment $G\frac{l}{2}$ um A gedreht gedacht, dem Momente $Y l$ entgegen, somit gilt die Gleichung

$$Y l = G\,l/_2, \text{ oder weil } Y = P \sin\alpha$$
$$P \sin\alpha\, l = G\,l/_2, \text{ woraus}$$
$$P = \frac{G}{2 \sin\alpha}.$$

Die Kraft $X = P\cos\alpha$ muss bei A entgegen wirken, damit der Stein nicht nach A zu verschoben wird.

Fig. 115.




**XXI.** Soll derselbe Stein von einer Kraft P unter $\alpha^\circ$ in horizontaler Lage erhalten werden, dann folgt aus

$$G\,l/_2 = Y\,l,\quad Y = P \sin\alpha$$

eingesetzt, dieselbe Bedingung

$$P = \frac{G}{2\sin\alpha},$$

während die Kraft $X = P\cos\alpha$ den Stein von seiner Unterlage hinwegzuziehen strebt.

Für $\alpha = 90^\circ$ folgt in beiden Fällen $P = Y = \frac{G}{2}$; für $\alpha = 0^\circ$ wird $P = \infty$, d. h. eine Kraft in der Richtung X kann den Stein nicht heben (halten).

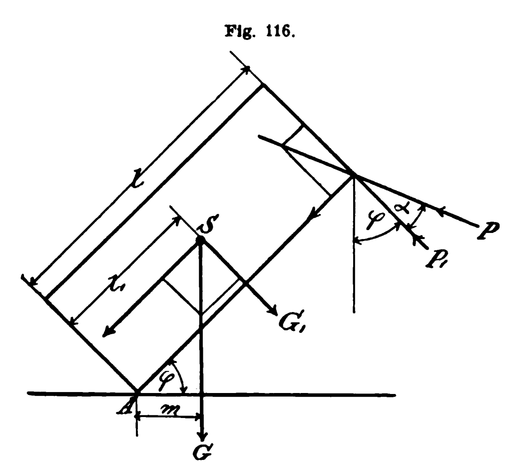
Um einen Stein von $1{,}2^m$ Länge, $0{,}2^m$ Dicke und $0{,}8^m$ Breite horizontal zu erhalten, dessen spez. Gewicht 2,35 und dessen absolutes Gewicht also

$$G = 2350 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0.8 = 451 \text{ Klg.},$$

ist unter 45° wirkend, eine Kraft erforderlich von

$$P = \frac{451}{2 \cdot 0{,}707} = 319 \text{ Klg., fast } {}^3/_4 \text{ des Gewichts.}$$

Fig. 116.




**XXII.** Ein Körper, dessen Gewicht G, steht unter einem Winkel φ und soll durch eine Kraft P unter einem Winkel zur Senkrechten $\varphi + \alpha$ wirkend, unterstützt werden, welche Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich aus der Momentengleichung um A als Drehungskante?

Zerlegt man P in $P_1 = P\cos\alpha$ und $P\sin\alpha$, G in $G_1 = G\cos\varphi$ und $G\sin\varphi$, dann wirken die resp. ersteren senkrecht auf die Drehungsrichtung, die letzteren wirken in Richtung des Körpers nach der Unterlage zu. G greift im Schwerpunkt S an.

Für die ersteren gilt das Moment, um ihn schwebend zu erhalten

$P_1 l = G_1 l_1$ oder obige Werte eingeführt

$P \cos \alpha l = G \cos \varphi l_1$, woraus

$$P = \frac{l_1}{l} G \frac{\cos \varphi}{\cos a} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Greift P horizontal an, $\alpha = 90 - \varphi$, dann wird

$$P = \frac{l_1}{l} G \operatorname{cotg} \varphi . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Je mehr sich $\varphi = 90^\circ$ nähert, je senkrechter also ein Stein steht, um so leichter ist er zu erhalten, weil für $\varphi = 90^\circ$, $P = 0$ wird; wenn $\varphi = 0$, dann wird $P_1$ weil $\cos o^\circ = 1$ am grössten. Das Aufheben eines Körpers macht im Anfang am meisten Schwierigkeiten. Für $\varphi = o$ und $\alpha = o$ wird $P = \frac{l_1}{l} G$ und wenn $l_1 = 1/_2$, dann hat man natürlich das halbe Gewicht $P = \frac{G}{2}$ (senkrecht) zu heben.

Fig. 117.

Soll ein Kegel von $1{,}2^m$ Höhe ($l = 1{,}2^m$), welcher unter $\varphi = 40^\circ$ geneigt liegt, von einer Kraft P unter $\alpha + \varphi = 60^\circ$ gehalten werden, dann muss die Kraft P nach Gl. (a), weil $l_1 = {}^1/_4 l$ (Schwerpunktsentfernung eines Kegels),

$$P = \frac{1/_4}{1} G \frac{\cos 40}{\cos 20} = \frac{1}{4} \frac{0{,}766}{0{,}940} G = 0{,}204 G$$

sein, wenn $G = 1000$ Klg., so würde $P =$ 204 Klg. werden.

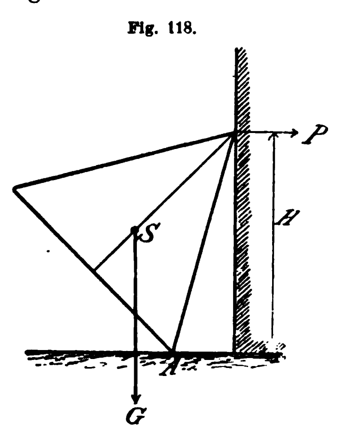



Fig. 118.

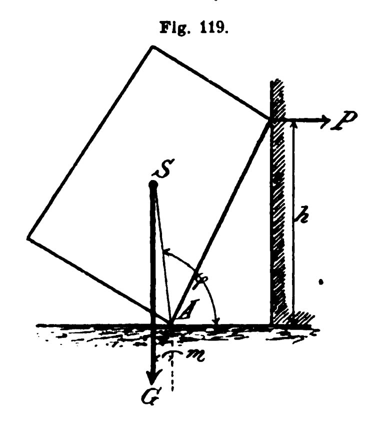



Fig. 119.

Wirkt P horizontal (Fig. 117), dann ist nach Gl. (b)

$$P = \frac{l_1}{l} G \cot g \varphi = \frac{1}{4} G \cot g 40 = 0{,}298 G.$$

P muss grösser als oben werden, weil die Angriffsrichtung ungünstiger liegt.

Wir haben bei vorstehendem Beispiel keine Rücksicht auf die Basis des Kegels genommen, sondern stillschweigend vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt des Körpers denselben entgegengesetzt der stützenden Kraft zu kanten droht.

Aus Fig. 118 und 119 ist aber zu ersehen, dass, damit der Körper nicht fällt und zwar nach entgegengesetzter Seite der früher stützenden Wand, die Kraft P entgegengesetzt wie in Fig. 117 wirken muss. Liegt, wie die Fig. 119 nahezu darstellt, der Schwerpunkt über der Kante A, dann ist die stützende Kraft P = o.

Wird in Gl. (a) $\varphi > 90°$, hierbei können wir uns den Körper in eine Stange SA (Fig. 117, 119) vereinigt vorstellen, dann wird cos $\varphi$ also auch P negativ.

Betrachtet man A als Drehpunkt der Momente Gm und Ph, dann gilt für das Gleichgewicht

(c) . . . . . . . . . $Ph = Gm.$

Für m = o wird P = o, resp. je nach der Lage von m

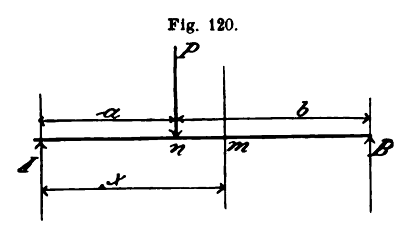
$$P \gtrless o.$$

Wir werden weiter unten wieder auf vorstehende Gleichung c zurückkommen und sehen, dass sie uns die verschiedenen Arten des Gleichgewichtszustandes darstellt.

## Unterstützte und belastete Träger (Balken).

Ein gewichtslos gedachter Balken liegt auf zwei Stützen A und B, und ist in gewissen Entfernungen von diesen mit P Klg. belastet, wie gross sind die Druckkräfte, welche A und B aushalten müssen, und wie gross die Momente, welche bei n und m den Balken durchzubiegen (zu zerbrechen) bestrebt sind? Ersetzt man A und B durch Kräfte (Auflagerkräfte, Reaktionen) und lässt für einen Augenblick die Kraft A zur Wirkung kommen, um den Balken der Kraft P entgegen um B zu drehen, dann tritt erst dann Gleichgewicht ein, wenn

Fig. 120.




(46) . . . . . . . . $A(a + b) = Pb.$

Hieraus findet sich der Auflagerdruck

$$A = \frac{Pb}{a + b}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46a)$$

während man B ausser durch eine gedachte Drehung um A, durch das Moment

$$B(a + b) = Pa$$

auch aus der Bedingung

$$A + B = P, -$$

A und B können zusammen nicht grösser als P sein, — finden kann, nämlich

$$B = P - A = \frac{Pa}{a + b}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Das Moment bei m wäre Ax, wenn P an dem Hebelarm $x - a = mn$ nicht entgegen wirken würde, demnach ist das fragliche Moment in der Entfernung x von A

$$\mathbf{M_x = Ax - P(x - a)}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

Denn denkt man sich den Balken bei m festgehalten, so sucht die Kraft A am Hebelarm x ihn abzubrechen, indess P für sich allein am Hebelarm mn entgegengesetzt wirkt, ihn abbrechen würde.

Das Moment bei n ist für $x = a$

$$M_a = Aa,$$

oder von B aus gerechnet

$$M_b = Bb.$$

Setzt man A und B ein, dann wird das Moment bei n

$$M = Aa = Bb = \frac{ab}{a + b} P.$$

Am grössten wird $M_x$, wenn von Ax nichts mehr abzuziehen ist, wenn also $P(x - a) = o$, d. h. wenn $x = a$, bei n. Am kleinsten wird $M_x$ wenn $x = o$ und für $x = a + b$; setzt man in $M_x$ A ein, so findet man zunächst

$$M_x = \frac{Pb}{a + b} x - P(x - a);$$

für $x = a + b$ folgt

$$M_x = \frac{Pb}{a + b}(a + b) - Pb = o,$$

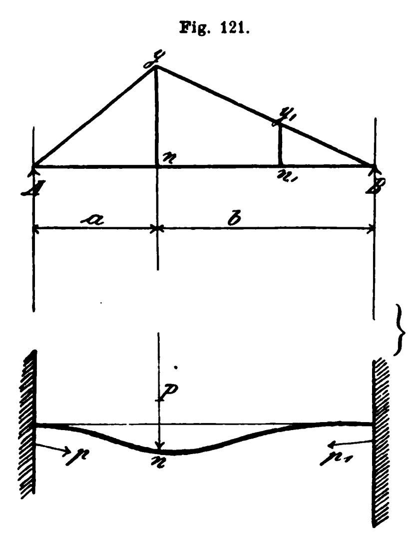
für $x = o$ wird auch $M = Ao = o$.

Von der Grösse der Momente können wir uns am besten dadurch ein Bild machen, dass wir uns in n eine senkrechte Linie $ny = M = Aa$ als grösstes Moment in irgend einem Massstabe auftragen; weil $M = o$

in A und B, so erhalten wir, y mit A und B verbunden, zwei Dreiecke (Fig. 121). Das Moment in $n_1$ ist dann $n_1 y_1$ halb so gross wie ny, wenn $nn_1 = {}^1/_2\, nB = \frac{1}{2}\, b$.

Bei n hat der Balken am meisten auszuhalten, hier wird er am stärksten durchgebogen, während er in A und B, wo M = o, gar keiner Biegung ausgesetzt ist. S. d. Nebenfigur. In n ist, wie man sich ausdrückt, der gefährliche Querschnitt, weil die Gefahr des Durchbrechens am grössten ist.

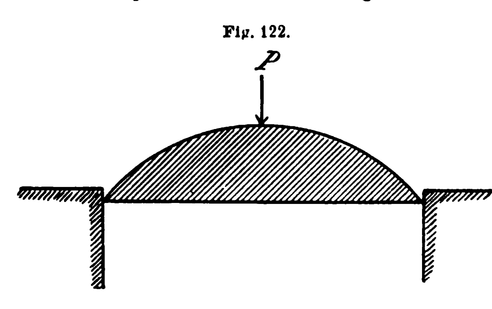
Fig. 121.



In der Praxis pflegt man in den meisten Fällen (bei kleineren Trägern) die Dimensionen der Träger nur nach dem grössten Moment zu berechnen und den Täger auf seiner ganzen Länge gleich stark zu machen. Hierin liegt allerdings eine Verschwendung an Material, da solche Träger nach ihren Auflagern zu schwächer sein können, man nimmt aber hierauf keine Rücksicht, weil ein solcher (kleiner) Träger, den Momenten entsprechend, mit veränderten Querschnitten mehr praktische Schwierigkeiten in der Ausführung machen würde.

Wenn nun auch nach den Auflagern zu der Träger, Fig. 120, den Momenten entsprechend immer schwächer sein darf, so können in A und B die Dimensionen doch nicht Null sein, denn ausser den Momenten müssen wir noch vertikal wirkende Kräfte in Betracht ziehen, welche in den Auflagern A und B am grössten sind, wie wir noch sehen werden.

Fig. 122.



Der Balken würde thatsächlich zwischen seinen Auflagern hinabgleiten, durchfallen, Fig. 122, wenn seine Endquerschnitte (Dimensionen) Null wären, ohne dass er von P gebogen würde. In A und B muss er wenigstens noch so stark sein, dass die Kräfte A und B ihn nicht senkrecht abreissen, abscheeren, abschieben können, Fig. 123. Ist er eingespannt, wie dies die zweite Fig. 121 darstellen soll, dann

wirken beim starken Ausbiegen durch die Kraft P im Balken gleichsam Zugkräfte p und $p_1$.

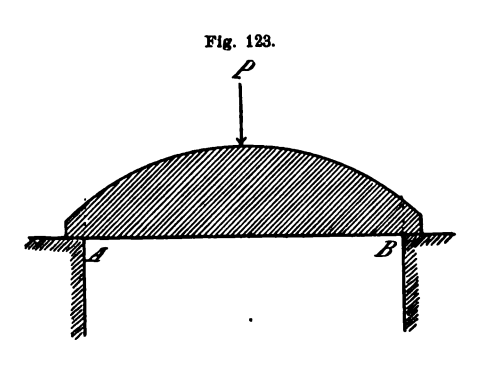


Fig. 123.

Da nun die beiden Auflagerreaktionen A und B den vertikalen Druck übernehmen müssen, so kann an Stelle der grössten Ausbiegung keine vertikale Kraft mehr vorhanden sein, thatsächlich ist sie auch daselbst Null, wie wir noch sehen werden. —

Ist zunächst die Last P, wie Fig. 124 andeutet, auf einen Teil des Trägers, oder auf den ganzen Träger gleichmässig verbreitet, verteilt, dann denken wir uns, wenn wir mit q Klg. die Belastung pro laufende Längeneinheit bezeichnen, $P = 2aq$ im Schwerpunkt angreifend; offenbar hat dann die Belastung auf die Länge 2a verteilt die gleiche Wirkung wie P vereinigt in der Entfernung a von A.

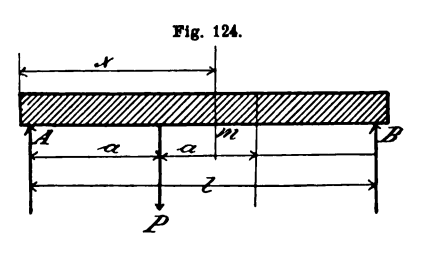


Fig. 124.

Das Moment in der Entfernung x, in m, ist dann $M = Ax - qx\frac{x}{2}$, weil dem Moment Ax die Belastung $q \cdot x$ am Schwerpunktshebelarm $\frac{x}{2}$ entgegenwirkt. Dieses Moment

$$M = Ax - q\frac{x^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

ist dann wieder Null für $x = 0$ und nimmt für $x = a$ den Wert an

$$M = Aa - q\frac{a^2}{2}.$$

Bezeichnen wir nun mit V die oben erwähnte Vertikal-, Scheer- oder Schubkraft, dann ist für die Strecke x, Fig. 124, diese offenbar

$$V = A - qx, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

bezw. nach Fig. 120,

$$V = A - P, \; V = B - P. \quad \ldots \ldots \quad (50a)$$

Im ersteren Fall wird $V = 0$ für $A = qx$ oder $x = \frac{A}{q}$; im letzteren Fall für $A = P$.

V wird am grössten, wenn $x = 0$ oder $P = 0$, d. h. im Sinne der Gl. 50a, wenn A nichts entgegenwirkt; also in den Auflagern A und B.

Setzt man in 50a $A = \frac{Pb}{a+b}$ und $B = \frac{Pa}{a+b}$ ein, dann erhält man

(a) . . . $V = \frac{Pb}{a+b} - P = -\frac{Pa}{a+b} = -B$, bezw.

(b) . . . $V = \frac{Pa}{a+b} - P = -\frac{Pb}{a+b} = -A$.

Bei gleichmässiger Belastung, Fig. 124, haben die Auflager den gleichen Druck $A = B = ql/_2$ auszuhalten, weil A und B zusammen die ganze Last ql gleichmässig zu tragen haben. Für $x = 0$ in Gl. 50 wird V am grössten, nämlich

$V = A = \frac{ql}{2}$; für $x = l$ hingegen wird

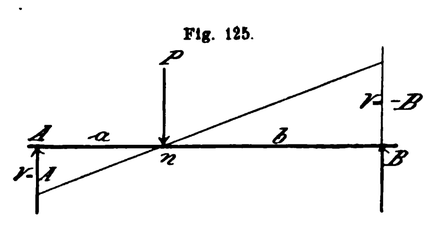
(c) . . . . $V = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}$.

Die Vertikalkraft wirkt, wenn in einem Auflager positiv, mit dem Auflagerdruck als Maximum, im andern Auflager negativ; somit bei gleichmässig verteilter Last in der Trägermitte als Minimum.

Wenn $x = \frac{l}{2}$, so wird nach Gl. 50, $V = A - qx = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} = 0$.

Nach Gl. 50a wird $V = 0$, wenn $A = P$, bezw. $B = P$, d. h. im Angriffspunkt der Kraft P*). Hier ist aber das Moment am grössten.

Fig. 125.




Eine bildliche Darstellung dieser Vertikalkräfte erhält man durch Auftragen derselben, wie Fig. 125 erhellen soll, welche sich auf den Fall Fig. 120 beziehen möge. Trägt man in den Auflagern auf senkrechten Linien die Werte V auf; und zwar in A positiv, in B negativ, in n, $V = 0$, so kann man ähnlich wie bei den Momenten aus den entstandenen Dreiecken an jeder Stelle des Trägers die V-Kraft mit dem Zirkel abgreifen.

Die positiven Werte pflegt man unterhalb der Trägerachse aufzutragen, die Momente, wie wir wissen, oberhalb; folgerichtig müssten die

*) Nach den Grundsätzen der höheren Mathematik, den Differentialquotient von $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial [Ax - P(x-a)]}{\partial x} = 0$, Gl. 48, gesetzt, folgt $\frac{\partial M}{\partial x} = A - P = 0$; $A - P$ ist aber nach Gl. 50a die Schubkraft V. Ist diese Null, dann wird M am grössten.

negativen V-Kräfte oberhalb, die negativen Momente unterhalb aufgezeichnet werden, man überträgt aber wechselsweise Kräfte und Momente, wie wir noch sehen werden, so dass die Momente überhaupt oberhalb, die Vertikalkräfte unter der Trägerachse aufgetragen erscheinen.

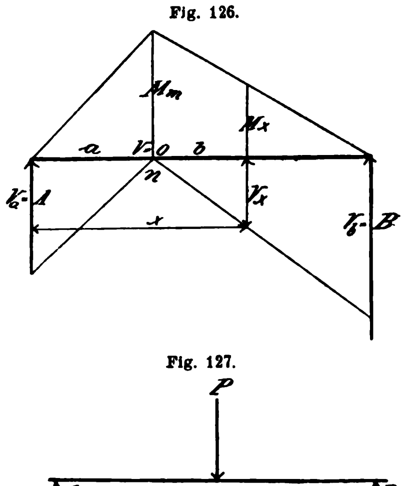

Fig. 126.

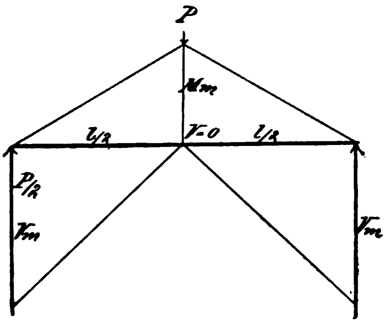
Fig. 127.

In beistehender Fig. 126 sind zur Gesamtübersicht die M- und V-Werte in eine Figur übertragen; und zwar das grösste Moment in n nach oben, die grössten Werte von V, das sind die beiden Auflagerreaktionen in ihren Angriffspunkten nach unten.

In den Entfernungen x von A sind dann dem gewählten Massstab entsprechend, die mit dem Zirkel abzugreifenden Längen des Momentes $M_x$ und der Vertikalkraft $V_x$ zu finden.

Ist ein Träger, Fig. 127, in der Mitte belastet, dann sind die Auflagerdruckkräfte $A = B = \frac{P}{2}$, somit das Moment in der Mitte im Angriffspunkt von P

$$M = Al/2 = \frac{Pl}{4} \quad . \quad . \quad (51)$$


Fig. 128.

Hier findet eine vollständige symmetrische Verteilung der Momente und Vertikalkräfte statt, V = 0 fällt wieder mit $M_{max} = \frac{Pl}{4}$ zusammen. Fig. 128.

Wenden wir diese Beziehungen zwischen M und V auf eine gleichmässig verteilte Last für die Länge l an, dann setzen wir nach Gl. 50

$$V = A - qx = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

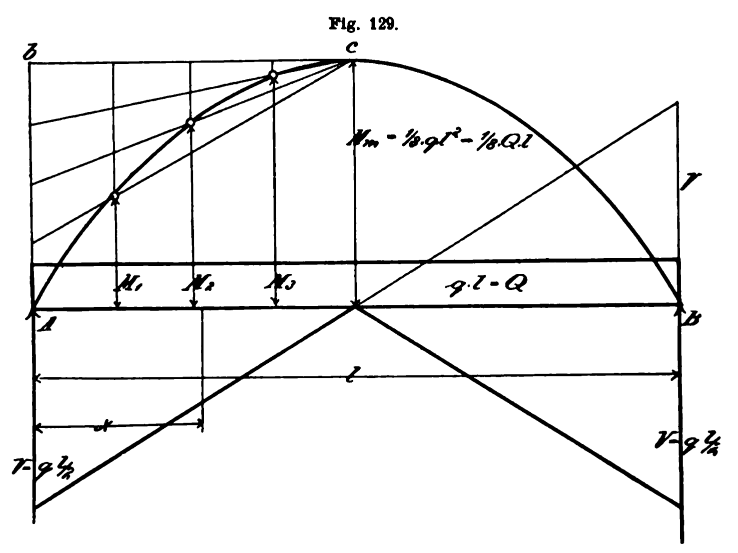
und erhalten hieraus $x = \frac{A}{q}$, in Gl. 49 eingeführt, giebt uns M das grösste Moment, nämlich

$$M = A\frac{A}{q} - \frac{q}{2}\frac{A^2}{q^2} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Für den Fall der ganzen Belastung, gleichmässig verteilt, ist

$$A = \frac{ql}{2} = \frac{1}{2}Q,$$

Fig. 129.




wenn q die Last pro laufende meter, Q die Gesamtlast bedeuten, dann folgt das Maximalmoment nach Gl. 53

(53a) . . . . $$M_m = \frac{1}{2}\frac{q^2 l^2}{4}\frac{1}{q} = \frac{ql^2}{8} = \frac{Ql}{8}.$$

Aus Gl. 52 ergiebt sich der grösste Wert der Vertikalkraft für $x = 0$, im Auflager,

(52a) . . . . . $$V = A = B = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}.$$

V wird Null, wenn $A = qx = \frac{ql}{2}$ oder für $x = l/2$, selbstredend findet hier eine symmetrische Verteilung der M und V statt. Setzt man $x = l/2$ in Gl. 49, dann wird auch wieder

$$M_m = Al/2 - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

In Fig. 129 ist $M_m$ das Maximalmoment in der Mitte oberhalb und sind die V-Kräfte unterhalb aufgetragen.*) Die letzteren sind wieder

*) Setzt man wieder den Differentialquotient von

$$M = Ax - \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = A - qx = 0,$$

so heisst dies soviel als, es werde $V = A - qx = 0$ gesetzt und liefert der Wert für x hieraus, $x = \frac{A}{q}$ die Lage von $M_{max}$.

gerade Linien, A positiv, B negativ. Die Momente bilden aber hier eine krumme Linie, eine Kurve (Parabel). Setzt man in Gl. 49 der Reihe nach $x = 0$, $^1/_8\, l$, $^1/_4\, l$, $^3/_8\, l$, $^1/_2\, l$, $^5/_8\, l$, $^3/_4\, l$, $^7/_8\, l$ und $l$, dann erhält man

$$M = o,\ M_1 = \frac{ql}{2}\frac{l}{8} - \frac{q}{2}\frac{l^2}{64} = \frac{7}{128}\,ql^2,\ M_2 = \frac{12}{128}\,ql^2,$$

$$M_3 = \frac{15}{128}\,ql^2,\ M_m = \frac{16}{128}\,ql^2 = {}^1/_8\,ql^2,\ M_3 = \frac{15}{128}\,ql^2 \text{ u. s. w.}$$

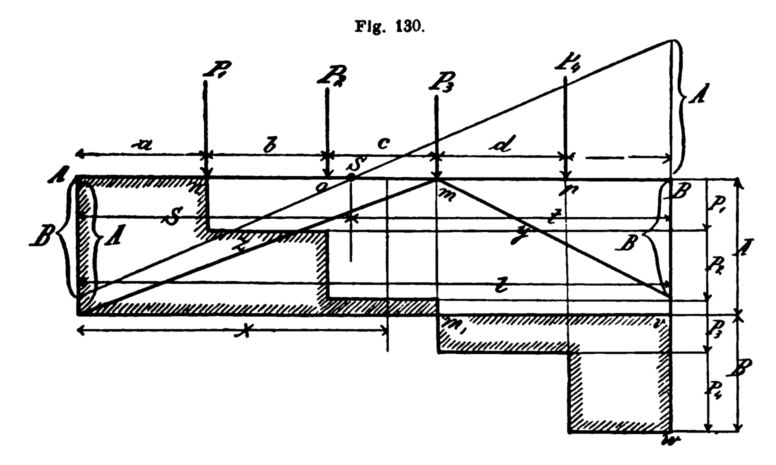
bis $M = 0$ für $x = l$.

Die Endpunkte dieser Momente liefern die Kurve. In Fig. 129 ist auch eine Konstruktion derselben angedeutet. Teilt man bc und Ab in je eine Anzahl gleich grosse Teile, hier 4, und verbindet c mit den Teilen in Ab, dann geben die Schnittpunkte der Senkrechten in den Teilpunkten von bc die Kurvenpunkte. —

Wir wollen nun versuchen, die aus dem einfachsten Fall entwickelten Grundsätze mehr zu verallgemeinern, indem wir mehr Kräfte auf einen Träger einwirken lassen.

Auf einen solchen (Fig. 130) wirken mehrere Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ in verschiedenen Abständen. Ist $l = a + b + c + d + e$ die Spannweite

Fig. 130.




des Trägers, Entfernung zwischen den Auflagern A und B, und lassen wir A an l, um B drehend, den Kräften entgegen, den Träger aus seiner Gleichgewichtslage heben, dann ist die Momentengleichung für die Bedingung des Gleichgewichtes

$$Al = P_1\,(b + c + d + e) + P_2\,(c + d + e) + P_3\,(d + e) + P_4\,e, \text{ somit}$$

$$\mathbf{A = \frac{P_1\,(b + c + d + e) + P_2\,(c + d + e) + P_3\,(d + e) + P_4\,e}{l}}. \quad (54)$$

Den Auflagerdruck B findet man, den Träger um A sich drehend gedacht,

(54a) $$B = \frac{P_4(a+b+c+d) + P_3(a+b+c) + P_2(a+b) + P_1 a}{l},$$

oder auch durch die Bedingungsgleichung, dass

(54b) . . . . $$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

sein muss.

Gehen wir noch weiter in der Annahme und nehmen eine beliebige Anzahl Kräfte an $P_1 P_2 P_3 \ldots$ also $\Sigma P$, dann gilt für den Drehpunkt B die Momentengleichung

$$Al = P_1(l-a) + P_2[l-(a+b)] + P_3[l-(a+b+c)] + \ldots$$

Dividiert man durch l, so folgt der Auflagerdruck A.

Man kann aber vorstehende Gleichung auch schreiben

$$Al = P_1 l - P_1 a + P_2 l - P_2(a+b) + P_3 l - P_3(a+b+c) + \ldots,$$

oder mehr zusammengezogen

$$Al = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) l - [P_1 a + P_2(a+b) + P_3(a+b+c) + \ldots];$$

hieraus folgt jetzt durch Division mit l

$$A = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots \left[P_1 \frac{a}{l} + P_2 \frac{a+b}{l} + P_3 \frac{a+b+c}{l} + \ldots\right],$$

oder

(d) $$A = \Sigma P - \left[P_1 \frac{a}{l} + P_2 \frac{a+b}{l} + P_3 \frac{a+b+c}{l} + \ldots\right].$$

Lässt man den Träger um A drehen, dann ist Gleichgewicht, wenn

$$Bl = P_1 a + P_2(a+b) + P_3(a+b+c) + \ldots,$$

oder durch l dividiert, wenn

(e) . . . $$B = P_1 \frac{a}{l} + P_2 \frac{a+b}{l} + P_3 \frac{a+b+c}{l} + \ldots$$

Die vertikale Kraft an irgend einer Stelle ist bei mehreren Kräften

(55) . . . $$\begin{cases} \mathbf{V = A - (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)}, \text{ bezw.} \\ \mathbf{V = A - \Sigma P.} \end{cases}$$

Setzt man in diese Gleichungen die Beziehungen (d) und (e), dann erhält man zur Herstellung des Gleichgewichtes

$$V = -\left[P_1 \frac{a}{l} + P_2 \frac{a+b}{l} + P_3 \frac{a+b+c}{l} + \ldots\right],$$

bezw. weil der Klammerausdruck dem Auflagerdruck B gleich ist,

(f) . . . . . . . . . . $$V = -B.$$

Dieselbe Betrachtung in Bezug auf das andere Auflager durchgeführt, erhält man

(g) . . . . . . . . . . $$V = -A.$$

Trägt man sich die Auflagerreaktionen umgekehrt; B in A nach unten und A in B oberhalb der Trägerachse, dann erhält man den Schnittpunkt S.

Bezeichnet man die Entfernungen dieses Schnittpunktes von A und B mit s und t, dann folgt aus

$$B : s = A : t \text{ und } t + s = l$$

$$s = \frac{B l}{A + B}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

Setzt man aus Gl. 54 und 54a A und B ein, reduziert, dann ergiebt sich schliesslich

$$s = \frac{P_1 a + P_2 (a + b) + P_3 (a + b + c) + P_4 (a + b + c + d) +}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \ldots \ldots};$$

diese Gleichung mit der S. 81, Gl. 45 verglichen, erkennt man, dass s der Schwerpunktsabstand ist.

Man findet sonach den Schwerpunkt einer Reihe solcher parallelwirkenden Kräfte auch dadurch, dass man nach Gl. 55 aus den beiden Gegenreaktionen den Abstand berechnet oder diese umgekehrt in den Auflagern aufträgt und den Achsenschnitt sucht. Das Moment an irgend einer Stelle in der Entfernung x von A ist

$$\mathbf{M_x = A x - P_1 (x - a) - P_2 [x - (a + b)]}. \quad \ldots \quad (57)$$

In der Entfernung t von B aus gerechnet ist das Moment

$$M_t = B t - P_4 (t - e) - P_3 [t - (d + e)]. \quad \ldots \quad (57a)$$

Denn hält man den Endpunkt von t, den Träger an dieser Stelle fest, und zwar am Ende von A aus gerechnet, so sucht die Kraft B am Hebelarm t abzubrechen in S, entgegen S wirkt an t — e die Kraft $P_4$ und an t — (d + e) die Kraft $P_3$.

Massgebend für uns sind die Momente in den Angriffspunkten der Kräfte, diese lassen sich leicht nach den oben aufgestellten Grundsätzen berechnen, sie sind

$$\left.\begin{array}{l} \text{in n, } M_n = A a, \\ \text{in o, } M_o = A (a + b) - P_1 b \\ \text{in m, } M_m = A (a + b + c) - P_1 (b + c) - P_2 c \\ \text{in p, } M_p = B e = A (a + c + c + d) - P_1 (b + c + d) + P_2 (c + d) + P_3 d. \end{array}\right\} (57b)$$

Obgleich der Schwerpunkt meist in der Nähe des grössten Momentes zu liegen kommt, so lässt sich die Lage desselben am genauesten und besten aus Gl. 55 bestimmen für V = 0,*) indem man von A (bezw.

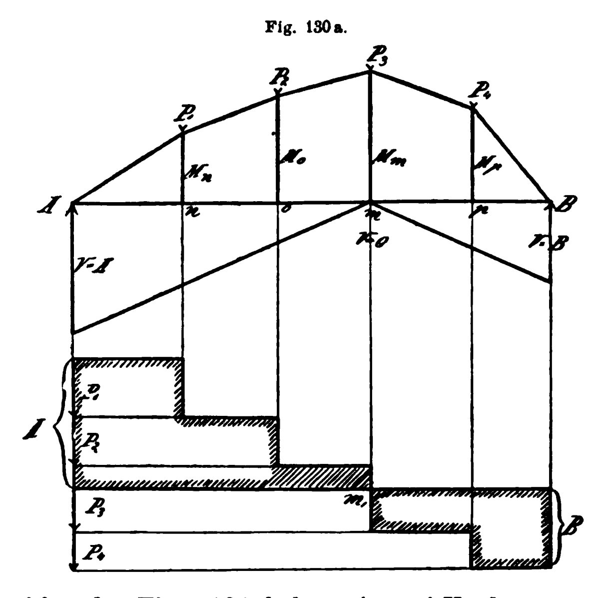
*) Differentiiert man die nach Gl. 57 abgeleitete Gleichung

$$M_x = A_x - P_1 (x - a) - P_2 [x - (a + b)] - P_3 [x - (a + b + c)] \ldots,$$

so findet man $\frac{\partial M_x}{\partial x} = A - P_1 - P_2 - P_3 \ldots = A - \Sigma P$; es ist dies aber (Gl. 55) die Vertikalkraft V, wird diese Null, dann ist $M_x$ ein Maximum.

von B) der Reihe nach die Kräfte in Abzug bringt, bis Null resultiert. Die Figur 130 enthält in den einzelnen Abstufungen aufgetragen einen graphischen Ueberblick über die Lage des Maximalmomentes, welches wir in m angenommen haben. Trägt man sich in B oder A, ev. auch in einer beliebigen zu den Kräften gezeichneten Hülfslinie, der Reihe nach die Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ an, ebenso A und B die Reaktionen, so dass $Bv = A$ und $vw = B$ so stellt die Senkrechte auf Bv am Ende von A die Grenze, den Abschluss der Reaktion A dar, die Endpunkte der Kräfte horizontal (parallel zu $vm_1$) übertragen in die bezügliche Kraftrichtung, liefert in $m_1$ das grösste Moment. z und y sind die durch m laufenden unterhalb der Trägerachse aufgetragenen V-Kräfte, welche den schraffirten Darstellungen im Mittel gleich sein müssen.*) In Fig. 130a haben wir dieselbe Darstellung gleichzeitig mit einer beliebigen Annahme der Momente in den Kräfteangriffspunkten nochmals gezeichnet. —

Fig. 130a.



In der folgenden Figur 131 haben wir zwei Kräfte angenommen. Die Momente sind hier: das Moment in o

$$M_o = Aa.$$

Das in der Entfernung x ist wieder $M_x = Ax - P_1(x - a)$. Das Moment in p ist

$$M_p = Bc = A(a + b) - P_1 b.$$

*) Wir werden in der Graphostatik noch näher darauf zurückkommen.

Ist $P_1 = P_2$, $a = c$, wie in Fig. 132 zu Grunde gelegt, dann ist das Moment an irgend einer Stelle zwischen den Kräften $P_1$ beispielsweise in

Fig. 131.

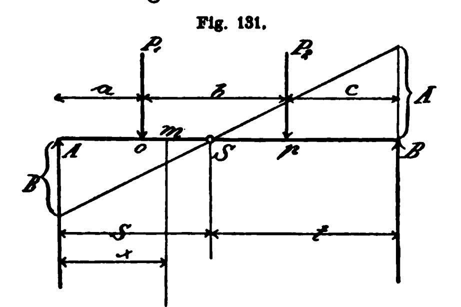
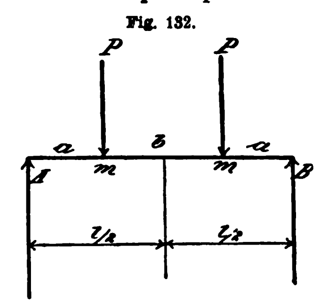


Fig. 132.



der Mitte des Balkens

$$M = Al/_2 - Pl\,(l/_2 - a).$$

Da nun $A = P = B$, so folgt

$$M = Pl/_2 - Pl/_2 + Pa = Pa.$$

Pa ist aber auch das Moment in den Punkten m,

$$M = Aa = Ba = Pa, \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

folglich ist Pa zugleich Maximalmoment. Die graphische Darstellung der Momente und Schubkräfte ist in den Figuren 133 und 134 für die letzten beiden Annahmen durchgeführt. — Ist ein Träger auf eine gewisse Länge

Fig. 133.

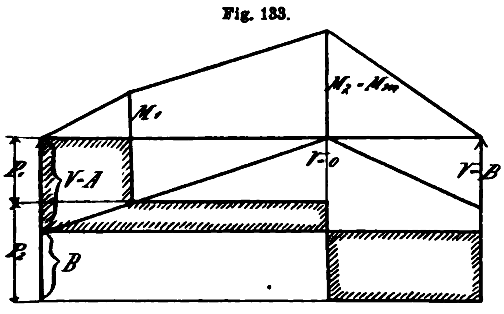
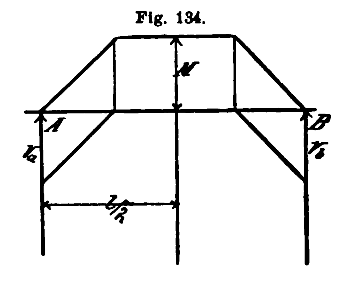


Fig. 134.



gleichmässig belastet, so teilt man die Last in gleichgrosse Teile, und betrachtet jeden Lastteil als eine im Schwerpunkt angreifende Einzellast. Die Resultate kommen der Wirklichkeit um so näher, je mehr Teile man annimmt, je kleinere Teile man in der Berechnung berücksichtigt. (S. d. Bemerk. über die Mittelkraft paralleler Kräfte.)

**Beispiele: I.** Es sei, Fig. 120, P = 1200 Klg., a = 3, b = 5ᵐ. Die Auflagerreaktionen sind Gl. 46, 47

$$A = \frac{1200 \cdot 5}{3 + 5} = 750 \text{ Klg.},$$

$$B = 1200 - 740 = 450 \text{ Klg.}$$

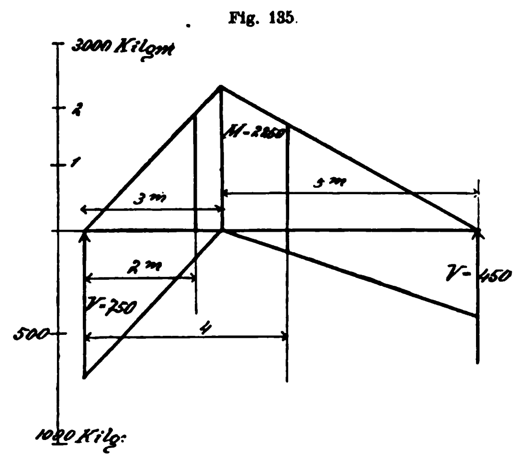
Das Moment in n, für $a = 3^m$, ist zugleich $M_{maximum}$,

$$M_{max} = A \cdot 3 = 750 \cdot 3 = 2250 \text{ Klgmeter};$$

in n liegt der Angriffspunkt der Kraft.

Trägt man sich die Werte auf, Fig. 135, dann lassen sich andere bestimmte Momente unmittelbar abgreifen.

Fig. 135.




In $2^m$ Entfernung ist M = 1900 Klgmeter

„ 4 „ „ M = 1800 Klgmeter.

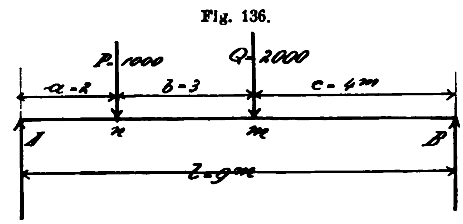
**II.** Eine Last Q = 2000 wirkt in der Mitte eines $6^m$ langen Trägers; das grösste Moment ist Gl. 51,

$$M = \frac{Ql}{4} = \frac{2000 \cdot 6}{4} = 3000 \text{ Klgmeter.}$$

Die seitlichen Abscheerungskräfte sind

$$V = A = B = \frac{Q}{2} = 1000 \text{ Klg.}$$

Fig. 136.




**III.** Der beistehende Träger ist mit zwei Kräften P und Q belastet, die Entfernungen, wie die Kräfte, sind eingetragen. Die Auflagerreaktionen ergeben sich aus

$$A(a + b + c) = P(b + c) + Qc \text{ und } B = P + Q - A;$$

$$A = \frac{1000 \cdot 7 + 2000 \cdot 4}{9} = 1667 \text{ Klg.}$$

$$B = 3000 - 1667 = 1333 \text{ Klg.}$$

Die Momente in n und m sind

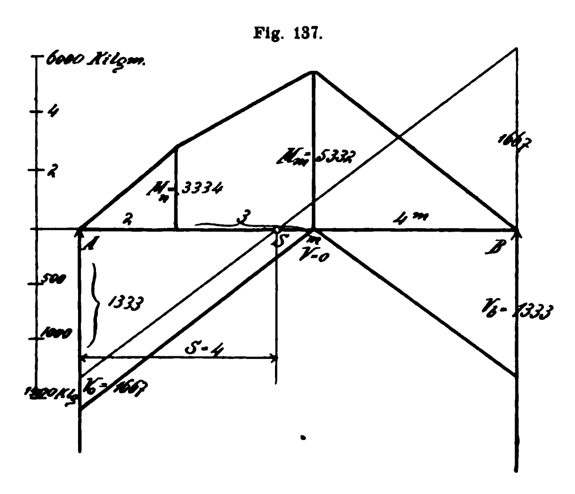
$$M_n = A \cdot 2 = 1667 \cdot 2 = 3334 \text{ Klgmeter.}$$

$$M_m = A \cdot 5 - P \cdot 3 = B \cdot 4 = 5332 \text{ Klgmeter.}$$

Das Maximalmoment muss hier nach m fallen (Fig. 137), denn

$$V = A - (P + Q) \text{ (Gl. 55)}$$

Fig. 137.




wird bereits zwischen n und m Null; und zwar wird die Differenz

$$A - P = 1667 - 1000 = 667$$

grösser als die Hälfte der Differenz

$$Q - P = 2000 - 1000,$$

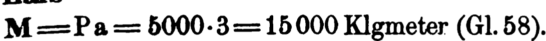
also grösser als $\frac{1000}{2}$ und fällt nach dem Angriffspunkt der Kraft Q.

Der Angriffspunkt der Mittelkraft liegt in der Entfernung

$$s = \frac{Bl}{A + B} = \frac{1333 \cdot 9}{1667 + 1333} = 4^m \text{ von A. (Gl. 56.)}$$

Fig. 138.

**IV.** Sind die Kräfte symmetrisch verteilt, wie in Fig. 138, dann sind die Auflager auch gleich belastet, A = B = 5000 Klg. Die Momente in A und B Null; innerhalb



$$M = Pa = 5000 \cdot 3 = 15000 \text{ Klgmeter (Gl. 58).}$$

**V. und VI.** Ein Balken ist, wie beistehend Fig. 139, belastet, die Auflagerdrücke sind aus den folgenden Gleichungen

berechnet

$$A(1+2+4+3) = 2000 \cdot 9 + 3000 \cdot 7 + 3 \cdot 1000,$$

$$A = \frac{42000}{10} = 4200 \text{ Klg., } B = 6000 - 4200 = 1800 \text{ Klg.}$$

Fig. 139.

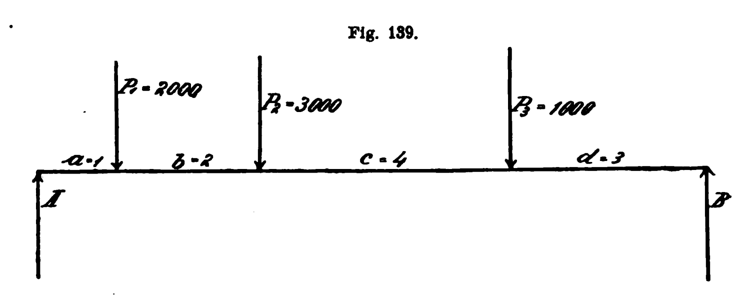
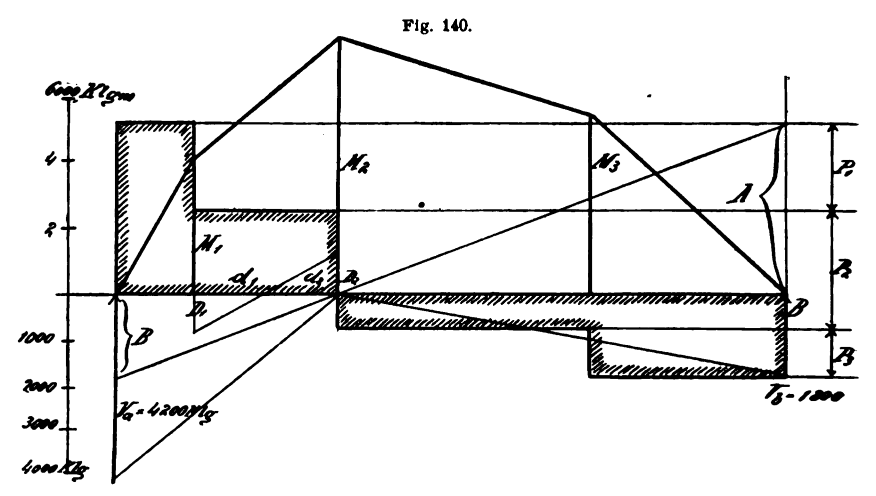


Fig. 140.



Das grösste Moment fällt in den Angriffspunkt der Kraft

$$P_2 = 3000 \text{ Klg.},$$

denn die Differenz

$$A - \Sigma P = 4200 - (2000 + 3000 + 1000)$$

wird negativ von der Seite des Auflagers A aus vor $P_2$.

A — (2000 + 3000) = 4200 — 5000 = — 800, von B aus ebenso

B — (1000 + 3000) = 1800 — 4000 = — 1200.

M als Maximalmoment liegt sonach in $P_2$.

Der Schwerpunkt liegt in der Entfernung

$$s = \frac{lB}{A+B} = \frac{10 \cdot 1800}{6000} = 3^m \text{ vom Auflager A.}$$

Die Momente sind

$M_1 = A \cdot a = 4200$ Klgmeter.

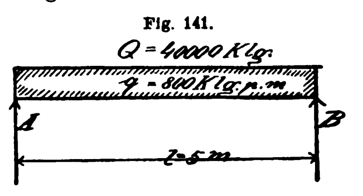
$M_2 = A(a + b) - P_1 b = 4200 \cdot 3 - 3000 \cdot 2 = 6600$ Klg.

$M_3 = A \cdot 7 - P_1 \cdot 6 - P_2 \cdot 4 = 4200 \cdot 7 - 2000 \cdot 6 - 3000 \cdot 4 = B \cdot 3 = 5400.$

In Fig. 140 sind sämtliche Werte übertragen.

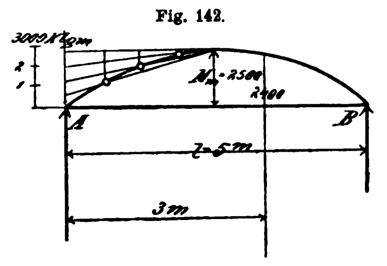
**VII.** Ein Träger von $5^m$ Spannung ist mit $q = 800$ Klg. pro lauf. Meter belastet, das grösste Moment (in der Mitte) ist dann, Gl. 53a,

Fig. 141.




$$M_m = \frac{q l^2}{8} = \frac{800 \cdot 5^2}{8} = 2500 \text{ Klgmeter.}$$

Fig. 142.




Das Moment in $3^m$ Entfernung vom Auflager A ergiebt sich aus der Parabel, Fig. 142, $M = 2400$ Klgm., nach Rechnung Gl. 49, weil

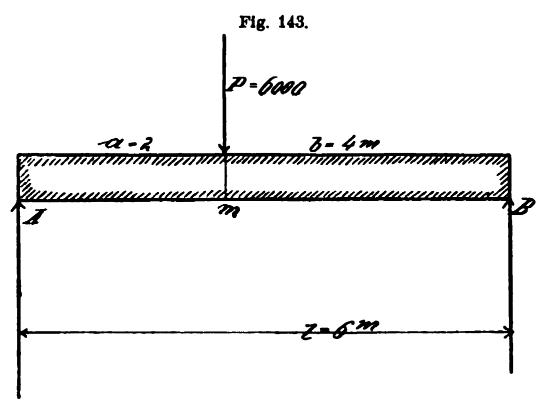
$$A = \frac{q l}{2} = \frac{800 \cdot 5}{2} = 2000 \text{ Klg.,}$$

$$M = A x - \frac{q x^2}{2} = 2000 \cdot 3 - 800 \frac{3^2}{2} = 2400 \text{ Klgmeter.}$$

---

**VIII.** In dem beistehend mit 6000 Klg. belasteten Holzträger, Fig. 143, soll das Eigengewicht des Trägers mit berücksichtigt werden.

Fig. 143.




Näherungsweise*) ist bei $P = 6000$ Klg. Einzellast und $l = 6^m$ Spann-

*) S. Abhandlung d. Verf. über Eigengewichte von Trägern in der Bautechn. Zeitschrift No. 17, 1888. Berlin u. Wien.

weite, wenn wir das Verhältnis der Trägerbreite zur Höhe wie 5 : 7 annehmen

$$p = \tfrac{1}{8}\sqrt[3]{P^2 l^2} = \tfrac{1}{8}\sqrt[3]{36000000 \cdot 36} = 136 \text{ Klg.}$$

Das Gesamtgewicht des Trägers ist dann (cirka) $136 \cdot 6 = 820$ Klg.

Nach Gl. 46, 47 sind die Auflagerreaktionen

$$A = \frac{Pb}{a+b} = \frac{6000 \cdot 4}{6} = 4000, \quad B = 6000 - 4000 = 2000 \text{ Klg.}$$

Rechnet man das halbe Eigengewicht beiderseits zu, dann folgt

$$A = 4410, \quad B = 2410 \text{ Klg.}$$

Das Maximalmoment fällt nach m, und ist

$$M_m = Aa - 136 \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 4410 \cdot 2 - \frac{136}{2} 2^2 = 8548 \text{ Klgmeter.}$$

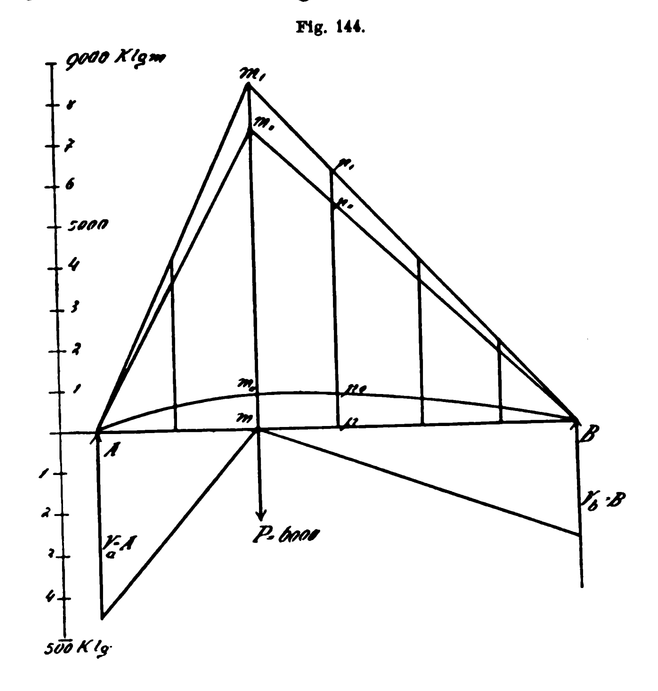
Das Moment in m ohne Rücksicht auf das Eigengewicht ist

$$M = Aa = 4000 \cdot 2 = 8000 \text{ Klgmeter.}$$

Bemerkung. Berechnet man sich die Dimensionen des Trägers, so erhält man nach $M_m = 8548$ Klgmeter, Höhe $229^{mm}$, Breite $164^{mm}$; ohne Rücksicht auf das Eigengewicht hingegen ${}^{224}/_{160}{}^{mm}$, also nur einige mm Unterschied. —

In Fig. 144 ist die Belastung dieses Trägers graphisch dargestellt.

Fig. 144.



$m_o$, $p_o$ sind Punkte der Parabel, welche die Kurve für die Eigengewichtsbelastung darstellt, das grösste Moment derselben $pp_o$ ist nach 53a

$$pp_o = M_m = \frac{1}{8}\, ql^2 = \frac{1}{8}\, 136 \cdot 6^2 = 612 \text{ Klgmeter.}$$

Konstruiert man sich die Parabel wie Fig. 129 angedeutet, oder rechnet man sich nach Gl. 49 die Hauptpunkte aus, dann erhält man die den Längen $x = 1^m$, $x = Am = 2^m$, $x = Ap = 3^m$ u. s. w. entsprechenden senkrechten Höhen, deren Endpunkte verbunden die Kurve liefern. Für die Eigengewichtsbelastung ist $A = \frac{820}{2} = 410$, genauer $A = 136 \cdot 3 = 408$, und $q = 136$, folglich für

$$x = 3^m,\ pp_o = Ax - q\frac{x^2}{2} = 410 \cdot 3 - 136\,\frac{9}{2} = 618 \text{ Klgmeter.}$$

(Die Differenz mit obigen 612 Klgmeter rührt von der Annäherung $136 \cdot 6 =$ abg. 812 her.)

$$\text{Für } x = 2 \text{ wird } M = mm_o = 410 \cdot 2 - 136\,\frac{2^2}{2} = 548 \text{ Klgmeter.}$$

$$\text{,, } x = 1 \text{ ,, } M = 410 \cdot 1 - 136\,\frac{1}{2} = 342 \text{ Klgmeter.}$$

Das oben berechnete Trägermoment für die Entfernung $a = 2^m$ ist durch die Linie $mm_1$ (8548 Klg. entsprechend) dargestellt.

Trägt man sich das Moment $M = 8000$ Klgmeter ohne Rücksicht auf das Eigengewicht auf, $M = mm_{,,}$, dann ist $m_, m_{,,} = mm_o$ bezw. $nn_o = n_,n_{,,}$, $pp_o = p_,p_{,,}$ u. s. w. Man hat also nur nötig zu den Höhen (Momenten) der Linien $Am_{,,}$, $Bm_{,,}$ die Eigengewichtshöhen die Ordinaten (Momente) $mm_o$, $pp_o$ . . . zuzuschlagen, um die ganze Belastungskurve $Am_,B$ mit Rücksicht auf das Eigengewicht auf graphischem Wege zu erhalten.

**IX.** Es sind für dieselbe Spannweite $l = 6^m$, $P = 50$ Klg. und $q = 100$ Klg. pro laufende Meter Belastung und wenn $a = 2^m$, die Entfernung, in welcher P angreift, die Belastungsverhältnisse zu bestimmen. (Fig. 145.)

Die Auflagerreaktionen sind:

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{Pb}{a+b} = \frac{100 \cdot 6}{2} + \frac{50 \cdot 4}{2+4} = 333 \text{ Klg. und}$$

$$B = (400 \cdot 6 + 50) - 333 = 317 \text{ Klg.}$$

Das Moment in m ist

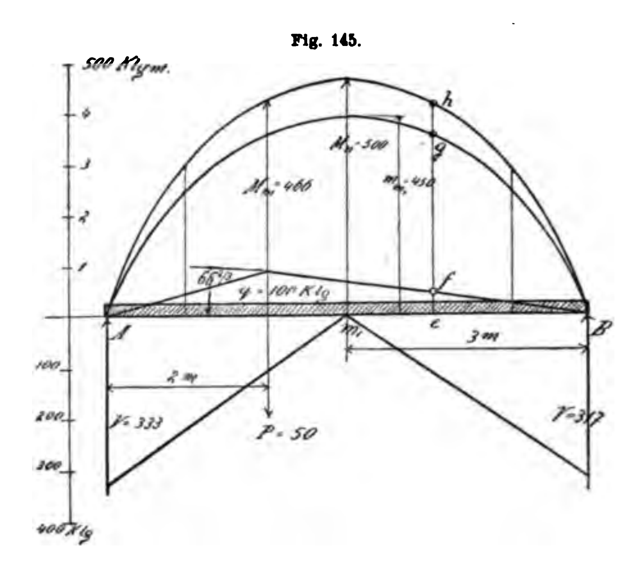
$$M_m = A \cdot a - q\frac{a_2}{2} = 333 \cdot 2 - \frac{100 \cdot 2^2}{2} = 466 \text{ Klg.}$$

Das Moment in der Trägermitte

$$M_{m1} = A \cdot l/_2 - P\,(l/_2 - a) - q\,l/_2 \cdot \frac{l}{4} = A\,l/_2 - P\,(l/_2 - a) - q\frac{l^2}{8} \text{ oder}$$

$$M_{m1} = 333 \cdot 3 - 50\,(3 - 2) - 100\,\frac{6^2}{8} = 500 \text{ Klgmeter.}$$

Fig. 145.




Das grösste Moment des Eigengewichtes allein in der Trägermitte ist

$$m_{m\prime} = \frac{q l^2}{8} = \frac{100 \cdot 6^2}{8} = 450 \text{ Klgmeter.}$$

Das Moment im Angriffspunkt der Last ist ohne Rücksicht auf das Eigengewicht

$$M = A, a.$$

Hierin ist A, der Auflagerdruck nach Gl. 46a zu berechnen. Man findet

$$A, = \frac{Pb}{a + b} = \frac{50 \cdot 4}{2 + 4} = 33^1/_3 \text{ Klg.}$$

Obiges Moment ist sonach

$$M = 33^1/_3 \cdot 2 = 66^1/_3 \text{ Klgmeter.}$$

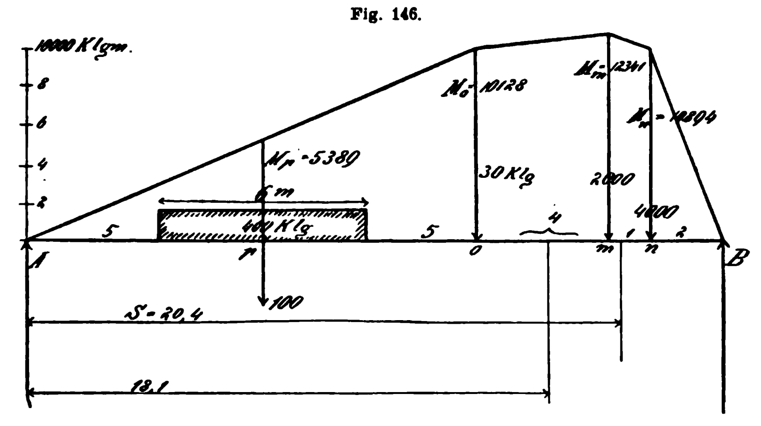
In Fig. 145 sind alle drei Kurven übertragen, das letzte Moment (gerade Linien) für P = 50 Klg. allein, die Eigengewichtsparabel und die Summe beider, deren grösstes Moment in der Trägermitte 500 Klgmeter. ist. Für den Querschnitt eh ist g der Parabelpunkt der Eigengewichtskurve, ef zu eg addiert giebt eh die Grösse des Momentes in e.

**X.** Die Auflagerdrücke des in Fig. 146 verzeichneten Trägers von $23^m$ Spannweite, belastet mit zusammen 6130 Klg., ohne Eigengewichtsberücksichtigung, sind

$$A = \frac{100 \cdot 15 + 30 \cdot 7 + 2000 \cdot 3 + 4000 \cdot 2}{23} = 683 \text{ Klg. und}$$

$$B = 6130 - 683 = 5447 \text{ Klg.}$$

Fig. 146.




Das grösste Moment fällt in den Angriffspunkt m der Kraft 2000 Klg. Die Vertikalkraft

$$V = A - (100 + 30) = 683 - 130 = 553$$

ist in o noch positiv, aber bereits in m negativ,

$$V = 683 - 2130 = - 1447,$$

und wie man leicht übersieht, auch von der Seite des anderen Auflagers

$$V = B - (4000 + 2000) = 5447 - 6000 = - 553.$$

Die Momente in n, m, o, p sind der Reihe nach

$$M_n = B \cdot 2 = 5447 \cdot 2 = 10\,894 \text{ Klgmeter},$$
$$M_m = B \cdot 3 - 4000 \cdot 1 = 12\,341 \quad ,,$$
$$M_o = A \cdot 16 - 100 \cdot 8 = 10\,128 \quad ,,$$
$$M_p = A \cdot 8 - \frac{100}{2} \frac{3}{2} = 5389 \quad ,,$$

Der Schwerpunkt der Belastung liegt in der Entfernung von A

$$s = \frac{Bl}{A + B} = \frac{5447 \cdot 23}{5447 + 683} = 20{,}4^m.$$

Wird das Eigengewicht in Rücksicht gezogen, dann rückt das Maximalmoment mehr nach A zu. Nimmt man H = 1,5 Trägerhöhe, dann ergiebt sich annähernd*) als Eigengewicht für einen eisernen Träger pro

*) S. obige Bemerkung, S. 119.

laufender Meter:

$$q = 8\left(5\,H + \frac{M_m + H\,V_m}{3000\,H - l\,(l + 4\,H)}\right)$$

$$= 8\left(5 \cdot 1{,}5 + \frac{12\,341 + 1{,}5 \cdot 5447}{3000 \cdot 1{,}5 - 23\,(23 + 4 \cdot 1{,}5)}\right) = 103 \text{ Klg.}$$

Verteilt man diese auf die Auflager, so kommen auf jedes

$$\frac{23 \cdot 103}{2} = 1185 \text{ Klg., und es folgt}$$

$$A_{,} = 683 + 1185 = 1868 \text{ Klg.}, \quad B_{,} = 5447 + 1185 = 6632 \text{ Klg.}$$

Die Momente sind dann

$$M_m = B_{,} \cdot 3 - 4000 \cdot 1 - 103 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 15\,432 \text{ Klgmeter}$$

$$M_o = A_{,} \cdot 16 - 100 \cdot 8 - \frac{103 \cdot 16 \cdot 16}{2} = 15\,902 \quad ,,$$

Das grösste Moment würde jetzt nach dem Angriffspunkt o fallen; V wird in o fast Null, denn es ist

$$V = A - (100 + 30 + 103 \cdot 16) = 1868 - 1778 = 90.$$

**XI.** Ein eiserner Träger von $l = 5^m$ Spannung mit $Q = 4000$ Klg. in der Mitte belastet wiegt*) pro laufender Meter cirka bei $0{,}4 = H$ Höhe

$$q = \frac{2\,Q}{4000\,H}\,(l + 2\,H) = \frac{2 \cdot 4000}{4000 \cdot 0{,}4} = (5 + 2 \cdot 0{,}4) = 29 \text{ abg. } 30 \text{ Klg.}$$

Das grösste Moment in der Mitte ist

$$M = \frac{Ql}{4} + \frac{ql^2}{8} = \frac{4000 \cdot 5}{4} + \frac{30 \cdot 5^2}{8} = 5100 \text{ Klgmeter.}$$

Die Auflagerdrücke sind

$$A = B = \frac{5000}{2} + \frac{30 \cdot 5}{8} = 2075 \text{ Klgmeter.}$$

Das Moment M also auch wieder

$$M = A\,\frac{l}{2} - \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = 2075 \cdot 2{,}5 - \frac{30 \cdot \overline{2{,}5}^2}{2} = 5100 \text{ Klgmeter (abg.).}$$

**XII.** Zwei an einer Seite eingespannte Träger sollen gleichmässig verteilt, Fig. 147, durch ein Bohlenbelag von $1{,}2^m$ Breite, $p = 300$ Klg. pro $\square^m$, und am Ende $P = 1000$ Klg. Last tragen; wie gross wird das Maximalmoment?

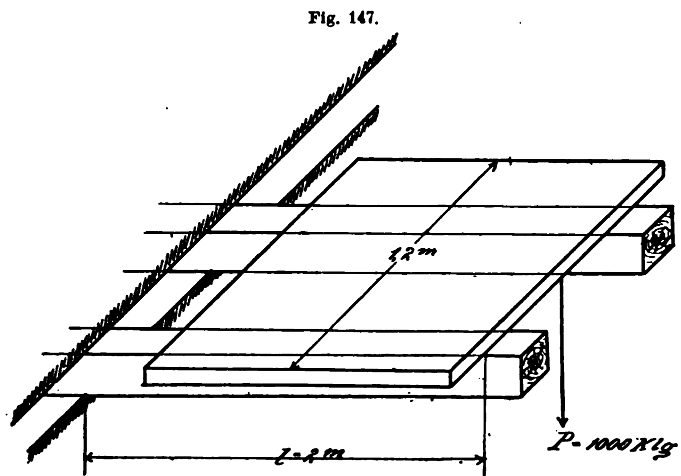
Die tragfähige Fläche ist $2 \cdot 1{,}2 = 2{,}4\,\square^m$, die verteilte Last dieser entsprechend, $q = 300 \cdot 2{,}4 = 720$ Klg.

---

*) S. obige Bemerkung, S. 119.

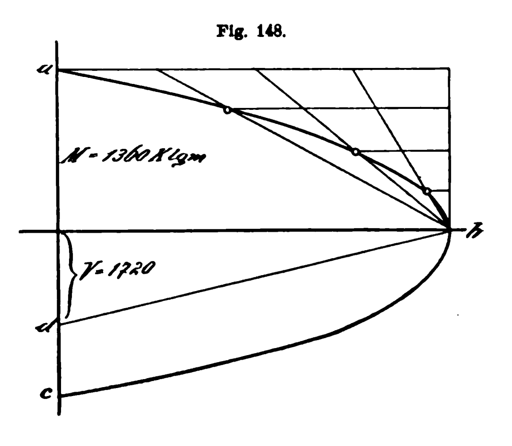
Auf einen Träger kommen also 360 Klg. im Schwerpunktshebelarm $l/_2 = 1^m$ wirkend und $\frac{P}{2} = 500$ am Hebelarm $l = 2^m$ wirkend; somit ist $M_{max} = 360 \cdot 1 + 500 \cdot 2 = 1360$ Klgmeter ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes.

Fig. 147.




Diesem Momente 1360 Klgmeter entsprechend muss der Querschnitt an der eingespannten Stelle berechnet werden, während am freien Ende der Querschnitt, weil das Moment Null, auch theoretisch Null sein kann. Die Belastungskurve ist hier bekanntlich auch eine Parabel ab, Fig. 148, und giebt man den Trägern selbst eine entsprechende Form cb. (Näher. Festigkl.)

Fig. 148.




Gleichzeitig muss der Querschnitt bei der Einspannung so gross sein, dass er der grössten Vertikalkraft, in diesem Falle

$$q + P = 720 + 1000 = 1720 \text{ Klg.}$$

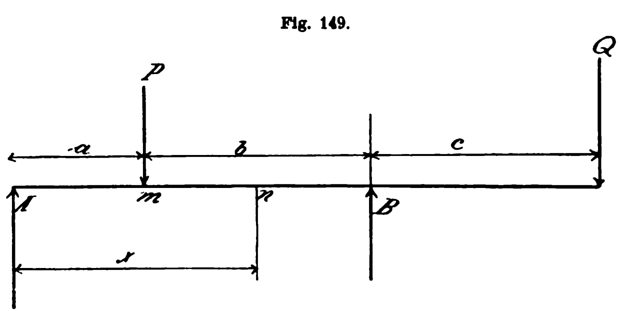
Widerstand leisten kann, od.

---

In umstehender Figur ist das eine Auflager B so verschoben, dass der dort verzeichnete Balken zwischen den Auflagern mit P und ausser-

halb in der Entfernung c mit Q Klg. belastet ist; es stellt sich jetzt die Verteilung der Momente und Vertikalkräfte etwas anders dar, wie in obigen Fällen.

Fig. 149.




Sehen wir vom Eigengewicht ab, dann kann der Fall eintreten, dass die ganze Last $P + Q$ auf B ruht und A entlastet wird, sobald P an b und Q an c im Gleichgewicht, wenn also $Pb = Qc$. Ist das Moment $Qc$ überwiegend dem inneren Momente, dann tritt in A eine negative Reaktion, eine negative Druckkraft, eine Zugkraft ein, mit welcher das Balkenende gehalten werden müsste, damit es nicht in die Höhe klappt.

Betrachtet man B als Drehpunkt und bringt den Balken ausser Gleichgewicht, dann würde A an $a + b$ und Q an c eine Rechtsdrehung veranlassen, $Pb$ eine Linksdrehung, es entstünde wieder Gleichgewicht, wenn $A(a + b) + Qc = Pb$, oder

(59) . . . . . . . . $$A = \frac{Pb - Qc}{a + b}.$$

Das Gleichgewicht um A als Drehpunkt findet statt, wenn

$$Q(a + b + c) + Pa = B(a + b), \text{ oder}$$

(60) . . . . . $$B = \frac{Q(a + b + c) + Pa}{a + b}.$$

Die Anschauung ergiebt auch $A + B = P + Q$ oder

(60a) . . . . . . $$B = P + Q - A.$$

A wird Null, wenn (Gl. 59) $Pb = Qc$, dann folgt nach 60a wie gesagt $B = P + Q$; A wird negativ, wenn $Qc > Pb$.

Das Moment in irgend einem Punkt n ist wieder

(61) . . . . . . . $$M_n = Ax - P(x - a).$$

Wenn $x = a$, dann erhält man das Moment im Angriffspunkt der Kraft P $$M_1 = Aa,$$
wenn $x = a + b$, folgt das Moment in B, welches jetzt nicht wie früher Null wird, sondern $M_2 = A(a + b) - Pb$.

Da nun auch $M_2 = Qc$, so muss $A(a+b) - Pb = Qc$. Setzt man A ein, so findet, weil $A(a+b) - Pb = -Qc$ wird, dass $Qc$ auf der

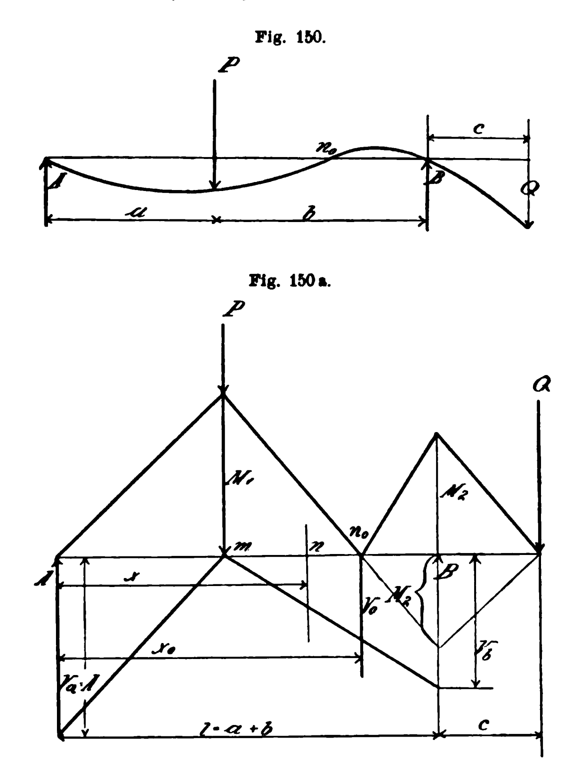



Fig. 150.

Fig. 150 a.

rechten Seite im negativen Sinne aufgefasst werden muss. Hieraus folgt, dass das Moment zwischen A und B Null werden muss. Aus Gl. 61 wird, wenn $M = o$, $x = x_0$ gesetzt

$$x_0 = \frac{Pa}{P - A}, \text{ A eingeführt}$$

$$x_0 = \frac{Pa}{P - \frac{Pb - Qc}{a + b}} = \frac{Pa}{Pa + Qc}(a + b) = \frac{a + b}{1 + \frac{Qc}{Pa}}. \quad (61\text{a})$$

Die Lage des grössten Momentes, welches hier auch in eine Kraftrichtung fällt zwischen A und B, ergiebt sich wie oben, Fig. 130a.

Verbindet man den Punkt m, Fig. 150a, mit den Vertikalkräften in A und B, dann erhält man in $n_0$, dem Schnittpunkt in der Entfernung $x_0$, in welchem $M = o$, eine Vertikalkraft, die sich mit dem Zirkel abgreifen lässt, $V_0$.

Die Rechnung würde ergeben aus $B : b = V_o : x_o - a$

(62) . . . . . . . . $V_o = B \frac{x_o - a}{b}$.

Trägt man, wie in Fig. 150a angegeben, $M_1$ und $M_2$ (nach unten in B) auf, dann findet man $n_o$ bezw. $x_o$ auch durch Konstruktion. Da in $n_o$ keine Biegung der Balkenelemente vorhanden ist, $M = o$, so hat der Balken nur einer Abscheerungs- (Schub-)Kraft Widerstand zu leisten, $V_o$; kann also hier verhältnismässig schwach sein.

Fig. 151.

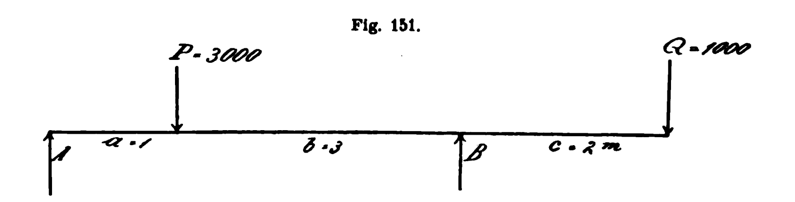
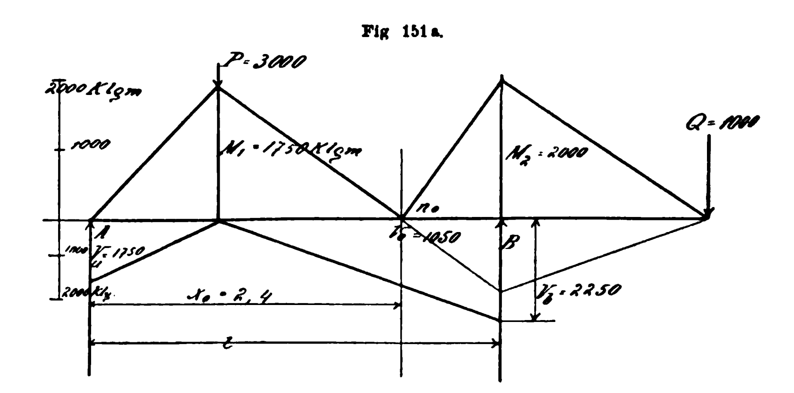



Fig 151a.




**XIII.** In Fig. 151 ist der Balken in der eingeschriebenen Weise verteilt mit $P + Q = 4000$ Klg. belastet.

Die Auflagerdrücke sind, Gl. 59

$$A = \frac{Pb - Qc}{a + b} = \frac{3000 \cdot 3 - 1000 \cdot 2}{1 + 3} = 1750 \text{ Klg.}$$

$$B = 4000 - 1750 = 2250 \text{ Klg.}$$

Das Moment in Angriffspunkt von P

$$M_1 = Aa = 1750 \cdot 1 = 1750 \text{ Klgmeter,}$$

in B ist das Moment

$$M_2 = Qc = 2000 \text{ Klgmeter.}$$

Ferner durch Rechnung oder Zeichnung

$$V_o = B\frac{x_o - a}{b} = 2250\frac{2,4 - 1}{3} = 1050 \text{ Klg.}$$

$$x_o = \frac{a + b}{1 + \frac{Qc}{Pa}} = \frac{4}{1 + \frac{2000}{3000}} = 2,4^m.$$

Bei durchlaufendem Balkenquerschnitt würde man $M_2 = 2000$ Klgmeter in Rechnung für die Dimensionen führen.

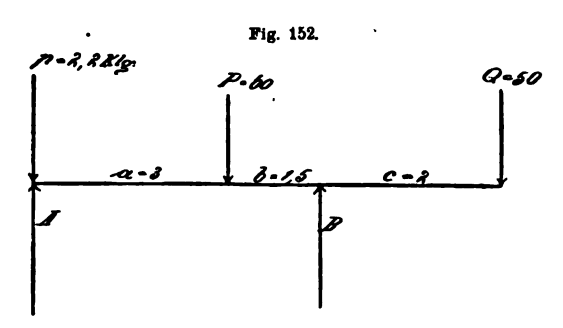
**XIV.** In beistehendem belasteten Träger wird A negativ, denn es ergiebt sich nach Gl. 60

$$A = \frac{Pb - Qc}{a + b} = \frac{60 \cdot 1,5 - 50 \cdot 2}{4,5} = -2,2 \text{ Klg.}$$

Die Trägerbelastung lässt sich demnach in der Weise auffassen, als ob ausser $P = 60$ noch eine Kraft $p = 2,2$ Klg. in derselben Richtung am Ende von a wirkt, das grösste Moment ist dann

$Qc = 100$ Klgmeter
$= p(a + b) + Pb;$

Fig. 152.

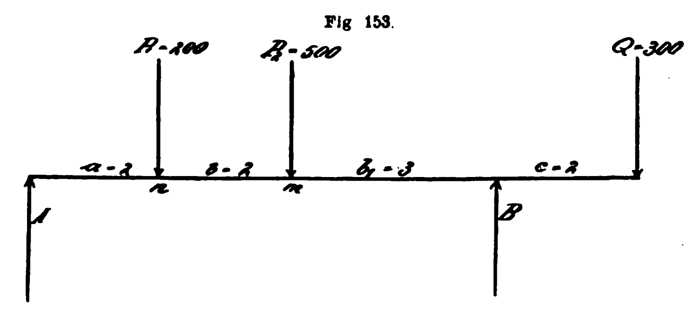



der Balken balanciert auf B, und B hat

$P + Q + p = 112,2$ Klg. Druck auszuhalten.

**XV.** Der in Fig. 153 verzeichnete Träger ist mit zwei Kräften zwischen den Auflagern belastet, ausserhalb B mit $Q = 300$ Klg.

Fig 153.




Die Gleichgewichtsbedingung um B als Drehpunkt ist

$$A(a + b + b_1) + Qc = P_1(b + b_1) + P_2 b_1,$$

hieraus ergiebt sich

$$A = \frac{[P_1(b + b_1) + P_2 Q_1] - Qc}{a + b + \alpha b_1}, \text{ die Zahlen eingeführt,}$$

$$A = \frac{200 \cdot 5 + 500 \cdot 3 - 300 \cdot 2}{7} = 271 \text{ Klg.}$$

$$B = P_1 + P_2 + Q - A = 729 \text{ Klg.}$$

Bemerkung. Betrachtet man in Gl. 60 Pb und Qc als Momentensummen, $[P_1(b + b_1) + P_2 b_1]$, Qc ist auf der rechten Seite nur ein Summand, dann kann man leicht die Gl. 60 bei noch mehr Einzellasten für die Auflagerreaktion A unmittelbar verwenden.

$$(63) \quad \ldots\ldots \quad A = \frac{\Sigma Pb - \Sigma Qc}{l}.$$

Die Momente sind

$M_a = A \cdot a = 271 \cdot 2 = 542$ Klgmeter

$M_m = A(a + b) - P_1 b = 271 \cdot (2 + 2) - 200 \cdot 2 = 684$ Klgmeter

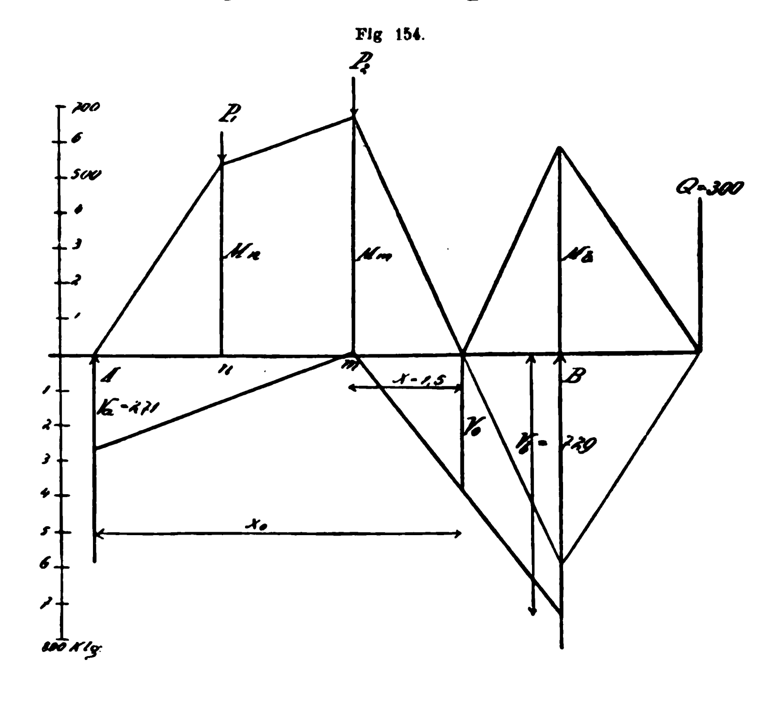
$M_B = Qc = 300 \cdot 2 = 600$ Klgmeter bezw.

$M_B' = A(a + b + b_1) - P_1(b + b_1) - P_2 b_1 = -600$ Klg.

Das Maximalmoment fällt nach m.

Das Maximum $M_B$ wird kleiner als $M_m$.

Fig 154.



M wird Null zwischen m und B, in der Entfernung $x = 1{,}6$ von m; welche Länge man findet aus der Proportion

$$M_m : x = M_B : b_1 - x, \text{ nämlich}$$

$$x = \frac{M_m b_1}{M_B + M_m} = \frac{684 \cdot 3}{684 + 600} = 1{,}6^m;$$

während sich auch $x_0 = a + b + x = 5{,}6^m$ aus

$$0 = A x_0 - P_1 [x_0 - a] - P_2 [x_0 - (a + b)]$$

als Entfernung von A ergiebt.

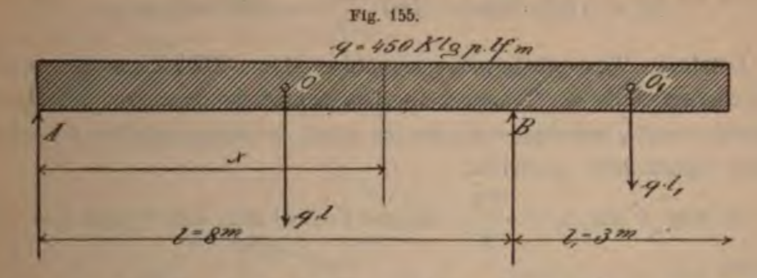
Für die Rechnung genügt bei gleich stark durchlaufenden Trägern $M_m = 684$ Klgmeter.

$V_0$ würde man rechnen, nach Gl. 62, aus der Proportion

$$B : b_1 = V_0 : 1{,}6, \text{ woraus } V_0 = \frac{B \cdot 46}{b_1} = \frac{729 \cdot 1{,}6}{3} = 390 \text{ Klg.}$$

**XV.** Ein Träger, Fig. 155, ist mit $q = 450$ Klg. pro lauf. Meter gleichmässig verteilt belastet, wie verteilen sich Momente und Vertikalkräfte?

Fig. 155.




Den Auflagerdruck A berechnen wir nach der Momentengleichung um B als Drehpunkt,

$$A \cdot l + \frac{1}{2} q \cdot 3 l_1 = q \cdot 8 \cdot \frac{l}{2},$$

in welcher wir das freie Balkenende $3q = 3 \cdot 450 = 1350$ Klg., am Schwerpunkt $0_1$ das aufliegende Balkenende $8 \cdot 450 = 3600$ Klg., an seinem Schwerpunkt 0 wirken lassen und B zum Drehpunkt nehmen. Es folgt

$$A = \frac{1}{2} \frac{8ql - 3ql_1}{l} = \frac{1}{2} \frac{8^2 \cdot 450 - 3^2 \cdot 450}{8} = 1547 \text{ Klg.}$$

B muss den Wert haben

$$B = q(l + l_1) - A = 450 \cdot 11 - 1547 = 3403 \text{ Klg.}$$

Das Moment in der Entfernung x von A ist, Gl. 49, allgemein

$$M_x = A x - q \frac{x^2}{2}.$$

In A ist $M_A = 0$, in B ist das Moment

$$M_B = Al - q\frac{l^2}{2} = 1547 \cdot 8 - 450 \cdot \frac{8^2}{2} = -2024 \text{ Klgmeter, bezw.}$$

$$M_B = q\frac{l_1^2}{2} = 450\frac{3^2}{2} = +2024 \text{ Klg.}$$

Wir fanden oben S. 108, 110 u. f., dass M ein Maximum erreicht, wenn V zu Null wird. Es ist aber Gl. 50

$$V = A - qx_1, \text{ hieraus, Gl. 52, wenn } V = 0 \text{ wird}$$

$$x_1 = \frac{A}{q} = \frac{1547}{450} = 3{,}44^m$$

die Lage des grössten Momentes oberhalb der Balkenachse.

Setzt man $x_1 = 3{,}44$ in $M_x = Ax - q\frac{x^2}{2}$, dann erhält man dieses Moment selbst:

$$M_m = 1547 \cdot 3{,}44 - 450\frac{\overline{3{,}44}^2}{2} = 2659 \text{ Klgmeter.}$$

Letzteren Wert würde man, gegenüber $M_B = 2024$ Klgmeter, in Rechnung ziehen, falls der Träger keine Querschnittsänderungen, der Materialersparnis wegen, erhalten soll, wie es sonst bei allen Brücken von einigermassen Spannweite geschieht.

M wird 0 für $x_0 = \frac{2A}{q}$, welche Formel sich aus $0 = Ax_0 - \frac{qx_0^2}{2}$ ergiebt.

Eine Vergleichung zwischen $x_0$ und $x_1$ zeigt, dass $x_0 = 2\frac{A}{q} = 6{,}88$ noch einmal so gross wie $x_1$ ist.

Aus dem Früheren ist uns nun bekannt, dass die graphische Darstellung der Momente bei gleichmässig verteilten Lasten Kurven (Parabeln) liefert, die wir entweder punktweise, indem wir $x = 1, 2, 3, 3, 4 \ldots.$ setzen und M rechnen oder durch Konstruktion finden. Die Form der Kurve muss eine symmetrische sein, weil sie von ihrer Mitte (grösster Wert d. i. Maximum) gleich weit entfernt, $3{,}44^m$, die Achse schneidet.

Setzt man der Reihe nach $x = 1, 2, 3 \ldots.$, dann würde man erhalten

$$M_1 = A - \frac{q}{2} = 1547 - \frac{450}{2} = 1322$$

$$M_2 = A \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = 1547 - \frac{450 \cdot 4}{2} = 2914$$

$$M_3 = A \cdot 3 - q \frac{3^2}{2} = 2616$$

$$M_4 = 2659 \text{ u. s. w.}$$

$$M_0 = A \cdot 6{,}88 - q \frac{\overline{6{,}88^2}}{2} = 0.$$

$$M_7 = A \cdot 7 - q \frac{7^2}{2} = -196$$

$$M_8 = -2024 \text{ Klgmeter.}$$

Zur Konstruktion bedarf es nur einiger Ausgangs-, Anhaltepunkte. Die Lage des Momentmaximum $x_1 = 3{,}44$ und dieses selbst 2659 Klgmeter und zur Kontrolle $M_B = -2024$.

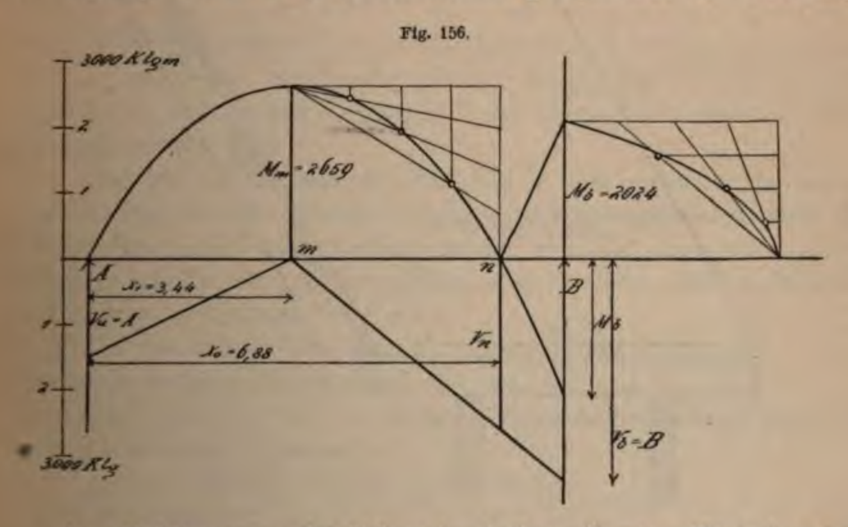
Den negativen Teil schlägt man nach oben, weil man dann Raum unterhalb der Achse zur Auftragung der V-Kräfte erhält.

Diese Vertikalkräfte sind Linien. Aus $V = A - qx$ folgt für $x = 0$, $V = A$, V wird 0 für $x = 3{,}44$, für $x = 8 = l$ erhält man $V = 1547 - 8 \cdot 450 = -2053$, hierzu noch das freie Gewicht $l \cdot q = 3 \cdot 450 = 1350$ addiert, erhält man $-B = 3403$ Klg.

In Fig. 156 sind die Konstruktionen eingetragen.

In n hat der Träger keine Biegung auszuhalten, hingegen wirkt dort noch $V_n$ Klg. Vertikalkraft, aus der Zeichnung ergab sich $V_n = 2570$ Klg.

Fig. 156.

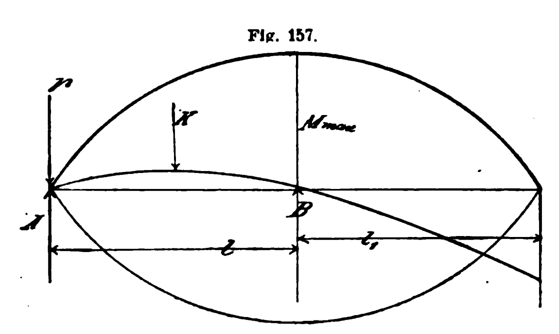



Am stärksten muss der Träger im Auflager B sein. Wie schon angedeutet, ist es nur für grössere Träger nötig (Brückenbau); die Rechnung in der vorstehenden Ausführlichkeit durchzuarbeiten, in den ein-

fachen Fällen der Baupraxis genügt die Bestimmung des grössten Momentes.

Wird $M_B$ im Vergleich zu $M_m$ immer grösser, dann kann schliesslich $M_B$ gleich zu Anfang negativ werden; dieser Fall würde eintreten, wenn A negativ ist, in

Fig. 157.

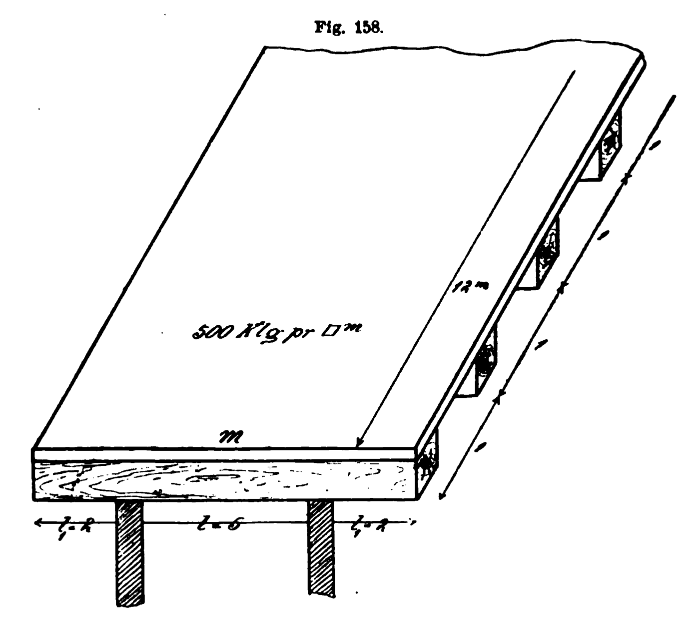


$$M = -Ax - q\frac{x^2}{2}$$

wird dann für $x = 0$, $M = 0$, alle übrigen Werte bleiben negativ, es sind dann besondere Kräfte p und k erforderlich, um, Fig. 157, eine Ausbiegung nach oben zu verhindern.

**XVI.** Es sei ein Raum, Fig. 158, mit 500 Klg. pro □$^m$ belastet, derselbe habe $9^m$ Länge und $12^m$ Breite und sollen zehn Träger die Last

Fig. 158.




gleichmässig tragen. Die Auflager A und B sind so verteilt, dass beiderseitig gleich weit gespannte Freiträger entstehen; wie gross sind die Maximalmomente.

Die Gesamtlast ist $q \cdot 12 \cdot 500 = 54\,000$ Klg., kommt auf einen Träger eine Last von $\frac{54\,000}{10} = 5400$ Klg. und pro lauf. Meter

$$q = \frac{5400}{9} = 600 \text{ Klg.}$$

Zunächst ist hier $A = B = \frac{5400}{2} = 2700$ Klg., dann ist das Moment in m

$$M_m = A\, l/2 - q\,\frac{(l_1 + l/2)^2}{2} = 2700 \cdot 2{,}5 - 600\,\frac{(2 + 2{,}5)^2}{2} = 675 \text{ Klgm.}$$

Die Momente in A und B sind

$$M = \frac{l_1^{\,2}}{2}\, q = 600 \cdot \frac{2^2}{2} = 1200 \text{ Klgmeter.}$$

Letzteres Moment ist für die Berechnung massgebend.

Auch hier kann der Fall eintreten, dass das Moment in der Mitte Null bezw. negativ wird, sobald

$$o = A l/_2 - q\,\frac{(l_1 + l/_2)^2}{2} \text{ oder}$$

$$A l/_2 = q\,\frac{(l_1 + l/_2)^2}{2}, \text{ hieraus, wenn bezw.}$$

$$l_1 \gtreqless \sqrt{\frac{A l}{q}} - \frac{l}{2}.$$

**XVII.** Ein Balken, dessen Eigengewicht $q = 80$ Klg. pro laufender Meter, sei in der beistehenden Weise belastet, Fig. 159, $P_1\, P_2$ und Q wirken als Einzellasten, $P_1$ unter 50°, das Eigengewicht wirkt als gleichmässig verteilte Last.

Zerlegen wir zunächst die 4000 Klg. in eine vertikale und horizontale Komponente, die letztere in Richtung der Balkenachse, so sucht diese den Balken nach rechts zu verschieben; man hat dann nötig mit der gleichen Kraft $p_1 = P_1 \cos\alpha = 4000 \cdot \cos 50° = 4000 \cdot 0{,}643 = 2672$ Klg. nach links zu drücken.

Die Druckkraft $P = P_1 \sin\alpha = 4000 \cdot 0{,}766 = 3100$ wird in Rechnung als Balkenausbiegungskraft gezogen.

Das Auflager A und die Momente der Einzelkräfte sind aus folgenden Gleichungen zu berechnen:

$A \cdot 6 + 1000 \cdot 1{,}5 = 3100 \cdot 4 + 2000 \cdot 2{,}5$,

$A = 2650$ Klg.,

$M_m = A \cdot a = 2650 \cdot 2 = 5300$ Klgmeter,

$M_n = A\,(a + b) - P b = 2650 \cdot 3{,}5 - 3100 \cdot 1{,}5 = 4625$ Klgmeter,

$M_B = Q d = 1000 \cdot 1{,}5 = 1500$ Klgmeter.

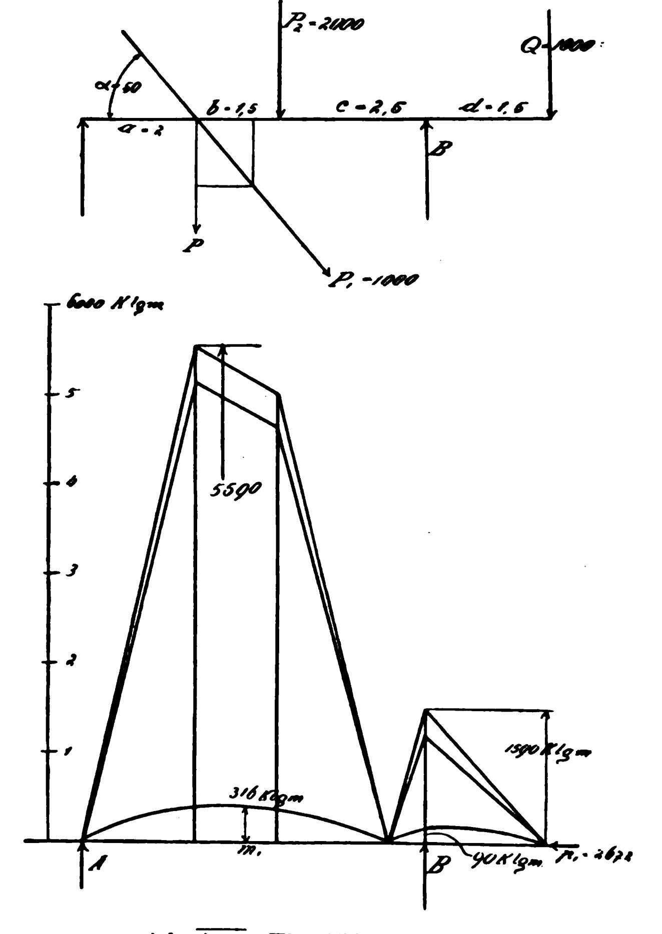
Das Auflager in Bezug auf die gleichmässig verteilte Eigengewichtslast ist aus

$$A_1(a+b+c)+q\frac{d^2}{2}=q\frac{(a+b+c)^2}{2},$$

$$A_1=\frac{80\,(6^2-\overline{1,5}^2}{2\cdot 6}=225 \text{ Klg.}$$

$$B=q\cdot(a+b+c+d)-A=80\cdot 7,5-225=375 \text{ Klg.}$$

Fig. 159.




Bestimmt man sich $\overline{A\,m_1}$, Fig. 159, aus

$$0=A_1-q\,x,\quad x=\frac{A_1}{q},$$

dann findet man die Lage des grössten oberhalb der Achse liegenden positiven Momentes $x = \overline{A m_1} = 2{,}81^m$.

Dieses Moment selbst ist nach

$$M = A_1 x - q \frac{x^2}{2},$$

$$M = 225 \cdot 2{,}81 - 80 \frac{2{,}81^2}{2} = 316 \text{ Klgmeter},$$

während $$M_B = q \frac{d^2}{2} = 80 \frac{1{,}5^2}{2} = 90 \text{ Klgmeter}.$$

Setzt man, wie in Fig. 159 geschehen, beide Momentenkurven zusammen, dann erhält man die Momentenverteilung.

In Rechnung zu ziehen bei gleicher Balkenstärke ist

$$M_{max} = 5300 + 290 = 5590 \text{ Klgmeter}.$$

Zählt man beide Auflager 225 und 2650 zusammen, dann folgt $A = 2875$ Klg. Das Moment in $2^m$ Entf. wird dann unmittelbar

$$M_m = 2875 \cdot 2 - 80 \frac{2^2}{2} = 5590 \text{ Klgmeter}$$

das grösste Trägermoment.

---

## Die Guldin'sche Regel.

Eine sehr interessante Anwendung des Schwerpunktes, welche sich auf die Berechnung von Flächen- und Körperinhalten bezieht, stammt von Guldin.

Die Regel lautet:

Der Inhalt einer von einer Erzeugungslinie, deren Länge l, entstandenen Umdrehungsfläche ist gleich dem Produkt der Linienlänge mit dem Weg $\lambda$, den der Schwerpunkt der Linie bei der Bewegung beschreibt.

$$F = l\lambda. \qquad (64)$$

Der Inhalt eines von einer Erzeugungsfläche f entstandenen Umdrehungskörpers findet sich aus dem Produkt der Fläche mit dem Schwerpunktsweg derselben.

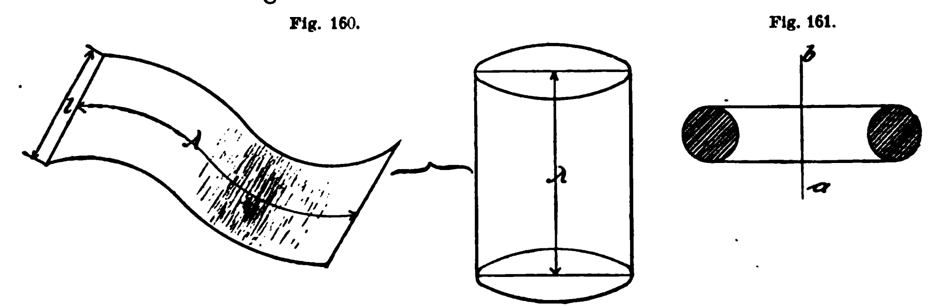
$$V = f\lambda. \qquad (64a)$$

Beide Formeln kann man selbstredend auch auf geradlinige Schwerpunktswege beziehen.

Bewegt sich eine Linie, Fig. 160, den Weg $\lambda$ entlang, so wird die Fläche des dort gezeichneten Bandes beschrieben; ein Cylinder entsteht, wenn sich die Grundfläche, der Kreis f der Höhe $\lambda$ entlang bewegt, der

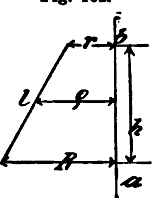
ringförmige Körper, Fig. 161, durch die Bewegung des Kreises um die Achse ab des Ringes.

Fig. 160. Fig. 161.



**Beispiel: I.** Die schiefe zur Achse ab gestellte Linie l bewegt sich um diese Achse und beschreibt die Mantelfläche einer abgestumpften Pyramide. Die Mantelfläche ist

Fig. 162.



$$F = l \cdot 2\,\rho\pi.$$

Da nun $\rho = \frac{R + r}{2}$, $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$, so folgt

$$F = (R + r)\,\pi l = (R + r)\,\pi \sqrt{h^2 + (R - r)^2}.$$

Wenn $r = R$, erhält man den Cylindermantel

$$F = 2\,R\pi l = 2\,R\pi h.$$

Wird $r = 0$, dann entsteht der Kegelmantel

$$F = R\pi l = R\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Ein Zinkdach von $h = 1^m$ Höhe, $2\,R = 3^m$ unteren, $2\,r = 1^m$ oberen (lichten) Durchmesser wiegt wie viel, wenn das Zink zu $\mathfrak{d} = 2^{mm}$ Stärke angenommen wird? Das spez. Gewicht des Zinkes ist $\sigma = 7{,}2$, das absolute Gewicht des Daches nach Gl. 17

$$G = \gamma\sigma V = 1000 \cdot 7{,}2 \cdot V = 7200\,V.$$

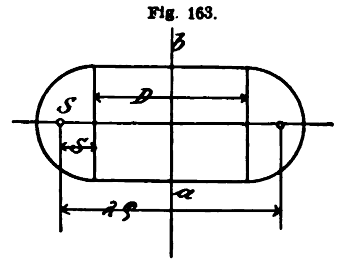
Das Volumen ist

$$V = \mathfrak{d} \cdot F = \mathfrak{d}\,(R + r)\,\pi \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

oder die Zahlen(metermasse) eingeführt, ist

$$G = 7200 \cdot 0{,}002\,(1{,}5 + 0{,}5) \cdot 3{,}14 \sqrt{1 + (1{,}5 - 0{,}5)^2} = 127\ \text{Klg.}$$

Fig. 163.



**II.** Es sei die Oberfläche eines Ringes mit halbkreisförmigem Querschnitt zu berechnen, Fig. 163. Die Länge des halbkreisförmigen Bogens, welcher sich um die Achse ab dreht, ist $l = \frac{d\pi}{2}$, der Weg, den der Schwerpunkt S bei der Drehung

zurücklegt $\mathfrak{d} = 2\,\rho\pi$, die Oberfläche

$$F = \frac{d\pi}{2}\,2\,\rho\pi = d\pi^2\rho.$$

$\rho$ ist aber zusammengesetzt aus der Schwerpunktsentfernung des Bogens

$$s = \frac{2}{\pi}\left(\frac{d}{2}\right) \text{ (S. Beisp. 15, S. 96) und aus } D/2,$$

$$\rho = \frac{D}{2} + \frac{d}{\pi}, \text{ folglich wird}$$

$$F = d\pi^2\left(\frac{D}{2} + \frac{d}{\pi}\right) = \frac{\pi d}{2}\,(\pi D + 2\,d).$$

Wenn $D = 0$, dann erhält man die Oberfläche einer Kugel

$$O = \pi d^2 = 4\,r^2\pi.$$

Fügt man die Oberfläche, Mantel, des inneren Cylinders $\pi D d$ (S. vor. Beisp.) hinzu, dann wird

$$F = \frac{\pi d}{2}\,(\pi D + 2\,d) + \pi D d = \pi d\left[d + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) D\right]$$
$$= 3{,}14\,d\,(d + 2{,}57\,D).$$

**III.** Es sei die Fläche einer aus zwei Halbkreisen zusammengesetzten Linie (wie in Fig. 164 angegeben), welche sich um ab dreht, zu bestimmen. Gegeben sind die drei Durchmesser D, d, $\mathfrak{d}$ und ev. die Höhe H.

Die letztere ist $H = 2R + 2r$, oder da

$$R = \frac{D - d}{2},\quad r = \frac{d - \mathfrak{d}}{2},$$

folgt für $H = D - \mathfrak{d}$.

Die Schwerpunktsentfernungen sind

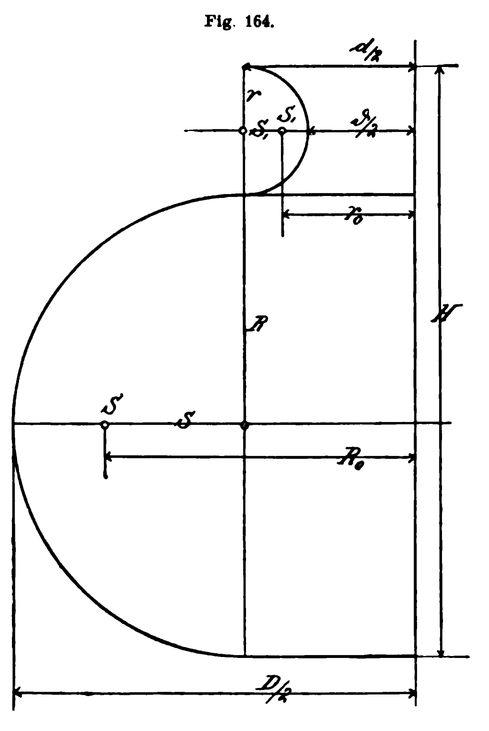
$$s = \frac{2\,R}{\pi},\quad s_1 = \frac{2\,r}{\pi};$$

die Drehungshalbmesser der Schwerpunkte S und $S_1$

$$R_0 = \frac{D}{2} - R + \frac{2\,R}{\pi},$$

$$r_0 = \frac{\mathfrak{d}}{2} + r - \frac{2\,r}{\pi}.$$

Fig. 164.



Die gesamte während der Drehung beschriebene Fläche

$$F = \frac{2\,R\pi}{2} \cdot 2\,R_0\,\pi + \frac{2\,r\,\pi}{2} \cdot 2\,r_0\,\pi \text{ oder}$$

$$F = 2\,\pi^2\,(R R_0 + r r_0),$$

für R und r die Werte substituiert,

$$F = 2\,\pi^2 \left[R_0\,\frac{D-d}{2} + r_0\,\frac{d-\delta}{2}\right],$$

da nun $R_0$ und $r_0$ auf D, d, $\delta$ zurückgeführt, sind

$$R_0 = \frac{1}{2}\left[D - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(D-d)\right],\quad r_0 = \frac{1}{2}\left[\delta + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(d-\delta)\right],$$

so wird jetzt die Fläche F nach einiger Reduktion

$$\text{(a) } F = \pi\left\{(D-d)\left[D + d\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] + (d-\delta)\left[\delta + d\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]\right\},$$

oder

$$F = 3{,}14\left\{(D-d)\,[D + 0{,}57\,d] + (d-\delta)\,[\delta + 0{,}57\,d]\right\},$$

die Klammern gelöst und die Formel auf H zurückgeführt, folgt auch

$$F = \pi\left\{(D-\delta)(D+\delta) - d\,(D-\delta)\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \text{ oder}$$

$$\text{(b) } F = \pi H\left[D + \delta - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) d\right] = 3{,}14\,H\,(D + \delta - 0{,}43\,d).$$

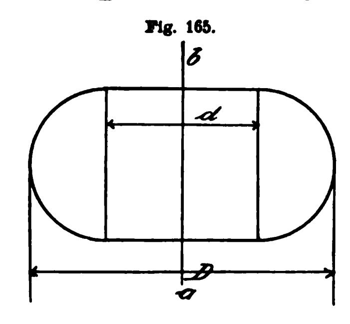


Fig. 165.

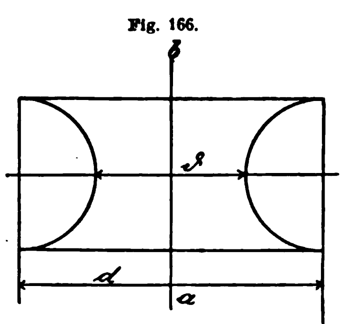


Fig. 166.

Die Formel (a) stellt zwei gleiche Flächen dar, Fig. 165

$$\text{(c) } F_1 = \pi(D-d)\left[D + d\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] \text{ und Fig. 166}$$

$$(c_1)\, F_2 = \pi\,(d-\delta)\left[\delta + d\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right].$$

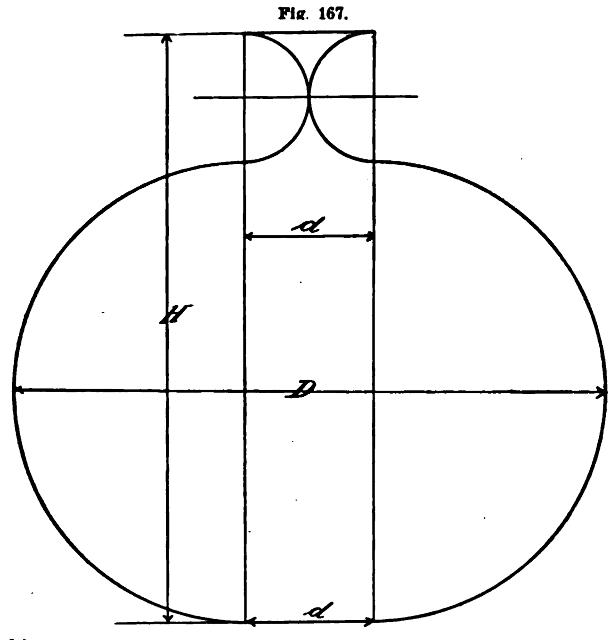
$F_1$ wird $F_2$ gleich, wenn $D = d$, und für d, $\delta$ in $F_1$ gesetzt werden; beide werden Kugeloberflächen, wenn in $F_1$, $d = 0$; in der Formel für $F_2$, $\delta = 0$ gesetzt wird, man erhält

$$F_1 = \pi D^2 \text{ bezw. } F_2 = \pi d^2.$$

Setzt man in (a) $\mathfrak{S} = 0$, dann erhält man die Umdrehungsfläche, wie sie Fig. 167 im Durchschnitt darstellt

$$F = \pi \left\{ (D - d) \left[ D + d \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] + d^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] \right\},$$

Fig. 167.




oder aus (b)

$$F = 3{,}14 \{ (D - d) [D + 0{,}57\, d] + 0{,}57\, d^2 \} = 3{,}14\, H\, (D - 0{,}43\, d)$$

Aus den Formeln (c) und ($c_1$) lassen sich die Kugeloberflächen der in umstehender Figur zusammengestellten Halbkreisdurchschnitte aufstellen,

$$F = \pi \left\{ (D - d) \left[ D + d \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] + (d_1 - \mathfrak{S}) \left[ \mathfrak{S} + d_1 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] \right\}.$$

**IV.** Fig. 169 ist der Durchschnitt eines Ringes mit dreieckigem Querschnitt; es soll das Volumen berechnet werden. Die Drehung der Fläche $f = \frac{ah}{2}$ findet um die Achse xx statt.

Die Entfernung des Schwerpunktes S von xx ist $\rho = d/2 + \frac{1}{3}\, a$, das Volumen

$$V = f \cdot 2\, \rho \pi = \frac{2\, \pi a h}{2} \left( d/2 + \frac{a}{3} \right) = \pi \frac{ah}{2} \left( d + \frac{2}{3}\, a \right).$$

Für $d = 0$ wird, Fig. 170, $V = \frac{\pi}{3}\, a^2 h$.

Diese Formel stellt einen Doppelkegel dar, $\pi a^2$ ist die Grundfläche, $\frac{h}{2}$ die Höhe eines derselben; setzt man $2a = D$, $h = 2H$, dann

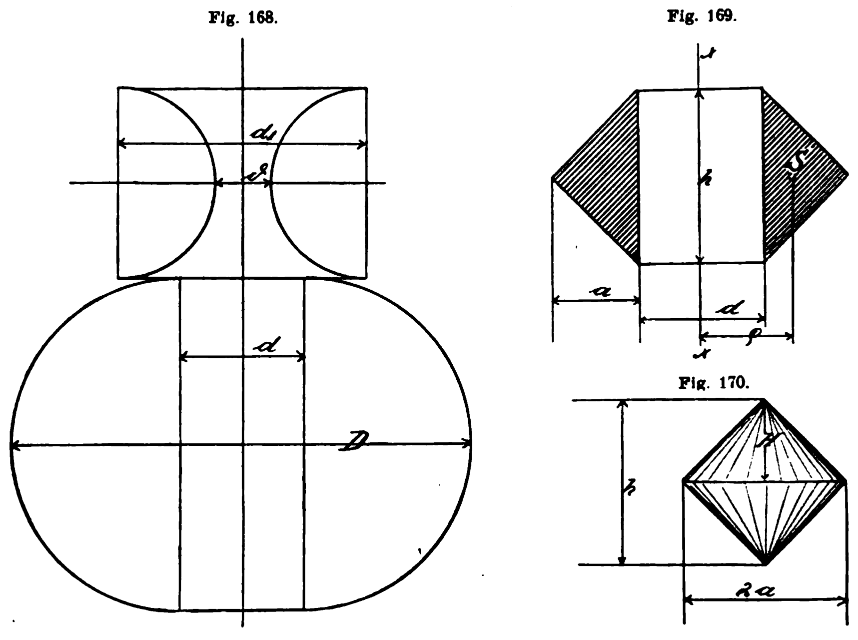


Fig. 168. Fig. 169. Fig. 170.

erhält man

$$V = 2 \cdot \frac{H}{3} \cdot \frac{\pi D^2}{4},$$

das doppelte Produkt der Grundfläche mal $^1/_3$ Höhe.

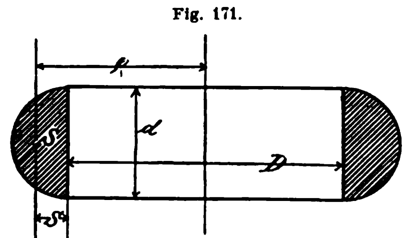


Fig. 171.

**V.** Das Volumen eines Ringes mit halbkreisförmigem Querschnitt, Fig. 171, zu finden.

Der halbe Kreisquerschnitt ist $f = \frac{\pi d^2}{8}$, der Schwerpunktsweg $\lambda = 2\rho\pi$, somit der Inhalt

$$V = 2\rho\pi \frac{\pi d^2}{8}.$$

Der Schwerpunktsabstand von der Achse, der Radius $\rho$ (S. S. 97, Beisp. 16), ist

$$\rho = \frac{D}{2} + s = \frac{D}{2} + {}^4/_3 \frac{\left(\frac{d}{2}\right)}{\pi} = \frac{D}{2} + {}^2/_3 \frac{d}{\pi};$$

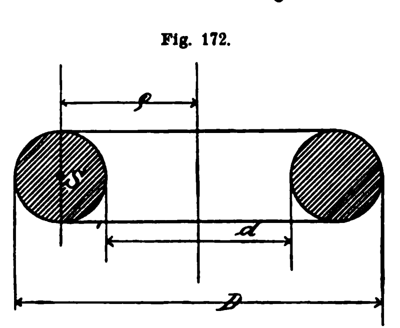
substituiert man $\rho$, dann findet sich nach einiger Reduktion

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \frac{3\pi D + 4d}{6} = \frac{\pi d^2}{24} (3\pi D + 4d).$$

Setzt man $D = 0$, dann folgt der Kugelinhalt $V = \frac{\pi d^3}{6}$.

**VI.** Das Volumen eines Ringes vom kreisförmigen Querschnitt, Fig. 172, ist wieder $V = f\,2\rho\pi$. Der Querschnitt f ist, weil $\frac{D-d}{2}$ der Durchmesser des Kreises,

Fig. 172.



$$f = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2;$$ hiernach wird

$$V = 2\rho\pi\frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2,$$

setzt man noch

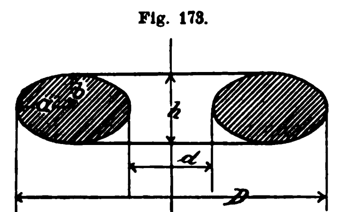
$$\rho = \frac{d}{2} + \frac{1}{2}\frac{D-d}{2}$$

ein, dann findet man nach einiger Reduktion

$$V = \frac{\pi^2}{32}(D^2 - d^2)(D - d) = \frac{\pi^2}{32}(D-d)^2(D+d).$$

**VII.** Hat, wie Fig. 173 darstellt, der Ring einen elliptischen Querschnitt, dann verändert sich nur in voriger Formel der Querschnitt f, welcher bei der Ellipse sich durch die Formel $f = ab\pi$ ausdrückt. In dieser ist

Fig. 173.



$$b = \frac{h}{2},\quad a = \frac{1}{4}(D-d),$$ somit, weil wieder

$$\rho = \frac{d}{2} + \frac{1}{4}(D-d),$$ wird

$$V = \frac{1}{4}(D-d)\frac{h}{2}\pi \cdot 2\pi\frac{D+d}{4}$$ oder zusammengezogen,

$$V = \frac{\pi^2}{16}h(D^2 - d^2).$$

Wenn $h = \frac{D-d}{2}$, d. h. $a = b$, erhält man wieder den Kreisring.

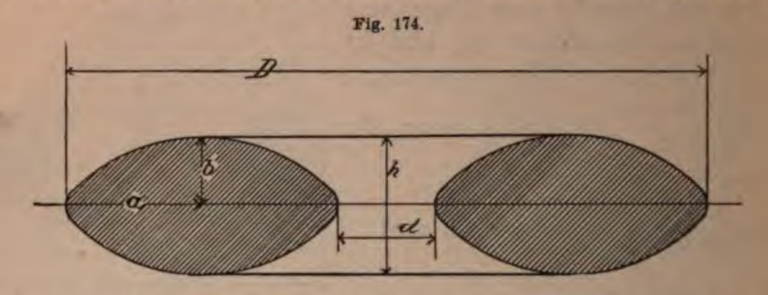
Für $h = \frac{D-d}{4}$, also h halb so hoch wie der Kreisring ausgeführt, er-

hält man das halbe Volumen des Kreisringes

$$V = \frac{\pi^2}{64} (D - d)^2 (D + d).$$

**VIII.** Es stellt Fig. 174 einen Ringquerschnitt dar, welchen wir uns aus vier Parabelflächen zusammengesetzt denken wollen. Der Flächen-

Fig. 174.



inhalt eines solchen Parabelviertels ist bekanntlich $^2/_3$ ab, somit der Ringquerschnitt $f = 4 \cdot {}^2/_3\, ab$.

Da nun $a = {}^1/_4 (D - d)$, $b = h/2$ und $\rho$ wieder

$$\frac{d}{2} + \frac{1}{4}(D - d) = \frac{D + d}{4},$$ so wird das Ringvolumen

$$V = 2\pi \frac{D + d}{4} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \frac{h}{2} \frac{1}{4} (D - d)$$ oder

$$V = \frac{1}{6} \pi h (D^2 - d^2).$$

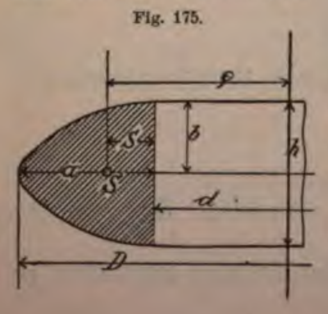
Wird der Querschnitt so angeordnet, dass in den beiden stumpf aneinander stossenden Parabeln

$$h = \frac{D - d}{2},$$ so wird

$$V = \frac{1}{12} \pi (D - d)(D^2 - d^2),$$

also leichter wie ein Kreisring mit gleichen Hauptdimensionen.

Fig. 175.



**IX.** Wählt man, Fig. 175, den halben Ringquerschnitt der vorigen Figur, also zwei Parabelflächen, $f = 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{h}{2} \frac{D - d}{2}$, und berücksichtigt, dass der Schwerpunktsabstand

$$s = a - \frac{3}{5} a = \frac{2}{5} a = \frac{2}{5} \frac{D - d}{2} = \frac{D - d}{5}$$

(S. S. 98, Beisp. 18, $x_0 = {}^3/_5\, x = {}^3/_5\, a$),

dann wird der Ringinhalt

$$V = \frac{h}{3}(D - d)\, 2 \cdot \pi \left(\frac{d}{2} + \frac{D - d}{5}\right), \text{ oder}$$

$$V = \frac{\pi}{15} h (D - d)\,(2D + 3d).$$

Setzt man $d = 0$, dann findet sich das Volumen eines Parabelwulstes, Fig. 176,

$$V = \frac{2\pi}{15} hD^2.$$

Würde man $h = D$ wählen, dann folgt

$$V = \frac{2 \cdot \pi}{15} D^3.$$

Fig. 176.

Der Inhalt zweier stumpf aneinander stossenden Paraboloide die gleichen Bezeichnungen D und h beibehalten, ist aber

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{D}{2} = \frac{\pi}{8} h^2 D,$$

wenn wieder $h = D$, so folgt

$$V = \frac{\pi}{8} D^3.$$

**X.** Vergleichung der verschiedenen vorstehenden Ringvolumina unter sich.

**A.** Es seien für $D = 1{,}00^m$, $d = 0{,}6^m$, $h = 0{,}1$ resp. $h = 0{,}2^m = \frac{D - d}{2}$, die Ringgewichte in den Beispielen 6, 7, 8 zu berechnen, wenn ein steinernes Material, dessen spez. Gewicht $\sigma = 2$ sein möge, zu Grunde gelegt wird.

Das Volumen des Kreisringes (mit kreisförmigem Querschnitt, Beispiel 6) ist

$$V = \frac{\pi^2}{32}(D^2 - d^2)(D - d) = \frac{\overline{3{,}14}^2}{32}(1 - \overline{0{,}6}^2)(1 - 0{,}6) = 0{,}08 \text{ Kubm.},$$

das Gewicht des Steinringes

$$G = 1000\,\sigma V = 1000 \cdot 2 \cdot 0{,}08 = 2000 \cdot 0{,}08 = 160 \text{ Klg.}$$

Das Volumen des Ringes mit elliptischem Querschnitt, Beispiel 7, wenn $h = 0{,}1^m$ angenommen wird

$$V = \frac{\pi^2}{16} h (D^2 - d^2) = \frac{\overline{3{,}14}^2}{16} 0{,}1\,(1 - \overline{0{,}6}^2) = 0{,}04,$$

das Gewicht, halb so schwer wie der Kreisring

$$G = 2000 \cdot 0{,}04 = 80 \text{ Klg.}$$

Der Ring mit parabelförmigem Querschnitt, Beispiel 8, wiegt, wenn $h = 0{,}1$,

$$G = 2000 \cdot \frac{1}{6} \pi \cdot h (D^2 - d^2) = 2000 \frac{3{,}14}{6} 0{,}1 (1 - 0{,}6^2)$$
$$= 2000 \cdot 0{,}033 = 66 \text{ Klg.},$$

ist also leichter wie der elliptische Ring bei gleichen Hauptdimensionen, nimmt man $h = 0{,}2$, dann findet man $G = 2000 \cdot 0{,}067 = 134$ Klg.

**B.** Vergleicht man die beiden Ringe in Beisp. 5 und 9 miteinander und nimmt, um gleiche Hauptdimensionen zu erlangen, in Beisp. 5, $D = 0{,}6$, $d = 0{,}2$, dann erhält man

$$V = \frac{\pi d^2}{24} (\pi D + 4 d) = 0{,}053;$$
$$G = 2000 \cdot 0{,}053 = 106 \text{ Klg.}$$

In Beisp. 9, $D = 1$, $d = 0{,}6$, $h = 0{,}2$ gesetzt, ergiebt sich

$$V = \frac{\pi}{15} h (D - d) (2 D + 3 d) = 0{,}043, \text{ somit}$$
$$G = 2000 \cdot 0{,}043 = 86 \text{ Klg.}$$

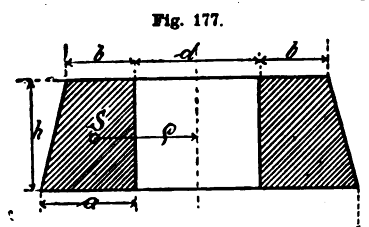
**C.** Einer Vergleichung der beiden Parabelvolumina, Fig. 176 mit dem Kugelvolumen $V = \frac{\pi D^3}{6}$, wenn man in ersteren $h = D$ annimmt, ergiebt die Inhalte:

Kugel $V = \frac{\pi}{6} D^3 = 0{,}52 D^3$,

Parabelwulste, Fig. 176, $V = \frac{2 \pi}{15} D^3 = 0{,}42 D^3$,

Paraboloid, $V = \frac{\pi}{8} D^3 = 0{,}39 D^3$.

Fig. 177.




**XI.** Das Volumen eines Ringes aus der Umdrehung einer Trapezfläche, Fig. 177, um eine Achse zu finden.

Die Umdrehungsfläche ist $F = \frac{a + b}{2} h$, der Umdrehungshalbmesser $\rho = d/2 + s$, der Schwerpunktsabstand*) $s = {}^1/_3 \frac{b^2 + a^2 + ab}{a + b}$,

*) Den Schwerpunktsabstand s findet man, wenn wir das Trapez in ein Dreieck $f_1 = \frac{(a - b) h}{2}$, und in ein Rechteck $f_2 = bh$ zerlegen. Die Entfernungen

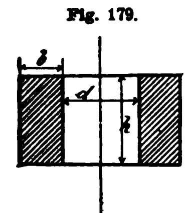
das Volumen

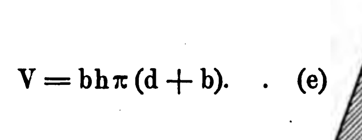
$$V = F\,2\rho\pi = \frac{a+b}{2}\,h\,2\pi\left[{}^1/_3\,\frac{b^2+a^2+ab}{a+b}+\frac{d}{2}\right] \text{ oder}$$

$$V = h\pi\left[\frac{d}{2}(a+b)+{}^1/_3\,(b^2+a^2+ab)\right]. \quad \dots \quad (d)$$

Setzt man $a = b$, so erhält man das Volumen eines Ringes mit rechteckigem Querschnitt

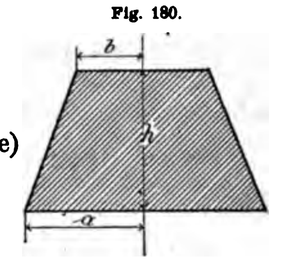
Fig. 179.





$$V = bh\pi\,(d+b). \quad . \quad (e)$$

Fig. 180.



Wenn $b = 0$, dann erhält der Ring dreieckigen Querschnitt (S. S. 142, Fig. 169 und 170) und es resultiert dieselbe Formel wie oben S. 141,

$$V = \frac{ah\pi}{2}(d+{}^2/_3\,a). \quad \dots \dots \quad (f)$$

Wenn $d = 0$, so entsteht ein gerader abgestumpfter Kegel, Fig. 180,

$$V = \frac{h\pi}{3}(b^2+a^2+ab); \quad \dots \dots \quad (g)$$

für $b = 0$, der gerade Kegel

$$V = a^2\pi\frac{h}{3}; \quad \dots \dots \quad (h)$$

für $a = b$ der Cylinder

$$V = \pi a^2 h. \quad \dots \dots \quad (i)$$

---

der Schwerpunkte der Teilflächen $f_1\,f_2$ sind von der Drehachse xx, $x_1 = b + \frac{a-b}{3}$; $x_2 = b/2$, sonach die Schwerpunktsgleichung

$f_1 s_1 + f_2 s_2 = sF$, hieraus der Abstand s,

$$s = \frac{\frac{(a-b)h}{2}\left[b+\frac{a-b}{3}\right]+\frac{b}{2}bh}{\frac{a+b}{2}h} = {}^1/_3\,\frac{b^2+ab+a^2}{a+b}.$$

Fig. 178.

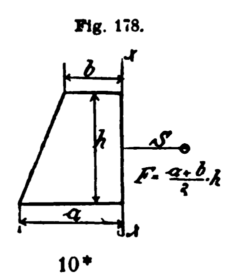
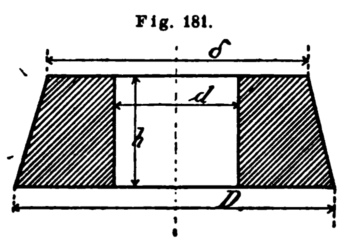


Fig. 181.



Führt man in vorstehende Formeln die Bezeichnungen der Fig. 181 ein, und setzt

$$b = \frac{\mathfrak{D} - d}{2}, \quad a = \frac{D - d}{2},$$

dann erhält man für den Ring mit trapezförmigem Querschnitt

$$(d_1) \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{\pi h}{12} (\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{D} D + D^2 - 3\, d^2).$$

Für ein Rechteck im Querschnitt, $D = \mathfrak{D}$,

$$(e_1) \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{\pi h}{4} (D^2 - d^2).$$

Für ein Dreieck im Querschnitt, $\mathfrak{D} = d$,

$$(f_1) \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{\pi h}{12} (D - d)(D + 2d) = \frac{\pi h}{12} (D^2 + dD - 2d^2).$$

Wird $d = 0$ in Gl. $(d_1)$, so entsteht der abgestumpfte Kegel,

$$(g_1) \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{\pi h}{12} (\mathfrak{D}^2 + D\mathfrak{D} + D^2);$$

wenn hierin $\mathfrak{D} = 0$, der gerade Kegel,

$$(h_1) \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{\pi h}{12} D^2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{\pi D^2}{4};$$

für $\mathfrak{D} = D$ in $(g_1)$ gesetzt, der Cylinder,

$$(i_1) \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{\pi h D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} h.$$

---

## Grundgesetze der Reibung.

Wir sind genötigt, um die weiter unten folgenden Anwendungen und Erweiterungen der vorstehenden Grundsätze ausführlicher behandeln zu können, ein Kapitel einzuschalten, welches uns Aufschluss geben soll über das Wesen der Hindernisse, Widerstände, die sich einer etwaigen Bewegung entgegen stellen, wenn das Gleichgewicht aufgehoben wird, oder besser gesagt, aufgehoben werden soll durch eine Kraftwirkung. —

Ein Körper kann, wenn er in Bewegung ist, durch eine unmittelbare Kraftwirkung, welche direkt auf ihn einwirkt, zurückgehalten werden, der sich bewegende Körper muss diese Kraft mit überwinden und die eigentliche bewegende Kraft ist dann die Differenz beider. Ausserdem kann ein sich bewegender Körper indirekt zurückgehalten werden, indem er

in dem Material, welches ihn umgiebt, oder auf welchem er sich bewegt, einen Widerstand findet; die Kraft des letzteren wirkt selbstredend der treibenden auch entgegen, die Bestimmung derselben ist aber oft mit Schwierigkeiten verbunden, denn sie kann momentan grösser oder kleiner werden, je nach der Oberfläche, Beschaffenheit des Körpers, oder der den Körper einschliessenden Materie, oder der Beschaffenheit des Materials, auf dem sich der Körper bewegt. Man nennt sie Reibung, Reibungswiderstand, Widerstand. Sie kann wie gesagt hindernd sein, aber auch zur Ursache der Bewegung werden. —

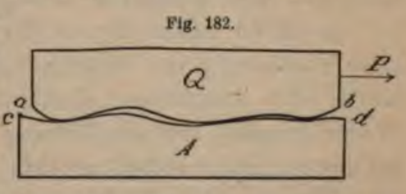
Eine freie Bewegung würde die im luftleeren Raume sein, denn selbst die Luft wirkt schon hindernd auf den Körper ein, ebenso das Wasser, noch mehr aber eine Unterlage, auf welche der Körper sich bewegen soll, ob dieses eine gerade Ebene oder ob sie gekrümmt wie bei einem Zapfen ist, bleibt sich gleich, bei der rollenden Bewegung ist die Reibung wohl geringer als wenn der Körper gleitet oder rutscht, immerhin aber fühlbar vorhanden.

Es würde uns Schwierigkeiten verursachen, einen glatten Berg hinauf zu steigen, wenn keine Reibung vorhanden, ebenso wirkt die Reibung als Bewegungsursache zwischen den Eisenbahnwagen und den Schienen. —

In was besteht nun das Wesen der Reibung, wie kommt es, dass zwei aufeinander liegende Körper zwischen den Berührungsflächen eine Kraftanstrengung zur Bewegung nötig haben? Jedenfalls weil ihre Oberflächen rauh sind, weil sie Erhöhungen und Vertiefungen haben, die gleichsam sägeartig ineinander greifen; je stärker diese sägeartigen Erhöhungen aufeinander gepresst werden, durch eine äussere Kraft oder durch das Körpergewicht, um so mehr Kraft (Reibungswiderstand) gehört dazu, sie gegenseitig zu verschieben.

Es seien A und Q zwei sich berührende Körper. Q soll auf A verschoben werden, hierbei wird Q von einer Kraft oder seinem eigenen Gewicht Q Klg. auf A gepresst; die Oberflächen der Berührungsebenen ab und cd, die gerade oder krumm, gebogen sein können, sind so rauh, dass die Erhöhungen und Vertiefungen gegenseitig besonders merklich sind.

Fig. 182.




In was besteht nun die eigentliche Verschiebung oder Bewegung von Q auf A? Offenbar in einer immerwährenden Hebung der Last Q über jedes einzelne Hindernis hinweg. Haben die Hindernisse einzeln die Höhen $h_1$ $h_2$ $h_3$ $h_4$ ...., dann ist die Arbeitsleistung, welche während der Be-

wegung von Q auf A ausgeübt werden muss,

$$Qh_1 + Qh_2 + Qh_3 + Qh_4 + \ldots = Q(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots).$$

Nennen wir die dieser Arbeit entsprechende Zugkraft P und s den Weg, beide durch den Schwerpunkt gedacht, auf welchem entlang der Körper befördert werden soll, so steht der obigen Arbeit die durch Ps dargestellte gegenüber, und muss Gleichgewicht stattfinden, wenn

(a) . . . . $Q(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots) = Ps$

oder die Bezeichnung eingeführt:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \ldots \Sigma h,$$

(b) . . . . . $Q\Sigma h = Ps.$

Für die praktischen Anwendungen ist es nun bequemer P abhängig von Q auszudrücken. Setzen wir darum

**(65)** . . . . . . . . . $\mathbf{P = \varphi Q}$

und nennen $\varphi$ den Reibungskoefficient, das ist eine Zahl, welche angeben soll, um wieviel P grösser oder kleiner als Q ist; dann folgt, P in Gl. (b) eingesetzt,

$$Q\Sigma h = \varphi Qs \text{ oder}$$
$$\Sigma h = s\varphi, \text{ hieraus findet sich}$$

(c) . . . . . . . . . . $\varphi = \frac{\Sigma h}{s}.$

Für eine Weglänge $s = 1$ ist hiernach der Reibungskoefficient der Summe der Erhöhungen gleichzusetzen, nämlich

(66) . . . . . . . . . $\varphi = \Sigma h.$

Wir nennen nun eine Fläche glatt, als Gegensatz zu einer rauhen Oberfläche, wenn wir keine oder kaum merkliche Erhöhungen und Vertiefungen durch das Gesicht oder das Gefühl mit der Hand wahrnehmen. Würden wir selbst bei den glattesten Oberflächen ein Mikroskop zu Hülfe nehmen, dann dürften wir uns doch noch von Unebenheiten überzeugen, die schon eine genügende Ursache zu Reibungswiderständen abgeben.*)

In Gl. 66 haben wir von der Reibungsfläche ganz abgesehen, weil diese unabhängig von der Grösse des Reibungswiderstandes ist. Die sichtbaren oder unsichtbaren Unebenheiten sind in der Längsrichtung des Weges gedacht, der die Reibung erzeugende Druck ist immer derselbe, bei grosser Fläche verteilt er sich, bei kleiner konzentriert er sich, im letzteren Falle wird die Fläche mehr aushalten müssen, stärker beansprucht, abgerieben werden als im ersteren. Manche Körper haften (adherieren)

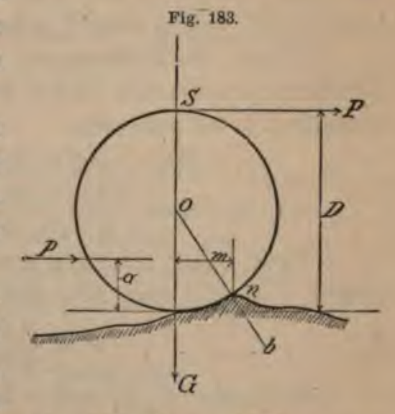
*) Vergleicht man einen Bienenstachel mit einer guten Nähnadel, dann ist unter dem Mikroskop die letztere gegenüber dem Bienenstachel rauh zu nennen.

auch stärker aneinander, hier ist der Reibungswiderstand grösser, besonders wenn die Körper erst aus dem Ruhezustand in Bewegung gesetzt werden. Ist überhaupt ein Körper erst in Bewegung, dann trägt seine Masse, die ihn, um den Ausdruck zu gebrauchen, im Schwung erhält, ein Wesentliches zur Überwindung der Widerstände mit bei. Man unterscheidet darum auch Reibung der Ruhe und Bewegung.

Je nach der Lage der Fasern, namentlich bei Holz, ist der zu überwindende Widerstand, wie leicht einzusehen, grösser oder geringer, man unterscheidet gewöhnlich gekreuzte (#) oder gleich oder parallellaufende (||, =) Fasern. —

Wir kennen nur ein Mittel, um die Reibung zu verringern, aber nicht zu beseitigen, das ist, dass wir die Vertiefungen zwischen den sich bewegenden Oberflächen mit einer Flüssigkeit ausfüllen, schmieren, ölen, mit Wasser, Seife, Fett, Öl, je nach dem Material der Reibungsflächen. Eine Flüssigkeit lässt sich nicht zusammendrücken, ein Entweichen seitlich ist weniger denkbar, weil verschiedene direkte Berührungen immerhin einen geschlossenen Flüssigkeitsraum veranlassen, man hat also bei der Bewegung mehr die Flüssigkeitsteile zu trennen, wodurch die Überwindung der Reibung wesentlich erleichtert wird. — Die Arbeit, welche zwei aufeinander gleitende Körper, gleitende Reibung, benötigen, lässt sich allerdings auch noch dadurch verringern, dass man zwischen den Berührungsflächen, Rollen, Walzen einschiebt. Dadurch entsteht aber nur eine andere Art der Reibung, die rollende, Wälzungsreibung, welche einesteils wieder abhängig ist von der Oberflächenbeschaffenheit der wälzenden Körper, anderenteils aber auch vom Rollendurchmesser. Je kleiner eine solche Walze, um so grösser wird der Widerstand, hohe Walzen, beispielsweise hohe Wagenräder bei Wagen, erleichtern den Betrieb.

Fig. 183.




Einen Körper wälzen, rollen, heisst ihn auf einer sogenannten glatten oder unebenen Unterlage um seine Schwerpunktsachse drehend fortbewegen, ohne dass er gleitet, rutscht.

Der Körper habe selbst Erhöhungen oder Vertiefungen von der Grösse $h_1$ (im Mittel) auf seiner Oberfläche, und wollen wir annehmen, Fig. 183, er stehe vor einer Unebenheit, Erhöhung der Unterlage; damit er nun

von der Kraft P am Hebelarm $a + h_1$ weiter gerollt werden kann, muss das Moment Gm, wenn G das im Schwerpunkt angreifende Gewicht ist, überwunden werden. Je geringer die Unebenheiten der Unterlage, um so kleiner wird m, um so mehr fällt (bei ruhenden Körper) die Richtung der Kraft G durch n.

Die Gleichgewichtsbedingung um n als Drehpunkt ist also

(d) . . . . . . . . $P(a + h_1) = Gm.$

Damit kein Rutschen entsteht, muss, abgesehen von der schiefen Richtung on, die wir bei den angenommen sehr kleinen Erhöhungen vernachlässigen wollen,

$$\varphi < \frac{P}{G} \text{ (S. Gl. 65) d. h. } P > G\varphi \text{ sein.}$$

Hierin sei $\varphi$ der entsprechende Reibungskoefficient, gleichlautend mit der Gl. 65.

P soll also nicht allein den Körper über die Unebenheiten hinwegheben, den Körper aus dem stabilen in den labilen Zustand und wieder in den stabilen u. s. w. versetzen, sondern P soll zugleich auch verhindern, dass der Körper nicht rutscht; ist dies der Fall, dann findet eine Drehung um o nach links oder beim Abrutschen bei n eine Drehung um o nach rechts statt.

Würde $P = G\varphi$, dann müsste Gleiten stattfinden, es muss also um dies zu vermeiden, um die Reibung zu vergrössern, damit, wie oben angedeutet, kein Abrutschen stattfinden kann, $P > G\varphi$ sein. Um nun diese Ungleichheit zu vermeiden, setzen wir

(e) . . . . . . $P - c = G\varphi$ oder $P = G\varphi + c$

und denken uns c als eine beliebige Zahl, die event. auch ein Bruch sein kann, durch welche aber P jedenfalls grösser als $G\varphi$ wird.

Soll nun ein Fortbewegen stattfinden im Sinne der Wälzung ohne Rutschen, so muss den beiden Bedingungen (d) und (c) Genüge geleistet werden, d. h. es muss sein

$$Gm + G\varphi = P(a + b_1) + P - c \text{ oder}$$

$$P = \frac{G(m + \varphi) + c}{a + h_1 + 1}.$$

a kann immer abhängig von D dargestellt werden vom Walzendurchmesser, $a = \psi D$; setzt man dies ein, dann wird

(f) . . . . . . . $P = \dfrac{G(m + \varphi) + c}{\psi D + h_1 + 1}.$

Die Werthe m, $h_1$ und c lassen sich aber nur auf dem Wege der Messung und durch die Erfahrung schliesslich festsetzen; es ist dies aber

ebenso wenig genau möglich, wie die Abmessungen der obigen Erhöhungen bei der Gleitung. Begnügen wir uns darum mit einer Annäherung, und nehmen eine vollständig glatte Rolle an, und eine vollständige ebene Unterlage, so dass an der Grenze angelangt, wir $m = h_1 = 0$ setzen dürfen; dann müssen wir, um auch c zu umgehen, dafür den Zähler des Bruches direkt proportional von P ausdrücken und wollen ihn setzen $G\varphi_1$, wenn $\varphi_1$ ein auch auf dem Wege der Erfahrung zu bestimmender Koefficient ist, der Reibungskoefficient, eigentlich Widerstandskoefficient für Wälzung. Wir erhalten dann

$$P = \frac{G\varphi_1}{\psi D + 1} = \frac{G\varphi_1}{a + 1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Für eine gusseiserne Walze von $D = 200^{mm}$ Durchmesser und $4 = 0{,}6$, welche auf einer gusseisernen Unterlage fortgerollt werden soll, sei das Gewicht $G = 1000$ Klg., die Erhöhungen, Unebenheiten ergäben $m = {}^1/_{10}{}^{mm}$, $h_1 = {}^1/_{10}{}^{mm}$ und es sei die Kraft $P = 25$ Klg., um ohne Rutschen eine Wälzung auszuführen, dann würde nach (f) sein

$$2{,}5 = \frac{1000\,(0{,}1 + 0{,}15) + c}{0{,}6 \cdot 200 + 0{,}1 + 1},$$

wenn der (gleitende) Reibungskoefficient $\varphi = 0{,}15$. Hieraus folgt $c = 53$.

P muss also, damit kein Rutschen stattfindet, gleich um 53 Klg. geringer als beim Gleiten vorausgesetzt werden.

Nach Gl. 67 würde $\varphi_1 = \frac{P\,(\varphi D + 1)}{G} = \frac{2{,}5\,(121)}{1000} = 0{,}3$ sein.

Je tiefer der Angriffspunkt der Kraft P liegt, je kleiner $\varphi$, um so mehr nähert sich die Formel (67) dem Gleitungswert, um so früher ist ein Gleiten möglich, ein Rollen schwerer. Für $\varphi = 0$ wird $P = G\varphi_1$. Hierbei wäre allerdings für $\varphi_1$ der obige Koefficient $\varphi$ zurückzusetzen.

Wenn P in S angreift, dann wird $\psi = 1$ und

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{G}\varphi_1}{\mathbf{D} + 1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67a)$$

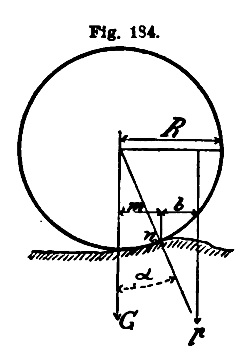
Der Fall, dass c negativ wird in (f) kann auch eintreten, wenn die Reibung gleichsam künstlich verstärkt werden muss, damit ein Rollen stattfinden kann. Soll beispielsweise eine Walze zu einer steilen Wand hinaufgerollt werden und greift P in s an, dann muss event. noch ein besonderer Reibungsdruck stattfinden, damit kein Rutschen eintritt und das Rollen möglich wird.

Eliminiert man P aus Gl. d und e, dann findet man

$$\frac{Gm}{a + h_1} = G\varphi + c.$$

Wenn jetzt $m = 0$, d. h. für eine absolut glatte Unterlage ist, so folgt $c = -G\varphi$, mithin $P = 0$ nach Gl. e. In diesem Augenblick findet stets ein Rutschen statt.

Fig. 184.




In Fig. 184 greift P senkrecht, (p i. d. Fig.) parallel zur Lastrichtung G an. Ist wieder n Drehpunkt, m der Hebelarm der Walze, an welchem das Gewicht G derselben einer Drehung, Rollung um n dem Moment Pb das Gleichgewicht hält, dann ist zunächst

$$Pb = Gm.$$

m ist wieder abhängig von den Erhöhungen der Unterlage, der Wälzungsbasis, bezw. von dem Winkel $\alpha$, also nach Gl. c, S. 150 für den zurückgelegten Weg $s = 1$ von $\Sigma h$. Zur Sicherung gegen Rutschen in n setzen wir wieder, um zu einer indirekten Bestimmung von m zu gelangen, wie oben $\varphi < \frac{P}{G}$ bezw.

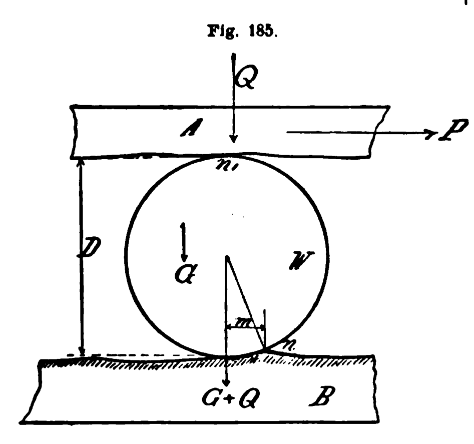
$P = G\varphi + c$ und erhalten durch Addition beider Gl.

$$P = G\,\frac{(m + \varphi) + c}{b + 1}.$$

Wenn wieder $m = 0$, $c = 0$, $b = R$, so folgt

$$\text{(67b)} \quad P = \frac{G\varphi_1}{R + 1}.$$

Fig. 185.




Es seien A, B zwei Körper, A soll durch die Walze W auf B fortgerollt werden. In A wirkt die Kraft P. Auf B ruhen die Gewichte G und Q, auf W das Gewicht Q.

Sind $h_,$ die mittleren Erhöhungen der Walze W, dessen Durchmesser D, dann tritt Gleichgewicht ein, wenn unter den gleichen Umständen wie oben

$$P(D + h_,) = (G + Q)\,m.$$

Um bei n und $n_,$ ein Rutschen zu vermeiden, muss hier die Reibung gross genug werden; wir setzen darum wieder $P = (G + Q)\,\varphi_, + Q\varphi_{,,} + c_,$,

$\varphi_,$ und $\varphi_{,,}$ seien die Reibungskoefficienten bei n und $n_{,,}$ $c_,$ eine Zahl $> 0$.

Die Addition liefert

$$P(D + h_, + 1) = Q(m + \varphi_, + \varphi_{,,}) + G(m + \varphi_,) + c_,,$$

und wir erhalten für

$$P = \frac{Q(m + \varphi_, + \varphi_{,,}) + G(m + \varphi_,) + c_,}{D + h_, + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Auch hier werden wir wieder bestrebt sein, die Widerstände so klein wie möglich zu gestalten, richtiger gesagt, die Bearbeitung der Reibungsflächen so gut wie möglich herzustellen, dann dürfen wir auf dieser Grenze angelangt, setzen $m = 0$, $h_, = 0$, $c_, = 0$, erhalten

$$P = \frac{Q(\varphi_, + \varphi_{,,}) + G\varphi_,}{D + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Je kleiner die Last Q, um so näher wird, Gl. 67a,

$$P = \frac{G\varphi_,}{D + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67b)$$

Für $D = 0$ tritt Gleiten ein. Vernachlässigt man das Eigengewicht der Walze, dann folgt

$$P = \frac{Q(\varphi_, + \varphi_{,,})}{D + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68a)$$

Setzt man $\varphi_, + \varphi_{,,} = \varphi$ und $D = 0$, so wird $P = Q\varphi$, die Kraft für Gleiten.

Die Bestimmung der Koefficienten nach der idealen Gleichung c ist offenbar, wie schon angedeutet, mit grossen Schwierigkeiten verbunden, in den meisten Fällen kaum möglich. Man schlägt darum in den Anwendungen den Versuchsweg ein, indem man P unmittelbar durch Gewichte für verschiedene Körper, oder $\varphi$ mit Hülfe des sog. Reibungswinkels bestimmt.

Man findet beispielsweise für eine mit einer Walze von $D = 20^{ctm}$ Durchmesser zu rollende Last von $Q = 1200$ Klg., eine Kraft von $3\frac{1}{2}$ Klg., dann wären nach Gl. 68a

$$\varphi_, + \varphi_{,,} = \frac{(D + 1)P}{Q} = \frac{21 \cdot 3{,}5}{1200} = 0{,}061.$$

Würden wir gleiche Körperbeschaffenheit oberhalb und unterhalb der Walze voraussetzen

$$\varphi_, = \varphi_{,,}, \text{ dann folgt}$$
$$\varphi_, = \varphi_{,,} = 0{,}0305.$$

Nach unserer obigen Anschauung, Gl. c, würden für einen Weg von $s = 1^{ctm}$ die Summe der Erhöhungen $0{,}0305^{ctm}$, oder wenn D in Millimeter auf $s = 1^{mm}$, $\Sigma h = 0{,}305^{mm}$ betragen, genau im letzteren Fall

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_, + \varphi_{,,}) = \tfrac{1}{2}\,\frac{201 \cdot 3{,}5}{1200} = \tfrac{1}{2}\,0{,}59 = 0{,}295^{mm}.$$

Hierbei haben wir die Anzahl, Steigung, Gestalt der Erhöhungen noch ganz unberücksichtigt gelassen, weil sie für uns unmessbare Grössen sind. Nehmen wir 10 Erhöhungen pro Millim., dann ist die Höhe einer im Durchschnitt $\frac{0,3}{10} = 0,03^{mm}$.

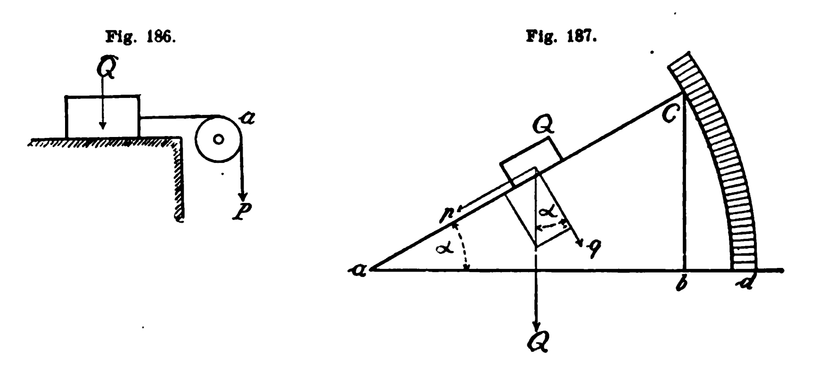



Fig. 186. Fig. 187.

Die direkte Messung der Kraft, wie Fig. 186 andeutet, liefert nicht so genaue zuverlässige Resultate, wegen der Rollenleitung a, deren Widerstände mit in Rücksicht gezogen werden müssen, wie die Bestimmung des Reibungswinkels, Fig. 187.

Auf einem horizontalen Brett ab ist charnierartig in a die verstellbare schiefe Ebene ac befestigt. Q ist die gleitende (oder rollende) Last, welche sich in die Seitenkräfte $p = Q \sin \alpha$, $q = Q \cos \alpha$ zerlegt.

Ist nun $\alpha$ der Winkel, bei welchem gerade das Gleiten (oder Rollen) beginnt, dann muss man eine entgegengesetzte Kraft p anwenden, um mit der Reibung des senkrechten Druckes q das Gleichgewicht herzustellen, um Q am Heruntergleiten zu hindern, so dass, nach Gl. 65

$p = \varphi \cdot q$, bezw. obige Werte eingesetzt,

$Q \sin \alpha = \varphi Q \cos \alpha$ wird.

Letzte Beziehung liefert

$$(69) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Trägt man sich auf den Gradbogen cd, Fig. 187, die Tangente des Winkels $\alpha$ auf, dann braucht man für alle praktischen Fälle nur eine Einstellung, um den Widerstandskoefficient $\varphi$ gleich ablesen zu können; man hat nur nötig, die Platte ac zur Aufnahme aller vorkommenden Versuchskörper einzurichten. —

Bei Bestimmung der Reibungskoefficienten der rollenden Reibung haben wir Millimeter zu Grunde gelegt, für die dort in den Formeln ent-

haltenen Längen bezw. Durchmesser etc. Die Formeln selbst reduciert man noch weiter und setzt:

Fig. 183, 184 in den Gl. 67, 67a und 67b,

$$P = \frac{G\varphi_{\prime}}{a},\ P = \frac{G\varphi_{\prime}}{D},\ P = \frac{G\varphi_{\prime}}{R} \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

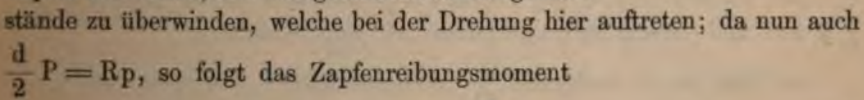
Fig. 185 in den Gl. 68, 68a,

$$P = \frac{Q(\varphi_{\prime} + \varphi_{\prime\prime}) + G\varphi_{\prime}}{D},\ P = \frac{Q(\varphi_{\prime} + \varphi_{\prime\prime})}{D}. \quad . \quad (70a)$$

Die Werte der Reibungskoefficienten sind in den unten folgenden Tabellen enthalten. —

Fig. 188.

Gleitet ein hohler Cylinder, Zapfenhülse, auf einem vollen Fig. 188, dessen Durchmesser d, so entsteht während der Drehung des Körpers A um den sog. Zapfen d der **Zapfenreibungswiderstand**. Zur Überwindung der Gleitung an der Oberfläche des Zapfens hat man die Kraft (nach Gl. 65) nötig $P = \varphi Q$, wenn Q das Gewicht von A. Beiderseitig mit dem Halbmesser des Zapfens $\frac{d}{2}$ multipliciert folgt $\frac{d}{2} P = \varphi Q \frac{d}{2}$; dieses Moment ist aber erforderlich, um den Körper A um den Zapfen zu drehen, um wenigstens die Reibungswiderstände zu überwinden, welche bei der Drehung hier auftreten; da nun auch



$\frac{d}{2} P = Rp$, so folgt das Zapfenreibungsmoment

$$M_{z} = Q\varphi_0 \frac{d}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

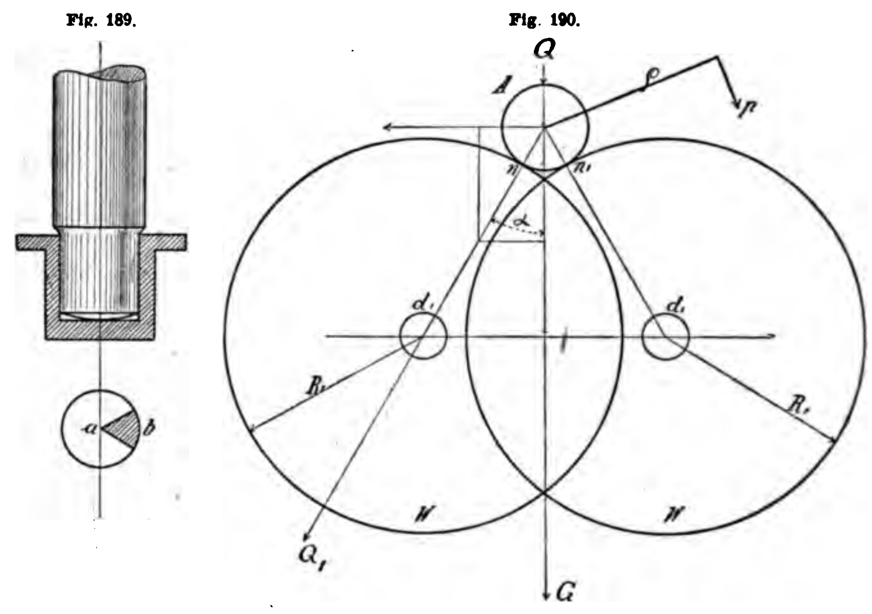
wenn d der Zapfendurchmesser und $\varphi_0$ der **Reibungskoefficient, besonders für Zapfenreibung**, durch Versuche zu bestimmen, bedeutet. Die Reibung eines senkrecht stehenden Zapfens, Stützzapfen (Fig. 189) ist geringer als die eines liegenden Zapfens. Das Reibungsmoment eines solchen ist

$$M_{s} = {}^2/_3\, \varphi_0\, Q \frac{d}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71a)$$

Der Druck ruht auf der Basis, Stirnfläche, dem Stützkreis des Zapfens. Zerlegt man den Kreis in lauter Dreiecke, so können wir uns den Angriffspunkt des Momentes in den Schwerpunkten der sämtlichen Dreiecke verlegt denken, also in ${}^2/_3 \frac{d}{2}$. In a ist das Moment Null, in b am grössten.

Auch der Gleitungswiderstand der Zapfenreibung lässt sich durch Vermittelung von Walzen WW, Fig. 190, die in Zapfen gelagert sind,

Fig. 189. Fig. 190.




vermindern, indem man den Betriebszapfen A, dessen Reibung man vermindern will, auf die Umfänge der Walzen lagert.

Der Zapfendruck Q des Zapfens A pflanzt sich in der Richtung des $\angle \alpha$ fort und verteilt sich zur Hälfte auf jede Walze.

Es folgt durch Zerlegung $\frac{Q/2}{Q_1} = \cos \alpha$ und

(a) . . . . . . . . . $Q_1 = \frac{Q}{2 \cos \alpha}$.

Die Walzen W, deren Halbmesser $R_1$ und Zapfendurchmesser $d_1$ berühren den Betriebszapfen A in n und $n_1$. Indem sich A infolge dieser Auflager um seine Achse drehen muss, versetzt er durch die Vermittelung der Reibung in n und $n_1$ die Walzen in Drehung um ihre Zapfen.

Wir verwandeln zunächst die Zapfenreibung in eine wälzende; für eine Walze, also für den Druck $Q_1$ ist nach der letzten der Gl. 70 das Wälzungsmoment $PR = Q_1 \varphi_1$ oder weil $PR = \rho p_1$, $p_1$ sei die Kraft für eine Walze

(b) . . . . . . . . . . $\rho p_1 = Q_1 \varphi_1$.

Die Zapfenreibung einer der Walzen W ist $\frac{d_1}{2} Q_1 \varphi_0$ nach Gl. 71.

Dividiert man dieses Moment durch $R_1$, dem Halbmesser der Walze, so ist $\frac{d_1}{2\,R_1} Q_1 \varphi_0$ die Kraft am Umfang in n oder $n_1$ zum Betrieb der Walze. Dividiert man diese Kraft durch das Hebelverhältnis (hier Halbmesserverhältnis) $\frac{\rho}{\left(\frac{d}{2}\right)}$, dann erhält man die Kraft am Ende des Hebels $\rho$, um die Zapfenreibung der einen Walze zu überwinden, nämlich

$$\frac{\frac{d_1}{2\,R_1} Q_1 \varphi_0}{\frac{\rho}{\left(\frac{d}{2}\right)}} = \frac{d_1}{2\,R_1} Q_1 \varphi_0 \frac{d}{2\,\rho}. \quad \text{(d Durchm. d. Zapfens A.)}$$

Addieren wir zu dieser die obige Wälzungskraft für eine Walze Gl. b, $p_1 = \frac{Q_1 \varphi_1}{\rho}$, dann erhält man die halbe Betriebskraft

$$\frac{1}{2} p = \frac{Q_1 \varphi_1}{\rho} + \frac{Q_1 \varphi_0}{R_1 \rho} \frac{d\,d_1}{4}.$$

Setzt man endlich $Q_1$ aus (a) ein, dann wird

$$p = 2 \frac{Q}{2 \cos \alpha} \frac{\varphi_1}{\rho} + \frac{2 \cdot Q}{2 \cos \alpha} \frac{\varphi_0}{\rho R_1} \frac{d}{2} \frac{d_1}{2} \quad \text{oder}$$

$$p = \frac{Q}{\rho \cos \alpha} \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{R_1} \frac{d}{2} \frac{d_1}{2}\right);$$

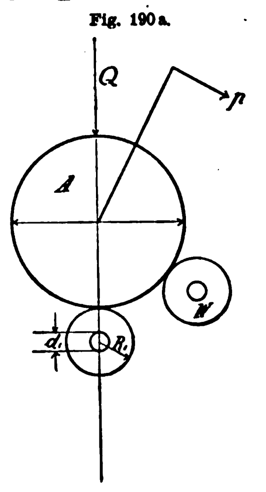
das Betriebsmoment ist

$$M = p\rho = \frac{Q}{\cos \alpha} \left[\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{R_1} \left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{d_1}{2}\right)\right]. \quad . \quad . \quad (72)$$

Will man den Zapfendruck der Rollen W, deren Gewichte G pro Rolle sein mögen, noch in Rücksicht ziehen, dann findet man leicht:

$$p = \frac{Q}{\rho \cos \alpha} \left[\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{R_1} \left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{d_1}{2}\right)\right] + 2\,\varphi_0\, G \frac{1}{R_1} \left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{d_1}{2}\right) \quad (72a)$$

Fig. 190 a.




In obiger Fig. 190 soll die Reibung des Zapfens A vermindert werden, dadurch, dass man ihn auf die Umfänge grosser Walzen legt; in Fig. 190 a ist A im Verhältnis zu den Friktionsrollen W gross, die letzteren sind am Umfange von A verteilt gelagert. Die Theorie ist hier dieselbe wie oben (S. S. 158). Das Betriebsmoment

ist nach Gl. 72, wenn man $\alpha = 0$ setzt

$$(72\text{b}) \quad \ldots \quad M = p\rho = Q\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{R_1}\frac{d}{2}\frac{d_1}{2}\right);$$

bei Vernachlässigung der Wälzungsreibung $\varphi_1 = 0$ erhält man

$$(72\text{c}) \quad \ldots \quad M = p\rho = Q\frac{\varphi_0}{R_1}\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d_1}{2}\right).$$

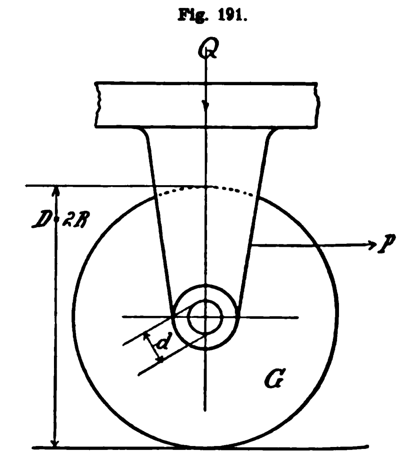
Bedenkt man, dass das ursprüngliche Zapfenreibungsmoment (Gl. 71) $M = Q\varphi_0\frac{d}{2}$ ist, so hat sich dasselbe nach Gl. 77c um den Faktor $\frac{R_1}{\left(\frac{d_1}{2}\right)}$ vermindert, denn die Gl. 72c lässt sich auch schreiben

$$M = Q\varphi_0\left(\frac{d}{2}\right)\frac{1}{\frac{R}{\left(\frac{d_1}{2}\right)}} = \frac{Q\varphi_0\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{R_1}{\left(\frac{d_1}{2}\right)}}.$$

Die Widerstände, welche ein Wagen der Bewegung entgegensetzt, bestehen aus Zapfen- und Wälzungsreibung.

Es seien G das Gewicht des Rades, Q die auf die Achsenzapfen des Rades wirkende Last, D, d Rad- und Zapfendurchmesser, Fig. 191. Das Moment der Zapfenreibung ist, Gl. 71,

Fig. 191.




$$M_z = Q\frac{d}{2}\varphi_0.$$

Das Moment um das Rad selbst fortzurollen, Gl. 70,

$$M_r = PR = G\varphi_1.$$

Um die Last Q fortzurollen, benötigen wir nach Gl. 70 ein Moment,

$$M_n = PR = Q\varphi_1.$$

Die Summe dieser drei Momente bildet das Betriebsmoment

$$M = M_z + M_r + M_n, \text{ nämlich}$$

$$M = Q\frac{d}{2}\varphi_0 + G\varphi_1 + Q\varphi_1 \text{ oder}$$

$$(73) \quad . \quad . \quad \mathbf{M = Q\left(\varphi_1 + \varphi_0\frac{d}{2}\right) + G\varphi_1 = PR = P\frac{D}{2}},$$

hieraus ist die Zugkraft

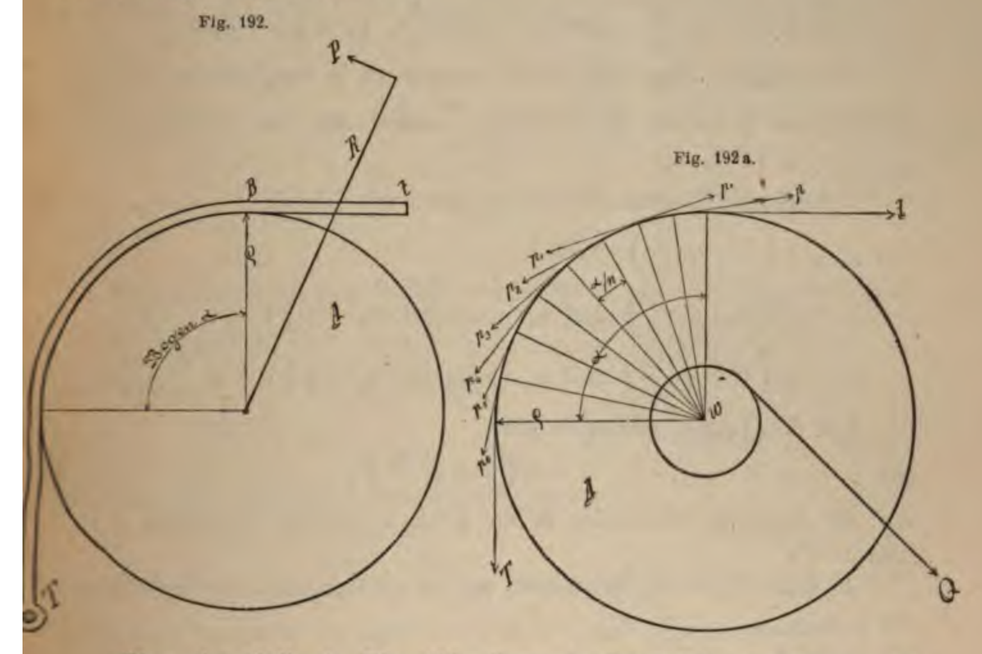
$$P = \frac{Q}{R}\left(\varphi_1 + \varphi_0 \frac{d}{2}\right) + \frac{G}{R}\varphi_1 . \quad \dots \dots \dots \quad (73a)$$

In den meisten Fällen wird das Radgewicht, $G = 0$ gesetzt, vernachlässigt. Selbstverständlich ist bei n Rädern das Moment n mal so gross. Wenn $G = 0$ dann folgt für die gewöhnlichen Fälle

$$P = \frac{Q}{R}\left(\varphi_1 + \varphi_0\right),\ M = Q\left(\varphi_1 + \varphi_0 \frac{d}{2}\right). \quad \dots \quad (73b)$$

Ein besonderer Reibungswiderstand, die Bremsbandreibung, welche namentlich im Maschinenbau vielfach zur Anwendung kommt, sei hier noch erwähnt. Näher auf diese, sowie auf die Seil- und Kettenwiderstände und die Backenbremsen werden wir an geeigneter Stelle in den Anwendungen zurückkommen.

Fig. 192. Fig. 192a.



Über eine Rolle A, Fig. 192, liegt ein Band BB, am besten von Eisen, welches in T befestigt ist und von der anderen Seite durch die Kraft t angezogen wird. Das Band liegt auf einer gewissen Bogenlänge $\widehat{\alpha}$ auf den Umfang des Rades und hält vermöge seiner Rauheit, die wir hier voraussetzen wollen und die uns zu Gute kommt, das Rad an der Drehung zurück, so dass man vergeblich versucht, durch die Kraft P am Halbmesser R eine Umdrehung zu bewerkstelligen. Die Drehung um die

Achse wird offenbar um so schwerer, einesteils je rauher das Band oder die Rolle A ist, je mehr Erhöhungen, zahnartige Eingriffe, sich an den Oberflächen vorfinden, die die Drehung verhindern, andernteils je grösser der Umschlingungsbogen des Bandes ist, je mehr Windungen vorhanden sind, welche eben die Reibung vermehren. — Teilen wir uns die ganze Bogenlänge, auf welche das Band aufliegt, in eine grosse Anzahl gleicher Teile von der Länge $\frac{\alpha^m}{n}$ für den Radius $\rho = 1$, so wird, wenn keine Reibung vorhanden ist, für jeden Teil die Bremsbandkraft, Fig. 192a, $p_1 = p$, $p_2 = p_1$, $p_3 = p_2 \ldots$ sein. Findet aber auf jede der kleineren Längen $\frac{\alpha}{n}$ eine gleitende Reibung statt, dann ist für dieselben, wenn $\varphi$ der Reibungskoefficient

$$p_1 = p + p\varphi\frac{\alpha}{n},\quad p_2 = p_1 + p_1\varphi\frac{\alpha}{n},\quad p_3 = p_2 + p_2\varphi\frac{\alpha}{n}.$$

Das heisst $p_1$ muss um so viel grösser als $p$ sein, als die gleitende Reibung von $p$ auf die kleine Länge $\frac{\alpha}{n}$ ausmacht; das gleiche gilt für $p_2\, p_3 \ldots$

Vorstehende Gleichungen lassen sich auch schreiben

$$p_1 = p\left(1 + \varphi\frac{\alpha}{n}\right),$$

$$p_2 = p_1\left(1 + \varphi\frac{\alpha}{n}\right) \text{ und } p_1 \text{ eingesetzt, } p_2 = p\left(1 + \varphi\frac{\alpha}{n}\right)^2,$$

$$p_3 = p_2\left(1 + \varphi\frac{\alpha}{n}\right) \text{ und } p_2 \text{ eingesetzt, } p_3 = p\left(1 + \varphi\frac{\alpha}{n}\right)^3 \text{ u.s.w.}$$

Für den letzten Teilbogen gilt

$$\text{(a)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad T = t\left(1 + \varphi\frac{\alpha}{n}\right)^n,$$

weil für diesen $p_n$ schliesslich in die Kraft T und für den ersten p in t übergeht*).

Je mehr Teile wir annehmen, um so genauer sind die Beziehungen für $p_1\, p_2\, p_2 \ldots$

---

*) Nehmen wir die Differenz zweier Kräfte $p_1 - p$ oder $p_2 - p_1$ oder $p_3 - p_2$ so klein, dass $p_x - p = \partial p$ und $\frac{\alpha}{n} = \partial\alpha$, so würde folgen $\partial p = \varphi p \partial\alpha$ oder $\frac{\partial p}{p} = \varphi\partial\alpha$. Hieraus $\int_t^T \frac{\partial p}{p} = \int_0^\alpha \varphi\partial\alpha$; aufgelöst folgt $\lg . T - \lg t = \varphi\alpha$, das ist aber $\lg\left(\frac{T}{t}\right) = \varphi\alpha$ bezw. $e^{\varphi\alpha} = \frac{T}{t}$, wenn $e = 2{,}718$ die Basis der nat. Log.

Um nun die Formel $\left(1 + \varphi \frac{\alpha}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ besser beurteilen zu können, zerlegen wir dieselbe mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

Wenn $a = 1$ und $b = \varphi \frac{\alpha}{n}$, dann folgt aber

$$\left(1 + \varphi \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 + n\varphi \frac{\alpha}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\varphi \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\varphi \frac{\alpha}{n}\right)^3 + \ldots$$

oder auch

$$\left(1 + \varphi \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 + \varphi\alpha + \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} \left(\varphi \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\varphi \frac{\alpha}{n}\right)^3 + \ldots$$

und

$$\left(1 + \varphi \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 + \varphi\alpha + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} (\varphi\alpha)^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\varphi\alpha)^3 + \ldots$$

Lässt man jetzt n unendlich gross werden, dann erhält man

$$\left(1 + \varphi \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 + \varphi\alpha + \frac{(\alpha\varphi)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\varphi\alpha)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(\varphi\alpha)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Für $\varphi\alpha = 1$ würde man erhalten

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = 2{,}7183 \ldots = e$$

die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Da nun bekanntlich allgemein

$$a^x = 1 + Ax + \frac{Ax^2}{1 \cdot 2} + \frac{Ax^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$ und für $A = x = 1$ gesetzt,

$a = e$ resultiert, so folgt $a = e$, $A = 1$ und $x = \varphi\alpha$ gesetzt,

$$e^x = e^{\varphi\alpha} = 1 + \varphi\,\alpha + \frac{(\alpha\varphi)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\varphi\alpha)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = \left(1 + \varphi \frac{\alpha}{n}\right)^n. \quad \text{(b)}$$

Setzt man diese Beziehung in (a) ein, so erhält man

$$\mathbf{T = te^{\varphi\alpha} = t\,2{,}7183^{\varphi\alpha}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Je grösser die Bogenauflage $\widehat{\alpha}$ und die Reibung $\varphi$, um so grösser die Bremskraft T.

Wenn das Band auf den vierten Teil des Umfanges aufliegt,

$\alpha = \frac{2\pi}{4}$ für den Radius $\rho = 1$, und wenn $\varphi = 0{,}30$, so folgt

$$T = t\,2{,}718^{0{,}3 \cdot \frac{\pi}{2}} = t\,2{,}718^{0{,}5} \text{ abg., oder}$$
$$T = \sqrt{2{,}718}\,t = 1{,}65\,t.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte von $e^{\varphi\alpha} = 2{,}7183^{\varphi\alpha}$ für die gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fälle enthalten.

Man kann setzen $\varphi = 0{,}1$ für Stahlband und schmiedeeiserne Rolle; $\varphi = 0{,}2$ für Stahlband auf eine gusseiserne Rolle; $\varphi = 0{,}3$ für schmiedeeisernes Band auf eine gusseiserne Rolle und $\varphi = 0{,}4$ bis $0{,}5$ für ein eisernes Band auf eine Holzrolle.

Setzt man $e^{\varphi\alpha} = 2{,}7183^{\varphi\alpha} = a$, dann folgt

(74 a) . . . . . . . . . . $T = at.$

und sind die Werte von a, wenn

| Reibungskoeff. $\varphi$ = | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $^1/_5$ des Umfanges | 1,134 | 1,286 | 1,457 | 1,653 | 1,875 |
| $^1/_4$ " " | 1,170 | 1,369 | 1,602 | 1,875 | 2,193 |
| $^1/_3$ " " | 1,233 | 1,520 | 1,875 | 2,311 | 2,850 |
| $^1/_2$ " " | 1,369 | 1,875 | 2,565 | 3,511 | 4,811 |
| $^2/_3$ " " | 1,520 | 2,311 | 3,511 | 5,352 | 8,121 |
| $^3/_4$ " " | 1,602 | 2,565 | 4,111 | 6,584 | 10,551 |
| 1 Umwindung | 1,875 | 3,511 | 6,584 | 12,346 | 23,142 |
| 2 " | 3,511 | 12,346 | 43,380 | 152,420 | 535,540 |
| 3 " | 6,584 | 43,380 | 284,880 | 1882,000 | 12424,000 |
| 4 " | 12,346 | 152,420 | 1882,000 | 23228,000 | 287840,000 |
| 5 " | 23,142 | 535,540 | 12424,000 | 287840,000 | 6637200,000 |
| 6 " | 43,380 | 1882,000 | 81646,000 | 3541940,000 | 153660000,000 |

Soll nun Fig. 192a das Moment $M = Qw$ gebremst werden, dann wirkt T am Halbmesser $\rho$ links, hingegen Q und t rechtsdrehend an ihren Hebelarmen. Man erhält die Bedingungsgleichung

(75) . . . . . $T\rho = Qw + t\rho = M + t\rho.$

Führt man aus 74a einmal $T = ta$ und dann $t = \frac{T}{a}$ ein, so folgt, T und t entwickelt,

$$(76) \quad \begin{cases} T = \frac{M}{\rho}\frac{a}{a-1} = \frac{Qw}{\rho}\frac{a}{a-1} \text{ und} \\ t = \frac{M}{\rho}\frac{1}{a-1} = \frac{Qw}{\rho(a-1)}. \end{cases}$$

Ist das zu bremsende Moment M Klgmeter indirekt durch eine gewisse Pferdestärke N und durch die Umdrehungen n pro Minute gegeben,

dann setzen wir in die letzten Gleichungen die S. 47, Gl. 35 aufgestellte Beziehung $M = 716{,}2\,\frac{N}{n}$ Klgmeter, und erhalten $\rho$ in Meter,

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{716{,}2\,N}{\rho n}\,\frac{a}{a-1} \\ t &= \frac{716{,}2\,N}{\rho n\,(a-1)}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (76\,a)$$

## Die wichtigsten Reibungskoefficienten.

### I. Gleitende Reibung.

| Reibende Körper | Lage der Fasern | Zustand der Oberflächen | φ Ruhe | φ Bewegung |
|---|---|---|---|---|
| Gusseisen auf Gusseisen oder Bronze | = parallele Fasern, # gekreuzte Fasern | wenig fettig | 0,16 | 0,15 |
| Schmiedeisen auf Gusseisen oder Bronze . . . . | | trocken | 0,19 | 0,18 |
| Schmiedeisen — Schmiedeisen . . . . . . . | | trocken | — | 0,44 |
| | | wenig fettig | 0,13 | — |
| Bronze — Gusseisen . . | | trocken | 0,22 | 0,09 |
| Bronze — Schmiedeisen . | . . . . | etwas fettig | — | 0,16 |
| Bronze — Bronze . . . | . . . . | trocken | — | 0,20 |
| Stahl — Bronze und Eisen | . . . . | etwas fettig | — | 0,15 |
| | | geschmiert | 0,11 | 0,075 |
| Gusseisen — Eiche . . . | = | trocken | — | 0,49 |
| | = | mit Wasser | 0,65 | 0,22 |
| | = | trockene Seife | — | 0,19 |
| Eiche auf Eiche . . . . | = | trocken | 0,62 | 0,48 |
| | = | trockene Seife | 0,44 | 0,16 |
| | # | trocken | 0,54 | 0,34 |
| | # | mit Wasser | 0,71 | 0,25 |
| Holz auf Eiche . . . . | = | trocken | 0,53 | 0,38 |
| Rindsleder — Eiche . . . | Leder flach | trocken | 0,61 | — |
| | hohe Kante | trocken | 0,43 | 0,33 |
| | | mit Wasser | 0,79 | 0,29 |
| Lederriemen — Eichentrommeln . . . . . . . | # | trocken | 0,47 | 0,27 |
| Hanfseil — Eiche . . . | = | trocken | 0,80 | 0,52 |

| Reibende Körper | Lage der Fasern | Zustand der Oberflächen | φ Ruhe | φ Bewegung |
|---|---|---|---|---|
| Lederriemen — Gusseisen . | flach | trocken | 0,28 | — |
| | | mit Wasser | 0,38 | 0,36 |
| Schmiedeisen — Eiche . . | = | mit Wasser | 0,65 | 0,26 |
| | = | mit Talg | 0,11 | 0,08 |
| Messing — Eiche . . . | = | trocken | 0,62 | — |
| Rindsleder als Kolbenliederung . . . . . . | flach | mit Wasser | 0,62 | — |
| | | Öl, Seife | 0,12 | — |
| Schmiedeisen auf Muschelkalk | . . . . | trocken | 0,42 | 0,24 |
| Eiche auf Muschelkalk . . | . . . . | trocken | 0,64 | 0,38 |
| Muschelkalk — Muschelkalk | . . . . | trocken | 0,70 | 0,38 |
| Muschelkalk*) — Rogenstein | . . . . | trocken | 0,75 | 0,67 |
| Rogenstein — Muschelkalk | . . . . | trocken | 0,75 | 0,65 |
| Rogenstein — Rogenstein . | . . . . | trocken | 0,74 | 0,64 |
| Rogenstein — Mörtel . . | feinkörnig | . . . . . | 0,74 | — |
| Ziegelstein — Muschelkalk | . . . . | trocken | 0,67 | 0,60 |
| Ziegelstein — Rogenstein . | . . . . | trocken | 0,67 | 0,65 |

**II. Zapfenreibungskoefficienten.**

| Reibende Körper | Zustand der Oberflächen | $\varphi_0$ Die Schmiere wird periodisch erneuert | $\varphi_0$ immerwährende Ölung |
|---|---|---|---|
| Gusseisen — Gusseisen oder Bronze | wenig fettig | 0,14 | 0,054 |
| | geschmiert | 0,17 | — |
| Schmiedeisen — Gusseisen oder Bronze . . . . . . . . | wenig fettig | 0,25 | — |
| | geschmiert | 0,07 | 0,054 |
| Bronze — Gusseisen . . . . . | geschmiert | — | 0,045 |
| Bronze — Schmiedeisen . . . . | etwas fettig | bis | 0,052 |
| Bronze — Bronze . . . . . . . | trocken | 0,10 | — |
| Gusseisen — Pockholz . . . . | fettig | 0,10 | — |
| | geschmiert | 0,07 | — |
| Schmiedeisen — Pockholz . . . | fettig | 0,19 | — |
| | geschmiert | 0,11 | — |
| Pockholz — Pockholz . . . . . | geschmiert | — | 0,07 |

*) Muschelkalk und Rogenstein sind zwei ziemlich harte Kalksteinarten, mit denen die Reibungsproben vorgenommen wurden, welche die andern Steinarten genügend repräsentieren.

**III. Rollende (wälzende) Reibung (Rollen in Millim.).**

| Reibende Körper | Zustand d. Oberflächen | | Ruhe $\varphi_1$ Bewegung |
|---|---|---|---|
| Stein — Stein und hartes Holz auf Stein . . . . . . . | . . . . . . . . | verhältnismässig glatt | 2 bis 1,5 |
| Stein auf Holz . . . . . . | . . . . . . . . | | 2 „ 1 |
| Weiches — hartes Holz . . . | . . . . . . . . | | 0,8 |
| Gusseisen — Gusseisen . . . | . . . . . . . . | | 0,6 |
| Hartes — Hartes Holz . . . | . . . . . . . . | | 0,5 |
| Hartes Holz und Eisen — Eisenbahnschienen . . . . . | . . . . . . . . | | 0,8 „ 0,5 |
| Stein — Stein oder Holz . . | je nach der Rauheit der Oberfl. glatt | | 5 „ 2 |
| Wagen auf Holzbahnen . . . | . . . . . . . . | | 2 „ 1 |
| „ „ „ . . . | . . . . . . . . | rauhe Bahnen | 10 „ 6 |
| „ „ Pflaster . . . . | . . . . . . . . | | 12 „ 8 |
| „ „ Kunststrassen . . | im guten Zustand | | 15 „ 12 |
| „ „ „ . . | im mittleren Zustand | | 25 „ 15 |
| „ „ Landstrassen . . | ausgefahren | | 40 „ 25 |
| „ „ „ . . | ausgef. mit starken Geleisen | | 50 „ 40 |

Bei Eisenbahnen kann man $^1/_{200}$ bis $^1/_{300}$ der Last an Reibung für Zapfen und Wälzen rechnen.

Bei Lokomotiven $^1/_{80}$ bis $^1/_{100}$ der Last.

**Beispiele** (allgemein gehalten; besondere Anwendungen weiter unten in den betreffenden Kapiteln verteilt).

**I.** Es soll ein Stein auf einer Steinunterlage geschleift werden; das Gewicht soll Q = 1800 Klg. betragen. Nehmen wir $\varphi = 0{,}75$ Reibung, dann folgt nach Gl. 65 $P = \varphi Q = 0{,}75 \cdot 1800 = 1350$ Klg.

Wenden wir Walzen an, Figur 185, und nehmen $\varphi_{,} = \varphi_{,,} = 2$, $D = 200^{mm}$ starke Holz- oder Steinwalzen, dann folgt nach Gl. 70a $P = \frac{Q(\varphi_{,} + \varphi_{,,})}{D} = 1800 \frac{2+2}{200} = 36$ Klg., ev. im schlechtesten Fall

$$P = \frac{1800}{200}(3+3) = 81 \text{ Klg.}$$

Laden wir den Stein auf einen Wagen, dessen Räder $500^{mm}$ Durchmesser, $50^{mm}$ Zapfenstärke und dessen Gewicht 500 Klg. ist, dann ist bei $\varphi_0 = 0{,}054$ Zapfen, $\varphi_1 = 10$ Rollenreibung, nach Gl. 73b auf Holzbahn gezogen:

$$P = \frac{Q}{R}\left(\varphi_1 + \varphi_0 \frac{d}{2}\right) = \frac{1800 + 500}{500}\left(10 + \frac{50}{2} 0{,}054\right) = 52 \text{ Klg.}$$

Ist die Wälzungsbahn Steinbahn, und sind die Walzen noch gut, dann wären diese vorzuziehen, P = 36 Klg., im anderen Fall wohl die Wagenbeförderung.

**II.** Ein Mühlstein von 1,9$^m$ äussern, 0,38$^m$ Augendurchmesser, 0,38$^m$ Höhe (Stärke), dem spez. Gew. $\sigma = 2{,}2$ wiegt

$$G = 1000 \cdot 2{,}2 \left(\frac{\pi\, 1{,}9^2}{4} - \frac{\pi\, \overline{0{,}38^2}}{4}\right) 0{,}38 = 1880 \text{ Klg.}$$

Soll dieser auf seiner Unterlage, Holz oder Stein, geschleift werden, so erfordert dies eine grosse gleitende Reibung $G\varphi = {}^2/_3$ bis ${}^3/_4$ G; zweckmässiger ist es, er wird gewälzt. Nehmen wir im ungünstigsten Fall $\varphi_1 = 5$, dann folgt, wenn der Angriffspunkt in der Radiushöhe liegt, nach Gl. 70

$$P = \frac{G\varphi_1}{R} = \frac{1880 \cdot 5}{950} = 10 \text{ Klg.}$$

Mit dem Steinwagen*) mit 1$^m$ hohen Rädern, 30$^{mm}$ Radzapfenstärke, wird die Zugkraft nach Gl. 73b, wenn $\varphi_0 = 0{,}054$, $\varphi_1 = 2$,

$$P = \frac{G}{R}(\varphi_0\, d/2 + \varphi_1) = \frac{1880}{500}(0{,}05 \cdot 15 + 2) = 13 \text{ Klg.}$$

**III.** Das Zapfenreibungsmoment eines Schwungrades von 1200 Klg. Gewicht, 40$^{mm}$ Zapfendurchmesser beiderseitig, ist nach Gl. 71

$$M = G\varphi_0\, \frac{d}{2} = 1200 \cdot 0{,}17 \cdot \frac{40}{2} = 4080 \text{ Klgmeter.}$$

Bringt man in der Entfernung 400$^{mm}$ vom Drehmittel eine Kurbel an, dann hätte man mit $\frac{4080}{400}$ 10 Klg. zu drücken, um das Rad zu drehen, um wenigstens die Zapfenreibung zu überwinden.

**IV.** Es soll ein Gussstück von 960 Klg. Gewicht auf einer eichenen Unterlage mit Hülfe einer Winde schleifend, gleitend herangezogen werden. Feuchtet man die reibenden Flächen mit Wasser an, dann ist die Zugkraft $P = \varphi Q = 0{,}65 \cdot 960 = 620$ Klg.

Zwei Mann zu je 15 Klg. Druck, 400$^{mm}$ Kurbel-, 150$^{mm}$ Trommelhalbmesser gerechnet, benötigen hierzu eine Winde mit ca. 8facher Übersetzung, Gl. 32.

$$\text{Aus } nPki = Qw, \text{ folgt } i = \frac{Qw}{nPk} = \frac{620 \cdot 150}{2 \cdot 15 \cdot 400} = 8\text{fach.}$$

**V.** Zur Beförderung eines Wagens mit 1,1$^m$ hohen Rädern, 40$^{mm}$ Radzapfenstärke, Q = 1000 Klg. Gewicht auf Pflaster, ist eine Kraft er-

---

*) Ein solcher besteht aus einer gekröpften Achse mit zwei Rädern, in welche der Stein eingehängt wird.

forderlich, welche sich ergiebt aus

$$P = \frac{Q}{R}\left(\varphi_0 \frac{d}{2} + \varphi_1\right) = \frac{1000}{550}\left(0{,}054 \cdot \frac{40}{2} + 8\right) = 17 \text{ Klg.};$$

also ungefähr dem 50. Teil der Last.

**VI.** Wie gross ist die Zapfenreibung der Rollenleitung S. 67, wenn der Zapfendruck 693 Klg., die Zapfenstärke $3^{ctm}$, der Rollendurchmesser $16^{ctm}$. Das Reibungsmoment nach Gl. 71 ist, wenn $\varphi_0 = 0{,}14$ angenommen wird,

$$M = 693 \cdot 0{,}14 \cdot \frac{3}{2} = 146 \text{ Klgctm.}$$

Hierdurch entsteht ein vergrösserter Zug im Seil um

$$\frac{146}{\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{146}{8} = 18 \text{ Klg.}$$

**VII.** Wie gross ist die Achsenkraft, bezw. das Betriebsmoment der Achse zur Bewegung eines Wagens auf Schienengeleisen, beispielsweise eines Laufkrahnes, Krahnwagens u. dergl. Die Last mit Wagen soll $Q = 4000$ Klg. betragen; die Räderdurchmesser $250^{mm}$, die vier schmiedeeisernen Zapfen haben jeder $40^{mm}$ Durchmesser. Setzen wir eine gute periodische Ölung voraus, $\varphi_0 = 0{,}07$, ferner $\varphi_1 = 0{,}8$, dann findet man nach Gl. 73b

$$M = Q\left(\varphi_1 + \varphi_0 \frac{d}{2}\right) = 4000\left(0{,}8 + 0{,}07 \frac{40}{2}\right) = 8800 \text{ Klgmillim.}$$

Mit einem Achsenzug oder Druck von $\frac{8800}{\left(\frac{250}{2}\right)} = 70$ Klg. lässt sich der Wagen in Bewegung setzen.

Verlängert man eine der Wagenachsen und steckt ein Kettenrad auf, bei Verwendung zu einem hoch liegenden Krahnwagen, dann wird der Kettenzug bei $500^{m}$ Kettenradhalbmesser $\frac{8800}{500} = 17$ Klg.

Zwei Kurbeln, auf jeder Seite eine, erfordern bei $350^{mm}$ Kurbelhalbmesser einen Druck von $\frac{8800}{350} = 25$ Klg. für jede Kurbel.

**VIII.** Die in obigem Beispiel 6 berechnete Zapfenfriktion soll durch zwei Rollen von $R_1 = 300^{mm}$ Halbmesser mit $d_1 = 20^{mm}$ zugehörigem Zapfendurchmesser, dessen Reibung $\varphi_0 = 0{,}054$ entspricht, vermindert werden. Die Stellung der Friktionsrollen W, Fig. 190, ist derart, dass $\alpha = 30^\circ$ wird, die Rollen selbst aus Gusseisen $\varphi_1 = 0{,}6$ nach Tabelle.

Gl. 72 giebt das Moment, $Q = 693$ und $\alpha = 3^{ctm} = 30^{mm}$ wie oben,

$$M = \frac{Q}{\cos\alpha}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{R_1}\frac{d}{2}\frac{d_1}{2}\right), \text{ die Zahlen eingeführt,}$$

$$M = \frac{693}{\cos 30}\left(0{,}6 + \frac{0{,}054}{300}\frac{30}{2}\frac{20}{2}\right) = 500 \text{ Klgmillim.}$$

Der Seilzug wird jetzt, weil der Rollenhalbmesser

$$\frac{160}{2} = 80^{mm}, \quad \frac{500}{80} = 6 \text{ Klg.};$$

er verkleinert sich durch die Friktionsrollen also um $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ des Wertes. Solche Friktionsrollen zur Verminderung der Reibung des Zapfens werden bei Flaschenzügen*), bei der Adwood'schen Fallmaschine bei den Treträdern (Velocipeden) etc., in Anwendung gebracht.

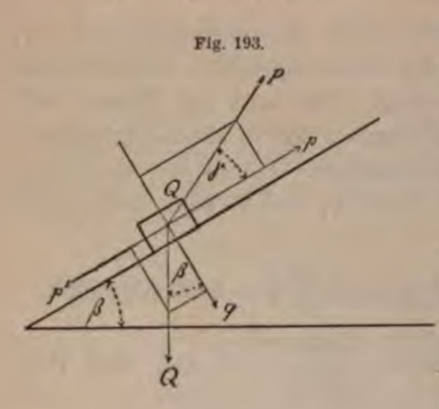


Fig. 193.

**IX.** Eine Last Q liegt auf einer schiefen Ebene, welche unter dem Winkel β geneigt ist; wie gross ist die Kraft P unter $\gamma^0$ wirkend zur Herstellung des Gleichgewichtes gegen das Herunterrutschen.

Zerlegt man Q in eine normale q und eine mit der schiefen Ebene gleichgerichteten Kraft p, so findet man durch diese Zerlegung $p = Q \sin\beta$; da nun auch p die Teilkraft von P, nämlich $\frac{p}{P} = \cos\gamma$, so findet man

$$P = \frac{p}{\cos\gamma} = \frac{Q\sin\beta}{\cos\gamma}.$$

Ist nun β dem Reibungswinkel α Gl. 69 gleich, dann hält sich Q gerade auf der Ebene, und wird $p = 0$, d. h. es ist keine Kraft nach der Richtung p erforderlich, ebensowenig keine Gegenkraft P um Q zu halten.

Soll nun die Kraft p die Last nach oben befördern, dann muss p noch ausser der obigen Kraft $Q \sin\beta$ bezw. $\frac{Q\sin\beta}{\cos\gamma}$, die Reibung von q auf der Ebene überwinden und ist die letztere $q\varphi$; folglich, weil $q = Q\cos\beta$

$$P = \varphi\frac{Q\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{Q\sin\beta}{\cos\gamma} = \frac{Q}{\cos\gamma}(\varphi\cos\beta + \sin\beta).$$

*) S. d. Epicycloidalflaschenzüge und Krahne u. s. w., Band II.

Wenn die Reibung Null $\varphi = 0$, dann wird wieder $P = \frac{Q \sin \beta}{\cos \gamma}$.

Wirkt $\gamma$ unter dem Winkel $\beta$, dann folgt

$$P = \varphi Q + Q \operatorname{tg} \beta = Q (\varphi + \operatorname{tg} \beta).$$

Wird $\beta = \alpha$ dem Reibungswinkel, dann folgt $P = Q(\varphi + \varphi) = 2 \varphi Q$, dann muss die doppelte Reibung zum Transport nach oben verwendet werden, das ist zugleich der kleinste Wert, den P überhaupt erreichen kann, alle anderen Lagen sind ungünstiger. Ist $\gamma = 40°$, $\beta = 50°$ und nehmen wir Eiche auf Eiche mit gekreuzten Fasern $\varphi = 0{,}54$, dann wird $P = \frac{Q}{0{,}966}(0{,}54 \cdot 0{,}64 + 0{,}766) = 1{,}46\, Q$, während, wenn $\beta = \gamma = \alpha$, $P = 2 \operatorname{tg} \alpha\, Q = 2 \cdot \varphi \cdot Q = 2 \cdot 0{,}54\, Q = 1{,}08\, Q$ wird; im letzteren Fall müsste $\beta = \gamma = 28° 30°$ gleich dem Reibungswinkel sein.

**X.** Es soll für eine Winde die Trommelwelle, an welcher die Last $Q = 1500$ Kg. hängt, gebremst werden. Die Trommelwelle habe $w = 200^{mm}$ im Halbmesser, der Bremsrollenhalbmesser sei $\rho = 0{,}6^m = 600^{mm}$. Die Verhältnisse gestatten $^2/_3$ Auflage des Bremsbandes auf der Rolle. Legen wir $\varphi = 0{,}3$ Reibungskoefficient zu Grunde, dann liefert die Tabelle $a = 3{,}511$. Die Gl. 76 ergeben

$$T = \frac{Qw}{\rho} \frac{a}{a-1} = \frac{1500 \cdot 200}{600} \frac{3{,}511}{3{,}511 - 1} = 700 \text{ Klg. und}$$

$$t = \frac{Qw}{\rho} \frac{1}{a-1} = \frac{1500 \cdot 200}{600 \cdot (3{,}511 - 1)} = 200 \text{ Klg.}$$

Das Bremsband muss die Zugkraft $T = 700$ Klg. aushalten können. Der Handhebel kann im Verhältnis $\frac{L}{l} = 10$ (S. Fig. 30 und 31) angeordnet werden, es wird dann der Druck $p = \frac{200}{10} = 20$ Klg. $= 40$ Pfd. auf dem Hebel, welcher erforderlich ist, die Last schwebend zu erhalten.

**XI.** Eine Dampfmaschine (beispielsweise eine Fördermaschine, welche Material aus den Bergwerksgruben an das Tageslicht fördert) habe $N = 30$ 𝒫𝒮, und macht $n = 5$ Umdrehungen in der Minute. Die Bremstrommel (ev. Fördertrommel mit Bremse) habe $\rho = 2^m$ Halbmesser, es sei $\varphi = 0{,}2$ und auf $^3/_4$ Auflage zu rechnen.

Nach Gl. 76a folgt, da nach Tab. $a = 2{,}565$,

$$T = \frac{716{,}2\, Na}{\rho n (a-1)} = \frac{716{,}2 \cdot 30 \cdot 2{,}565}{2 \cdot 5 (2{,}565 - 1)} = 3600 \text{ Klg.}$$

$$t = \frac{716{,}2 \cdot 30}{2 \cdot 5 \cdot 1{,}565} = 1400 \text{ Klg.}$$

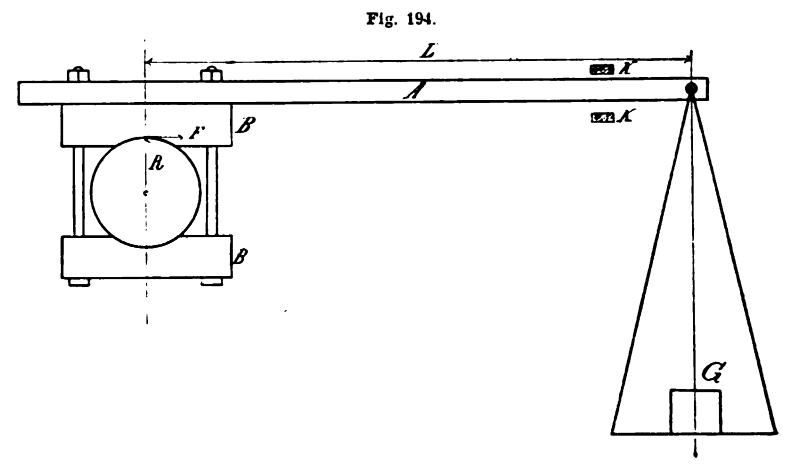
An der Befestigungsstelle hat das Band die Kraft 3600 Klg. auszuhalten, während man bei einer Hebelübertragung von 1 : 2 dem dann resultierenden Druck $\frac{t}{2} = 700$ Klg. mit Hülfe eines kleinen Dampfcylinders mit Kolben das Gleichgewicht halten kann, indem man den Dampf auf den Kolben einwirken lässt, welcher mit der Druckstange von t in Verbindung steht. Setzen wir $3\frac{1}{2}$ Atmosphären voraus, und hat der Kolben $D^{ctm}$ Durchmesser, dann folgt aus der Gleichung

$$3{,}5 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 700, \; D = 16^{ctm}.$$

Bemerkung. Prony's Zaum oder das Bremsdynamometer ist eine Anwendung der Gleit- oder besser Zapfenreibung, um die wirkliche (effektive) Arbeit in Pferdestärken einer sich drehenden Welle durch einen oder mehrere Versuche zu bestimmen.

Auf einer Welle, Fig. 194, welche das Moment M übertragen soll, oder welche bei n Umdrehungen in der Minute N $\mathcal{PS}$ zu übermitteln hat,

Fig. 194.




sind an einem horizontalen Wagebalken A zwei Gleitbacken B so angeschraubt, dass, wenn sich die Welle dreht, diese durch Vermittelung der Reibung den Hebel L mitsamt Gewicht G und Wagschale umschleudern würde. Um dies zu verhindern sind zunächst zwei Fangknaggen KK angebracht, dann aber werden auf die Wagschale so viel Gewichte aufgelegt als nötig, um ein Schleifen der Welle in den Backen zu erzielen, so dass von Seiten der Gewichte G nur die Reibung balanciert wird.

Nennen wir die Reibungskraft am Umfang der Welle F, so wird, wenn Gleichgewicht vorhanden, FR = GL sein.

Dreht sich die Welle mit $v^m$ Umfangsgeschwindigkeit, so ist die Reibungsarbeit vF Klgmeter oder da $v = \frac{2 R \pi n}{60}$, wenn, wie bekannt n die Umdrehungen pro Minute, so ist die Arbeit

$$A = F \frac{2 R \pi n}{60} = \frac{\pi}{30} n R F.$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert $F = \frac{GL}{R}$, so folgt

$$A = \frac{\pi}{30} n R \frac{GL}{R} \text{ oder } A = \frac{\pi}{30} n G L \text{ Klgmeter}$$

und weil v die Geschwindigkeit pro Sekunde, so ist die Arbeit in PS

$$N = \frac{\pi}{30 \cdot 75} n G L \text{ PS oder}$$

$$N = 0{,}001396\, n G L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Es macht z. B. eine Welle n = 15 Umdrehungen in der Minute. Es sei $L = 3^m$ und man habe G = 110 Klg. zur Herstellung des Gleichgewichtes auf die Wagschale gelegt, so wird die Welle in diesem Augenblick die Kraft entwickeln müssen $N = 0{,}001396 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 110 = 6{,}9$ PS.

Aus obiger Formel ersieht man, dass man ganz unabhängig vom Reibungskoefficienten aber auch vom Wellenhalbmesser ist; das Ergebnis ist somit mathematisch genau, sofern n, L und G genau eingeführt werden.

---

## Die verschiedenen Gleichgewichtszustände.

Alle unsere vorausgegangenen Betrachtungen gründen sich auf die Herstellung oder Annahme des Gleichgewichtszustandes, und mussten wir oft den Körper in Gedanken aus dem Gleichgewichtszustand bringen, um eine Betrachtung anstellen zu können. Im letzteren Fall veranlassten wir stets eine künstliche Bewegung so zu sagen, während für uns das Gleichgewicht zugleich den Begriff der Ruhe mit in sich schliesst. Ist ein Körper ruhend, fest, stabil gelagert, so nennen wir einen solchen sicheren hängenden oder liegenden Ruhezustand eines Körpers den stabilen Gleichgewichtszustand, Fig. 195.

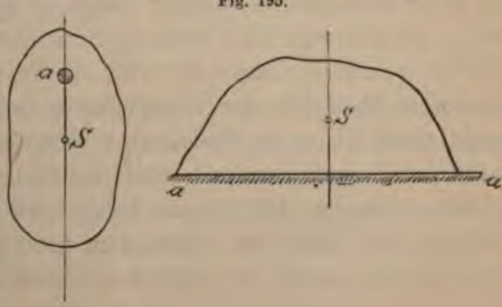


Fig. 195.

Versucht man den Körper etwas aus seiner Lage zu heben, so wird er immer wieder in dieselbe zurückkehren, sobald die wirkende Kraft wieder beseitigt ist. Hebt man ihn so hoch, dass der Schwerpunkt über den Unterstützungspunkt a zu liegen kommt, Fig. 195a, dann tritt eine andere Gleichgewichtslage ein.

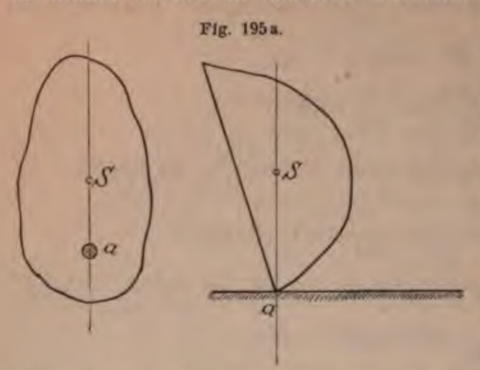


Fig. 195a.

Der Körper befindet sich jetzt im labilen Gleichgewichtszustand. Der Zustand, die Lage des Körpers ist unsicher, schlüpfrig, beim geringsten Anstoss kommt er in den früheren oder einen anderen stabilen Zustand.

Unterstützt man den Schwerpunkt eines Körpers, dann ist dem letzteren jede Lage gleichgültig, indifferent; er wird in allen Lagen hängen oder ruhend verbleiben und in keine andere zurückzukehren streben; es ist dies der indifferente Zustand. Hier kann sich kein Moment bilden, welches den Körper in eine andere Lage bewegen, um den Unterstützungspunkt oder um die Unterstützungskante drehen würde; die senkrechte Entfernung vom Schwerpunkt als Angriffspunkt des Gewichtes zur Unterstützung, der Hebelarm, ist Null.

Offenbar ist der letzte Gleichgewichtszustand der zuverlässigste, bequemste. Alle Räder, Wellen, auch die Körper unseres Weltsystems befinden sich in diesem Zustand. Die geringste Veränderung desselben in einem Rade würde man sofort fühlen, sie würde sich durch „Schlagen" des Rades bemerkbar machen, und zwar nach der Seite hin, nach welcher die Drehungsrichtung stattfindet.

Der labile Gleichgewichtszustand ist wohl der unangenehmste, unzuverlässigste. Ein solcher Körper bedarf stets der Unterstützung, damit er nicht schwankt, entschlüpft (labile = schlüpfrig). Je höher beispielsweise ein Bauwerk im Verhältnis zu seiner Grundfläche ausgeführt wird, um so unsicherer, unstabiler wird es, wenn nicht stets der Schwerpunkt senkrecht über dem der Grundfläche eingehalten wird. Der Pisaer Turm steht cirka $4^m$ aus der Senkrechten, seine senkrechte Schwerlinie fällt aber noch immer weit innerhalb der Grundfläche, also ist noch keine Umsturzgefahr vorhanden. Ein Mensch, welcher mit dem einen Arm einen schweren Körper trägt, hebt den andern Arm hoch und neigt seinen Körper etwas nach der Seite, um die Lage des Schwerpunktes mehr nach dieser Seite

hin zum Tragen günstiger zu gestalten. Alle balancierten Gegenstände sind im labilen Gleichgewicht.

Wir haben schon Seite 65 in Fig. 57 Andeutungen bei dem dortigen Fabrikschornstein gemacht, um ihn „günstiger vertikal zu erhalten"; ebenso in den Figuren 117 bis 119 (S. 103) waren wir genötigt, indirekt den labilen und stabilen Gleichgewichtszustand zu verwenden. In dem Folgenden wollen wir noch versuchen, etwas näher auf die mathematischen Bedingungen, namentlich des stabilen Gleichgewichtszustandes, einzugehen. Im Grunde genommen erweitern wir nur die Anwendungen des Schwerpunkts- und Momentengesetzes mit Berücksichtigung der Hebung einer Last auf eine Höhe, Arbeit, wie wir auch schon bei der Reibung Gelegenheit auszuführen nahmen.

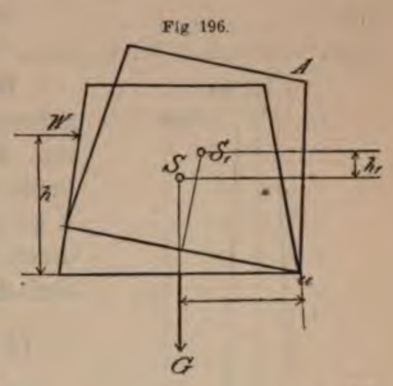


Fig 196.

Um die Stabilität eines beliebigen Körpers, Fig. 196, zu ermitteln, sei W die Kraft, welche ihn in einer beliebigen Höhe h angreifend, aus der Lage A in $A_1$ hebt. Das äussere Umsturzmoment ist also Wh. Diesem wirkt das Gewicht des Körpers am Schwerpunkt S also in der Entfernung e von der Umsturzkante u angreifend, entgegen. Die Stabilitätsgleichung ist sonach (S. Gl. c, S. 104)

$$\mathbf{Wh = Ge} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Die Arbeit, welche hierbei die Kraft W verrichten muss, um den Körper in die Lage $A_1$ zu bringen, ihn also um $h_1$ zu heben, ist

$$A = Gh_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77a)$$

Ist $h_0$ die Höhe, welche dem labilen Gleichgewicht entspricht, wobei also die senkrechte Schwerlinie durch u geht, dann ist die Arbeit, um den Körper zu stürzen, zu wälzen,

$$A_0 = Gh_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77b)$$

Diese Gleichungen enthalten unter allen Umständen die Dimensionen des Körpers und lassen sich demnach der Sache entsprechende Beziehungen leicht ableiten.

In Rücksicht auf das vorige Kapitel der Reibung kann aber noch der Fall eintreten, dass der Körper in Richtung der Kraft W verschoben wird, und er gar nicht zum Stürzen gelangt, dann müsste die Reibung

von G auf der Unterlage so gering sein, dass

$$W = \varphi G, \text{ bezw.}$$

(77c) . . . . . . . $\varphi = \frac{W}{G}$ oder $G = \frac{W}{\varphi}$.

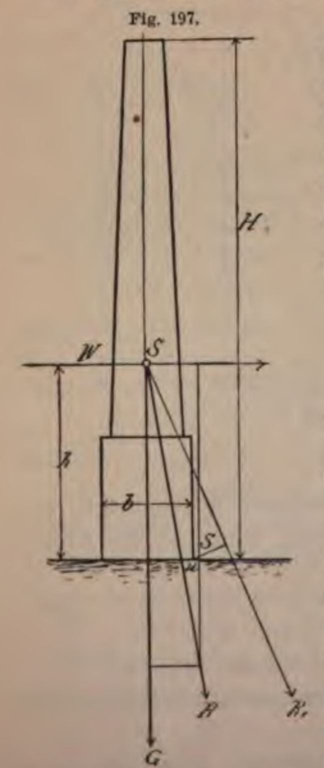
Im letzteren Fall muss der Körper an der Umsturzkante u am Rutschen durch Gegenhalten (eingeschlagener Pflock u. dergl.) verhindert werden. Endlich tritt noch eine Möglichkeit ein, dass der Körper so fest mit der Unterlage verbunden ist, dass er erst abgerissen werden muss, ehe er gehoben werden kann.

Ist F seine Grundfläche, und ist eine Kraft von s Klg. erforderlich, um die Flächeneinheit, 1 □ctm, 1 □mm des Körpers von der Auflagerfläche zu trennen, dann ist die Kraft zum Losreissen des Körpers

(78) . . . . . . . . . $W_1 = Fs$;

diese, vereint mit W, bewirken im letzteren Falle eine Hebung.

Fig. 197.




**Beispiele: I.** Es soll die Stabilität eines Schornsteines gegen Winddruck bestimmt werden. Ist G das Schornsteingewicht, b die Basisbreite und sucht der Wind den Schornstein um u zu kanten, so müssen wir uns den Winddruck W in der Schwerpunktshöhe h angreifend denken, erhalten dann mit Bezug auf die Gl. 74, weil $e = \frac{b}{2}$,

$$Wh = G\frac{b}{2}.$$

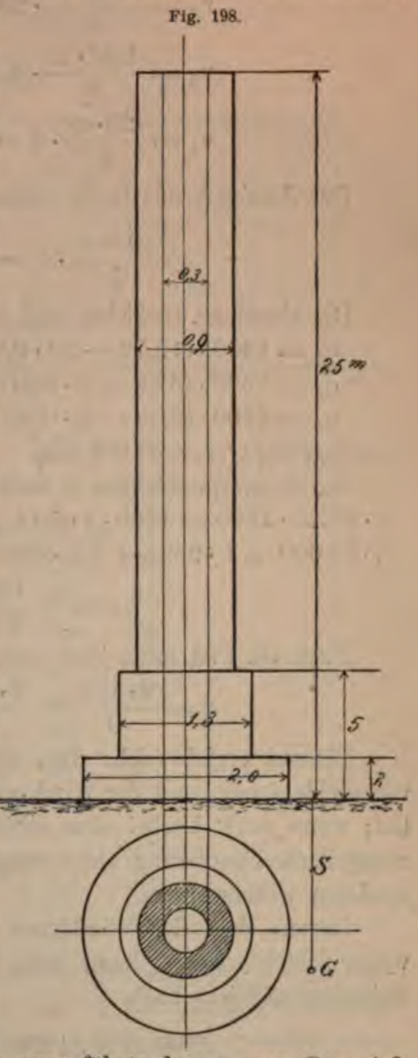
Die Fundamentbreite b, die Basis des Bauwerkes, ist hiernach

(77d) . . . $\mathbf{b = \frac{2Wh}{G}}$.

Je grösser h, je höher ein Bauwerk, um so breiter muss dessen Basis sein; je schwerer es ist, um so kleiner kann b sein, weil G umgekehrt proportional b ist. Tiefe Lage des Schwerpunktes ist also für die Stabilität, für das Feststehen, am vorteilhaftesten. Die Minimalform, um den Ausdruck zu gebrauchen, ist die Pyramide, denn bei dieser liegt der Schwerpunkt (S. S. 93) in ¼ der Höhe am tiefsten von allen Körpern; pyramidale, schräge Seitenwände geben darum einem Bauwerk immer

ein solideres Aussehen als senkrechte. Ein Bauwerk mit einem angeschrägten Sockel bietet dem Auge gleichsam schon ein gewisses Festigkeitsgefühl, — im Gegensatz hierzu stehen allerdings manche chinesische und japanesische Bauwerke mit ihrer kleinen Basis und darüber hinwegragender Dachfläche, eine abgekürzte Pyramide mit der breiteren Basis nach oben. Muss das Bauwerk leicht gehalten werden bei kleiner Basis, dann erfordert es jedenfalls seitlicher Stützen, es nähert sich eben dann dem labilen Gleichgewichtszustand, wie beispielsweise der Schornstein S. 65, eine freistehende Leiter, Stange u. s. w.

Fig. 198.




Den Winddruck W kann man im Maximum bis zu 250 Klg. (für Deutschland*) pro □m veranschlagen. Die Lage des Schwerpunktes finden wir nach bekannten Regeln.

Trägt man, wie in der Figur geschehen, G das Gewicht als vertikale, W den Winddruck als horizontale Komponente von S aus auf, dann muss die Resultante R innerhalb der Basis fallen. Ergiebt sich noch ein Moment $R_1 s$, fällt die Komponente ausserhalb u, dann droht der Winddruck den Schornstein zu stürzen.

Das in nebenstehender Figur gezeichnete Bauwerk hatte sich nach seiner Fertigstellung gesenkt und war gestürzt; es soll eine Untersuchung angestellt werden, da nachweisbar ein starker Sturm tobte, ob das Bauwerk durch Winddruck zu Fall gebracht worden ist.

Das Bauwerk war in Backsteinbau ausgeführt, dessen spez. Gew. 1,6. Die dem Wind preisgegebenen Flächen sind $f_3 = 20 \cdot 0{,}9 = 18$ □m;

*) S. w. u.

$f_2 = 3 \cdot 1{,}3 = 3{,}9\,\square^m$ und $f_1 = 2 \cdot 2 = 4\,\square^m$. Den Winddruck zu 200 Klg. gerechnet, erhält man $W = 26 \cdot 200 = 5200$ Klg. Die Volumina sind, das Bauwerk voll gerechnet,

$$v_3 = \frac{0{,}9^2 \cdot \pi}{4} \cdot 20 = 12{,}72 \text{ Kubikmeter},$$

$$v_2 = \frac{1{,}3^2 \cdot \pi}{4} \cdot 3 = 3{,}98 \text{ Kubikmeter},$$

$$v_1 = \frac{2^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 = 6{,}28 \text{ Kubikmeter}.$$

Der durchgehends hohle Raum für 1^m Länge, bezw. Höhe ist

$$\frac{\overline{0{,}3}^2 \cdot \pi}{4} \cdot 1 = 0{,}0707 \text{ Kubikmeter}.$$

Die einzelnen Gewichte sind hiernach

$$q_3 = 1600 \cdot (12{,}72 - 20 \cdot 0{,}0707) = 1600 \cdot 11{,}31 = 18\,096$$
$$q_2 = 1600 \cdot (3{,}98 - 3 \cdot 0{,}0707) = 1600 \cdot 3{,}77 = 6032$$
$$q_1 = 1600 \cdot (6{,}28 - 2 \cdot 0{,}0707) = 1600 \cdot 6{,}14 = 9824$$

Gesamtgewicht $G = 34\,000$ Klg.

Die Schwerpunktshöhe h finden wir aus der Gleichung

$$s \cdot 21{,}22 \cdot 1600 = 1600 \cdot 1 \cdot 6{,}14 + 1600 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}77 + 1600 \cdot 15 \cdot 11{,}31.$$
$$s \cdot 34\,000 = 1 \cdot 9824 + 3{,}5 \cdot 6032 + 15 \cdot 18\,096, \text{ und}$$
$$h = s = \frac{188{,}99}{21{,}22} = 8{,}91^m.$$

Nach Gl. 77d muss jetzt sein,

$$b = \frac{2 \cdot Wh}{G} = \frac{2 \cdot 5200 \cdot 8{,}91}{34\,000} = 2{,}72.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Basis viel zu klein im Durchmesser veranschlagt war, und der Wind wohl am meisten zum Sturz beigetragen hat; wenn auch hierbei eine schlechte Ausführung des Baues und eine mangelhafte Fundierung nicht ausgeschlossen ist, beides bedarf einer besonderen Untersuchung.

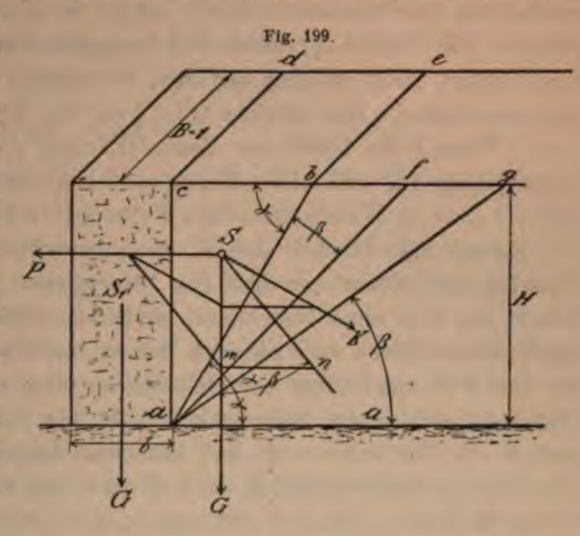
Davon, dass der Winddruck das Bauwerk auf seiner Grundfläche weiter schieben kann, kann wohl keine Rede sein, es müsste denn der Reibungskoefficient nach

$$5200 = \varphi\, 34\,000, \quad \varphi = \frac{5200}{34\,000} = 0{,}16$$

sein, d. h. das Bauwerk müsste sich zu seiner Auflagerebene wie zwei eiserne geschmiert aufeinander gleitende Flächen verhalten; oder auf Rollen stehen.

**II.** Es soll die Stabilität von Futtermauern klar gelegt werden. Bekanntlich böschen sich lockere Massen, Erde, Sand, Hülsenfrüchte, kleine Steine, wenn man sie ablagert, unter einem gewissen Winkel, dem Böschungswinkel, kegelförmig ab. Die Grösse des Winkels, den man am besten aus Versuchen entwickelt, hängt hauptsächlich von der Reibung der einzelnen Massenteilchen, aber auch von der Trockenheit, Feuchtigkeit und auch von der Zusammenhängbarkeit (Cohäsion) derselben ab.

Fig. 199.



Man fand für

| | | | |
|---|---|---|---|
| Trockenen Lehmboden | 40 | bis | 46° |
| Nassen „ | 20 | „ | 25° |
| Trockene Thonerde | 40 | „ | 50° |
| Nasse „ | 20 | „ | 25° |
| Trockene Dammerde | 40 | „ | 43° |
| Nasse „ | 30 | „ | 37° |
| Nasser Kies | 25° | | |
| Nasser Steinschotter | 35 | „ | 40° |
| Feiner Sand | 30° | | |
| Getreidekörner | 30° | | |
| Leichtere Kornarten, Hülsenfrüchte | 20° | | |
| Wasser | 0° | | |

Jede solche Masse wird nun, wenn sie vertikal abgetragen wird, und sich überlassen bleibt, nach und nach sich unter obigem Winkel abböschen; es wird sich also ein Keil ablösen, abrutschen, welcher gegen eine senkrechte Schutzmauer, Fig. 199, drückt, wenn durch eine solche die Ablösung vermieden werden soll.

Solche im Baufach sehr häufig verwendeten Abdämmungen, Stützmauern, Futtermauern müssen stark genügend sein, um dem Erddruck

(ev. Wasserdruck) Widerstand leisten zu können. Für die Mechanik ist es darum zunächst erforderlich den Erddruck selbst und dann die Bedingungen aufzustellen und abzuleiten, durch welche die Mauer ihre Lage verändern könnte. Der Winkel $\alpha$, unter welchem sich das Gewicht G des Keiles abcd ablöst, steht offenbar mit dem Böschungs- also Reibungswinkel im Zusammenhange. Das Gewicht $G = \frac{1}{2} \overline{ca} \cdot \overline{cb} \cdot B\gamma$ greift im Schwerpunkt S an. Wenn B die Breite der Mauer (Länge), $\gamma$ das Gewicht des Kubikmeters, dann ist, weil $cb = H \operatorname{cotg} \alpha$ in Kilogramm

(a) . . . . . $G = \frac{1}{2} HH \operatorname{cotg} \alpha B\gamma = \frac{1}{2} H^2 B\gamma \operatorname{cotg} \alpha.$

Zerlegt man G in P und K, dann bewirkt K eine Reibung auf die Unterlage des Keiles, so dass das Niedergleiten langsam vor sich geht. Würde der Keil ohne Widerstand abgleiten, etwa wie auf einer glatten geschmierten Fläche oder wie sich Wasser von Wasser trennt, dann käme der Druck P unmittelbar zur Geltung; so aber wird P kleiner, weil die Unterlage noch einen Reibungskeil abfe für sich beansprucht (in Beispiel 9, S. 170 haben wir den ähnlichen umgekehrten Fall). Nennen wir $\beta$ diesen Reibungswinkel, und denken uns eine Zerlegung auf af in P und R, dann ist jetzt P abhängig vom $\angle \alpha - \beta$, nämlich

$$\frac{\overline{mn}}{G} = \frac{P}{G} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta); \text{ es muss also}$$

(b) . . . . . . . $P = G \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ sein.

Setzt man (a) ein, dann folgt

(c) . . . . . . $P = \frac{1}{2} H^2 B\gamma \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \beta).$

Da nun $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, erhält man

$$P = \frac{1}{2} H^2 B\gamma \frac{1 - \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Führt man die bekannten trig. Beziehungen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \text{ ein, folgt für}$$

(d) . . . $P = \frac{H^2}{2} B\gamma \frac{\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta}{\sin(2\alpha - \beta) + \sin\beta}.$

Aus diesem Ausdruck lassen sich leichter wie aus Gl. (c) Schlüsse ziehen, weil die Werte der tg und cotg zwischen 0 und $\pm\infty$ zu grossen Spielraum zulassen.

P wird am grössten, wenn der Zähler der trig. Funktion gross, wenn also $\sin(2\alpha - \beta) = 1$, $2\alpha - \beta = 90^\circ$ oder

(e) . . . . . . . $\alpha = \frac{90 + \beta}{2} = 45 + \frac{\beta}{2},$

dann wird die Druckkraft

$$P = \frac{H^2}{2} \gamma B \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{H^2}{2} \gamma B \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\beta}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Setzen wir B die Mauerlänge der Einheit gleich, $B = 1^m$, dann ist pro laufender Meter, weil $\operatorname{cotg}(45 + \beta/2) = \operatorname{tg}(45 - \beta/2)$,

$$P = \frac{H^2}{2} \gamma \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{\beta}{2}\right). \quad \ldots \ldots \quad (79)$$

Trägt man sich $\beta$ an der Basis aa an, dann ist $\sphericalangle cag = 90 - \beta$, die Hälfte dieses, also die Ergänzung des Reibungswinkels zum Rechten halbiert, liefert schliesslich denjenigen Winkel, welcher den eigentlichen Druckkeil darstellt, und welcher wie auf Wasser ohne Reibung herunter rutscht und gegen die Mauer drückt.

Bedenkt man nun, dass in der aufgestapelten Erdmasse in ihren oberen Regionen kein Druck stattfindet, dass hingegen je tiefer man gelangt, der Druck immer mehr wächst, etwa wie der Druck von einem Wasserspiegel bis zum Grund zunimmt, weil die oberen Schichten immermehr auf die unteren drücken, so hat der Druck oben den Wert Null, unten wird er am grössten und nimmt wie von der Spitze zur Basis eines Dreiecks zu. Der Angriffspunkt, der Mittelpunkt des Druckes, fällt sonach in den Schwerpunkt des Dreiecks und liegt in $^1/_3$ der Höhe von der Basis. Das Moment, welches die Mauer um ihre Vorderkante zu stürzen strebt, ist dann

$$M = {}^1/_3\, HP = {}^1/_6\, H^3 \gamma \operatorname{tg}^2 (45 - \beta/2).$$

Bezeichnet man das Gewicht eines Kubikmeter Mauerwerkes mit $\gamma_1$, so ist das Mauergewicht von der Länge $B = 1$,

$$G_1 = H \gamma_1 b.$$

Dasselbe greift im Schwerpunkt der Mauer an und wirkt ihr Moment am Hebelarm $b/2$,

$$M_1 = \frac{1}{2} b^2 H \gamma_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

dem obigen entgegen.

Durch Gleichsetzung beider ergiebt sich

$$\frac{1}{2} b^2 H \gamma_1 = \frac{1}{6} H^3 \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\beta}{2}\right), \text{ hieraus folgt}$$

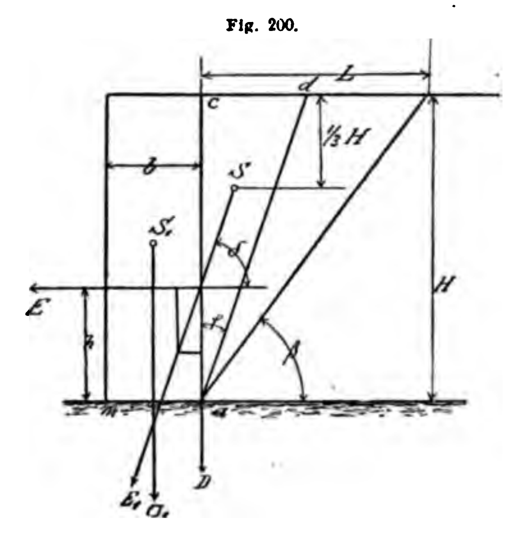
$$\mathbf{b = 0{,}58\, H \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right) \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}}. \quad \ldots \quad \mathbf{(79a)}$$

Es sei in folgender Figur acd der Durchschnitt desjenigen Erdprismas, welches man als vollkommen frei von Reibung annehmen kann, während es sich gegen die Mauer bewegt; der Winkel bei a desselben ist

dann

$$\varphi = \frac{1}{2}(90 - \beta) = 45 - \frac{\beta}{2}.$$

Fig. 200.




Denken wir uns das Gewicht desselben im Schwerpunkt vereinigt, so übt es beim Rutschen gegen die Mauer den Druck, Gewichtsdruck $E_1$ unter dem Winkel

$\delta = 90 - \varphi = 45 + \beta/2$ aus.

Es ist aber

$$E_1 = \frac{1}{2} \gamma H \frac{L}{2} \text{ für } B = 1.$$

Zerlegt man $E_1$ in E und D, dann bewirkt D durch Reibung des Prismas an der Mauer einen Druck nach unten, C hingegen am Hebelarm h sucht die Mauer zu kanten um m.

Das Gegenmoment ist wieder $G_1 \frac{b}{2}$, somit

$$E h = G_1 \frac{b}{2} \text{ oder, weil } E = E_1 \cos \delta,$$

$$\frac{1}{4} \gamma H L h \cos\left(45 + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} b^2 H \gamma_1.$$

Setzt man in diese Formel

$$L = H \operatorname{tg}(90 - \beta),\ h = \frac{H}{3},$$

dann erhält man schliesslich

$$(79\text{b}) \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{b = 0{,}4\,H} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{cotg} \beta \cos\left(45 + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Beide Formeln für b liefern für die gewöhnlichen praktischen Fälle nahe dieselben Resultate, man erhält

für $\beta = 30°$ 45° 60°

$$\frac{b}{H\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}} = 0{,}36 \quad 0{,}24 \quad 0{,}16.$$

Die Werte von $\gamma$ und $\gamma_1$ sind in folgender Tabelle enthalten (S. auch d. sp. Gewichtstabelle im Anhang, $\gamma = 1000\,\sigma$, $\gamma_1 = 1000\,\sigma_1$).

| | Gewicht eines Kubikm. |
|---|---|
| Trockener Lehmboden | $\gamma = 1500$ Klg. im Mittel |
| Nasser " | 1900 " " " |
| Trockene Thonerde | 1600 " " " |
| Nasse " | 1980 " " " |
| Nasse Dammerde | 1650 " " " |
| Nasser Kies | 1860 " " |
| " Steinschotter | 1600 " " " |
| Feiner Sand | 1500 " " " |
| Weizen, Roggen | 750 " " " |
| Hafer | 475 " " " |
| Wasser | 1000 " " " |

Damit der Erddruck nicht die Reibung der Mauer auf dem Terrain überwinde und dieselbe fortschiebe, ist, wenn $\varphi$ der Reibungskoefficient

$$P < \varphi G_1 \text{ oder}$$

$$\frac{H^2}{2} \gamma \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{\beta}{2}\right) < \varphi b H \gamma_1 \text{; hieraus}$$

$$\varphi > \frac{H}{2} \frac{\gamma}{\gamma_1} \frac{\operatorname{tg}^2(45 - \beta/2)}{b}.$$

Setzen wir selbst $\gamma = \gamma_1$; $\operatorname{tg}^2(45 - \beta/2) = 1$, dann folgt

$$\varphi > \frac{H}{2b}.$$

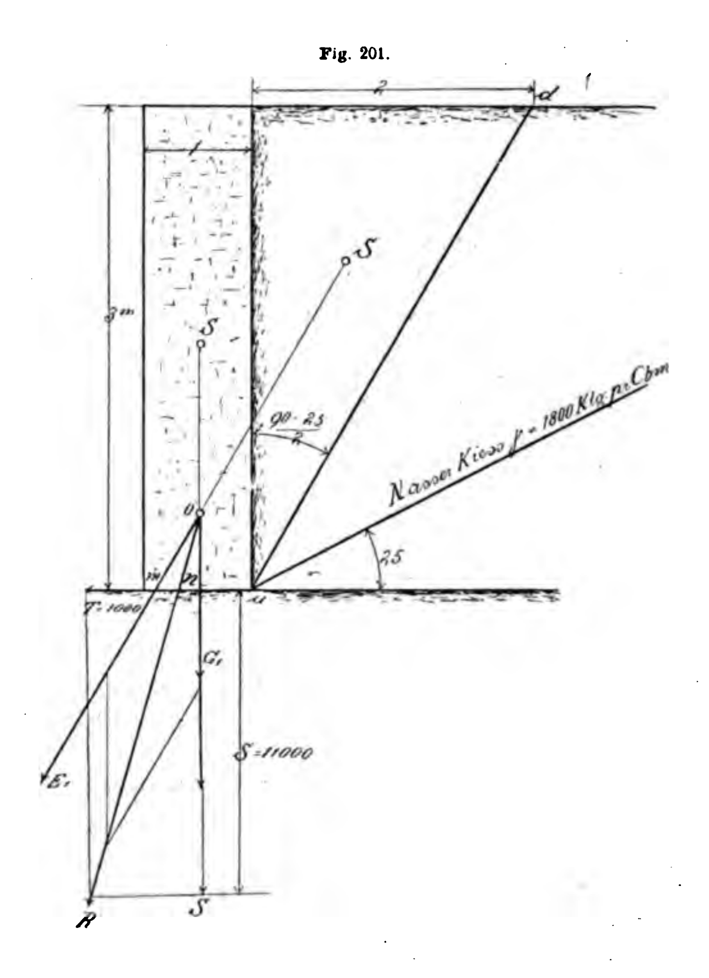
Würde jetzt $H = b$, dann müsste $\varphi > 0{,}5$ sein, eine Bedingung, die kaum eine Befürchtung des Fortschiebens zulässt.

Wir bemerkten oben, dass der Druck in den oberen Regionen des Erdprismas Null, unten am grössten, streng genommen könnte dann die Mauer oben in einer scharfen Kante auslaufen. In der Praxis ist dies nicht zulässig, man giebt dem Mauerkopf immerhin noch zwei bis drei Steinstärken, um den äusseren Witterungseinflüssen zu genügen. Ein Abböschen an der Stirnseite gewöhnlich 1 : 5 ist selbstredend nur von Vorteil, weil dadurch die Basis grösser wird und die Stabilität zunimmt. Giebt man der Futtermauer eine pyramidale Form im Querschnitt, böscht sie also auch nach dem Erddruck zu ab, dann kommt nur eine Komponente der Umsturzkraft zur Geltung, wodurch wieder die Stabilität vergrössert wird, das Umsturzmoment wird noch geringer.

Eine vorteilhafte Übersicht gewährt das Auftragen der Parallelogramme, die Konstruktion derselben, wie dies die nächsten Figuren darstellen, auf deren Erklärung wir weiter unten zurückkommen werden.

Halbiert man sich den Böschungsergänzungswinkel, sucht den Schwerpunkt S, ebenso den Schwerpunkt der Mauer $S_1$, rechnet das Mauergewicht $G_1$ und das Gewicht des Erdprismas für $B = 1$ aus, trägt sich beide Werte als Teilkräfte auf, dann ist R die Resultante, welche innerhalb der Basis der Mauer fallen muss. Nach **Vauban** soll mn nicht weniger

Fig. 201.

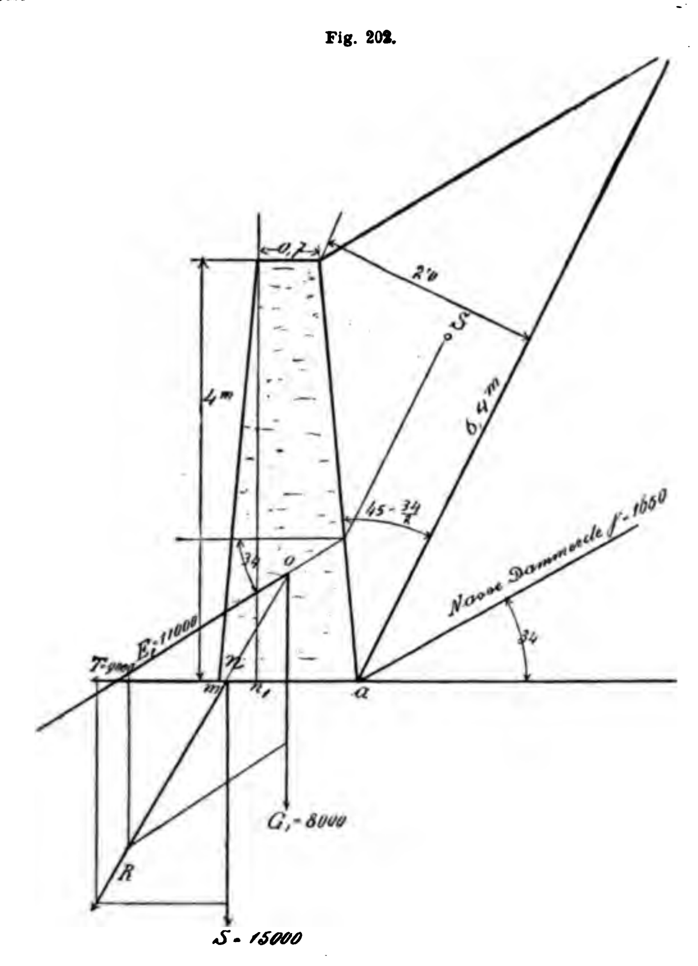



als $^4/_9$ der Basisbreite betragen, damit durch Abbröckeln der Kante, Verwittern derselben noch Stabilität genügend bleibt.

R zerlegt sich wieder in eine horizontale Schiebekraft T und vertikale Druckkraft S, der letzteren muss das Fundament gegen Zerdrücken Widerstand leisten.

Man kann 5 Klg. pro □ctm für Bruchsteinmauerwerk
7 „ „ „ gew. Backsteinmauerwerk
10 „ „ „ gutes „
rechnen.

Fig. 202.




Die Schubkraft T muss erst die Reibung von S auf dem Boden überwinden, ehe die Mauer weichen kann, es muss $T < \varphi S$ sein, der Winkel RnS soll den Reibungswinkel nach Müller-Breslau 33 bis 35° nicht überschreiten. (In Fig. 201 muss die Komponente S durch n gehen.)

Soll die Futtermauer eine Wassermasse von der Höhe H stützen, dann ist nach Gl. 79a zu setzen $\beta = 0$, $\gamma = 1000$; man erhält für recht-

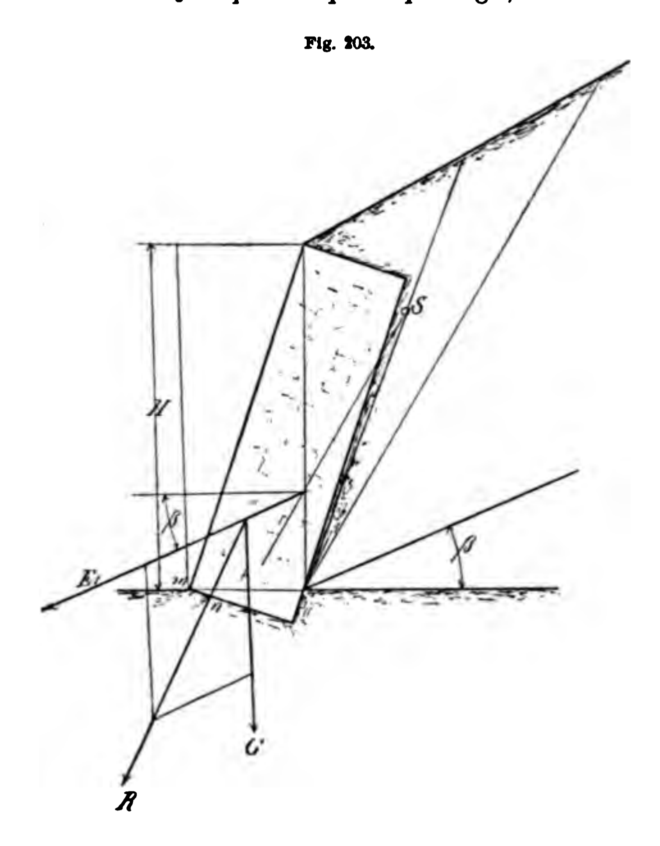
winkelige Mauern

(79c) . . . . . . . . $b = 18 \frac{H}{\sqrt{\gamma_1}}$.

Ist die Erde mit einer Last q Klg. pro □ᵐ noch besonders belastet Fig. 204, so dass für die Breite $B = 1$,

$$Q = qLB = qL = qH \operatorname{cotg} \alpha,$$

Fig. 203.




dann ist das Gesamtdruckgewicht

$$G + Q = G + qH \operatorname{cotg} \alpha.$$

Gl. a eingesetzt, ist die Druckkraft nach Gl. b

$$P = (\tfrac{1}{2} H^2 \gamma \operatorname{cotg} \alpha + qH \operatorname{cotg} \alpha) \operatorname{tg} (\alpha - \beta).$$

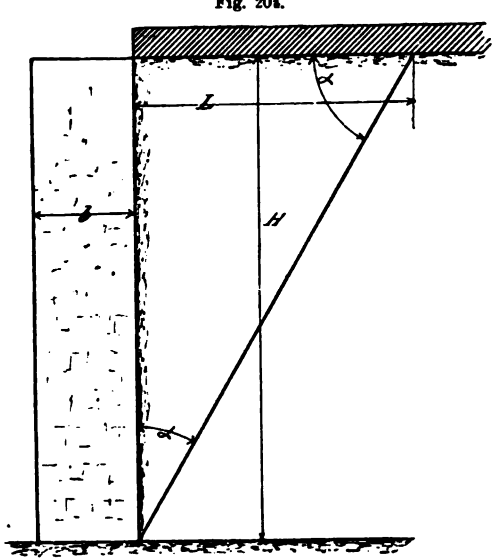
Die gleiche Betrachtung wie oben liefert für

$$P = P_{,} + P_{,,} = \tfrac{1}{2} H^2 \gamma \operatorname{tang}^2 (45 - \beta/2) + qH \operatorname{tg}^2 (45 - \beta/2)$$
$$= [\tfrac{1}{2} H^2 \gamma + qH] \operatorname{tg}^2 (45 - \beta/2).$$

Der Erddruck allein $P_1$ greift, wie uns bekannt, in $^1/_3$ der Höhe H

an; der Lastdruck $P_{,,}$, weil er unverändert auf der ganzen Höhe wirkt, als Mittelkraft auf das Mauerrechteck betrachtet, in $^1/_2$ der Höhe.

Fig. 204.



Die Momentengleichung ist dann mit Rücksicht auf Gl. f.

$$\frac{H}{3} P_, + \frac{H}{2} P_{,,} = \tfrac{1}{2} b^2 H \gamma_,$$

oder obige Ausdrücke eingeführt,

$$\tfrac{1}{6} H^3 \gamma \, tg^2 (45 - \beta/2) + q \, \tfrac{1}{2} H^2 \, tg^2 (45 - \beta/2 = \tfrac{1}{2} b^2 H \gamma_,;$$

Hieraus findet man

$$b = H \, tg (45 - \beta/2) \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma}{\gamma_,} + \frac{q}{\gamma_, H}} \; . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Im Sinne der graphischen Darstellungen der Figuren 201, 202, 203 zählen wir zum Erddruck die Belastung Q und verfahren wie dort angegeben, d. h. wir denken uns das spez. Gewicht der Erde um so viel grösser als das dem Gewicht Q entsprechend. —

---

**Beispiele:** Soll eine Mauer von $H = 2{,}5^m$ Höhe aus gewöhnlichen Ziegelsteinen, deren spez. Gewicht 1,4 sei, rechtwinkelig ausgeführt, trockene Dammerde stützen, dann muss nach der Tabelle S. 183, wenn wir $\beta = 45°$ zu Grunde legen, Gl. 79a,

$$b = 0{,}24 \, H \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_,}} = 0{,}24 \cdot 2{,}5 \sqrt{\frac{1500}{1400}} = 0{,}63^m \text{ sein.}$$

Wird oberhalb noch ein Pflasterweg angelegt, dann vermehrt sich das Gewicht um q = 700 Klg. pro □$^{m}$, und wir erhalten nach Gl. 80

$$b = 2{,}5 \operatorname{tg} 22^\circ 30 \sqrt{\frac{1}{3}\,\frac{1500}{1400} + \frac{700}{1400 \cdot 2{,}5}} = 0{,}77^{m}.$$

Die Stärke einer parallelpipedischen Futtermauer für ein Wasserbassin von H = 2,0$^{m}$ Tiefe und gutes Mauerwerk $\gamma_{,} = 2000$ Klg. pro Kubikmeter, wird nach 79c

$$b = 18 \frac{H}{\sqrt{2000}} = 0{,}85^{m}.$$

In Fig. 201 ist der Böschungswinkel $\beta = 25^\circ$, der Winkel des Druckprismas $\frac{90 - 25}{2} = 32^\circ\, 30'$. Das Gewicht desselben

$$E_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1800 = 5400 \text{ Klg.}$$

Das Gewicht der Futtermauer ist $G_1 = 1 \cdot 3 \cdot 2200 = 6600$ Klg., wenn das Mauerwerk zu 2200 Klg. pro Kubikm. angenommen wird. Trägt man $E_1$ und $G_1$ von o aus ab, dann schneidet die Resultante R in n ein; diese von n aus aufgetragen in der gleichen Richtung, erhält man die Teilkräfte T = 3000 und S = 11 000 Klg. aus der Zeichnung (3,8$^{mm}$ = 1000 Klg.). Das Fundament zu 7 Klg. pro □$^{ctm}$ gerechnet, muss $\frac{11\,000}{7} = 1600$ □$^{ctm}$ Fläche haben auf B = 1$^{m}$ = 100$^{ctm}$ Breite, die reichlich vorhanden ist. Eine Verschiebung durch T bietet keine Gefahr.

Die Rechnung liefert Gl. 79a

$$b = 0{,}58 \cdot 3 \cdot \operatorname{tg}\left(45 - \frac{25}{2}\right) \sqrt{\frac{1800}{2200}} = 1^{m}.$$

Der Böschungswinkel in Fig. 202 ist 34°. Das Gewicht des Erdprisma $E_1 = \frac{6{,}4 \cdot 2}{2} \cdot 1650 = 11\,000$ Klg.

Das Gewicht der Mauer war zu $G_1 = \frac{1 + 0{,}6}{2}\, 4 \cdot 2500 = 8000$ Klg. angenommen, H = 4$^{m}$, $\gamma_1 = 2500$ Klg. Der Schnittpunkt n fällt ausserhalb, wenn man $E_1$ und $G_1$ von o aus in Richtung des Winkels $\beta = 34^\circ$ von der Horizontalen abträgt. Bei geneigtem Terrain nimmt man noch besondere Rücksicht auf die Reibung des Prismas an der Mauer, wodurch der Druck grösser wird. Bei horizontalem Terrain in Fig. 201 behalten wir, wie auch in Fig. 200 vorausgesetzt, die Richtung des Reibungsprismas bei. Für die Ausführung haben wir Fig. 202 die Basis um ein Stück erbreitert, so dass die Krone jetzt 0,7$^{m}$ und die Basis 1,4$^{m}$.

Bei horizontalem Terrain würde man nach Gl. 79b oder 79a, $b = 1{,}1^m$ erhalten unter den in der Zeichnung bemerkten Annahmen.

Die Kräfte T und S geben auch hier zu keinen Befürchtungen Veranlassung.

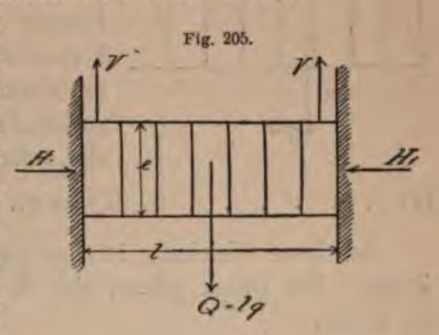
In Fig. 203 haben wir noch eine Stützmauer angedeutet (der Raum gestattet uns nicht dieses Kapitel weiter zu verfolgen), welche in Richtung der Resultante R liegt; wodurch die Stabilität, wie leicht zu übersehen, nur begünstigt wird. Die Mauer liegt hier unter einem Winkel und ist geradlinig, erhält namentlich bei Wasserbauten eine krummlinige Aussenfläche.

---

### III. Untersuchungen der Stabilität der Gewölbe.

Denken wir uns, Fig. 205, eine Reihe gleichgrosser Steine oder Gegenstände (Bücher z. B.) so zusammengepresst, dass sie sich gegenseitig nicht verschieben können, sondern infolge der Reibung in ihrer Lage verharren, so entsteht für uns die Frage, wie gross muss der Pressdruck $H_1$ sein, wenn Q das ganze oder q das Gewicht der Steine pro lauf. Meter; also $Q = lq$ ist?

Fig. 205.




Das Gewicht der Steinreihe muss zunächst den beiden vertikalen Kräften 2 V das Gleichgewicht halten können, oder

$$V = \frac{Q}{2} = \frac{1}{2} lq. \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

Damit die Steine durch den Reibungsdruck von $H_1$ halten, muss nach Gl. 65, 69 sein

$$V = \varphi H_1, \; \varphi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H_1}. \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

Die Reibung soll aber $V = \frac{Q}{2}$ das halbe Gewicht auf jeder Seite tragen können, somit folgt (a) in (b) eingesetzt,

$$H_1 = \frac{V}{\operatorname{tg}\alpha} = V \operatorname{cotg} \alpha = \frac{Q}{2} \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2} q l \operatorname{cotg} \alpha. \quad . \quad (81)$$

Je kleiner die Reibung, je kleiner $\alpha$ bezw. $\varphi$, um so mehr wird $\operatorname{cotg} \alpha = \infty$, um so grösser muss $H_1$ werden.

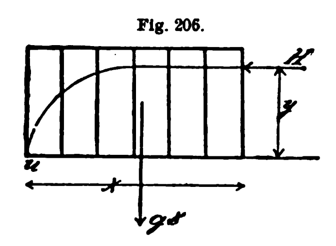
Gewöhnliche Ziegelsteine wiegen pro lauf. Meter in der Weise wie

Fig. 205 zusammengestellt $q = 60$ Klg.; damit sie sich durch Reibung auf $1^m$ frei halten, muss sein, wenn $\operatorname{tg} \alpha = \varphi = 0{,}67$ (S. Reibungstabelle).

$$H_1 = \frac{1}{2} 60 \frac{1}{0{,}67} = 45 \text{ Klg.}$$

Eine Reihe gleichgrosser Bücher, welche $Q = 5$ Klg. wiegen, auf $0{,}25^m$ zusammengestellt, erfordern einen Pressdruck, wenn der Reibungswinkel nach Fig. 187, $\alpha = 17°$,

$$H_1 = \frac{Q}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{5}{2} \frac{1}{0{,}3} = 8 \text{ Klg. abg.}$$


Fig. 206.

Nehmen wir ein beliebiges Stück der Steine von der horizontalen Länge x heraus, und lassen auf dasselbe in der senkrechten Entfernung y von der horizontalen Kante eine horizontale Kraft H, wie in Fig. 206 angedeutet, einwirken, so wird H eine Kantung um u vorzunehmen suchen; es tritt Gleichgewicht ein, wenn

(c) . . . . . . . . $$Hy = qx \frac{x}{2} = q \frac{x^2}{2}.$$

In dieser Gleichung ist das Gesetz einer parabolischen Kurve enthalten. Der Druck pflanzt sich in einer Parabel, Widerstandslinie, bis u fort.

Bemerkung. Aus c folgt $y = \frac{q}{2H} x^2 = mx^2$, wenn m die Konstante (z. B. 4) bezeichnet; setzt man der Reihe nach $x = 0, 1, 2 \ldots$, dann erhält man aus $y = 4x^2$, $y = 0, 4, 16 \ldots$

Die Endpunkte dieser Senkrechten verbunden, liefern die Kurve (S. gleichmässige Trägerbelastung). —

Setzen wir in Gl. c, $y = e$, $x = l/2$, dann folgt

(81a) . . . . . . . $$H = \frac{q}{e} \frac{l^2}{8} = \frac{Ql}{8e}.$$

Aus den Formeln Gl. 81 können wir schliessen, wenn $H > \frac{ql^2}{8e}$. dann tritt früher ein Kippen ein als ein Rutschen, wenn $H_1 < \frac{1}{2} ql \operatorname{cotg} \alpha$, dann rutschen die Steine früher herunter, als sie kippen.

Beide Kräfte werden gleich, wenn

$$\frac{ql^2}{8c} = \frac{1}{2} ql \operatorname{cotg} \alpha, \text{ oder}$$

(d) . . . . . . . . $$\operatorname{tang} \alpha = \frac{4e}{l}.$$

Für obiges Beispiel müsste in diesem Fall, wenn wir $e = 0{,}25$, $l = 1$ setzen, die Reibung grösser werden, nämlich

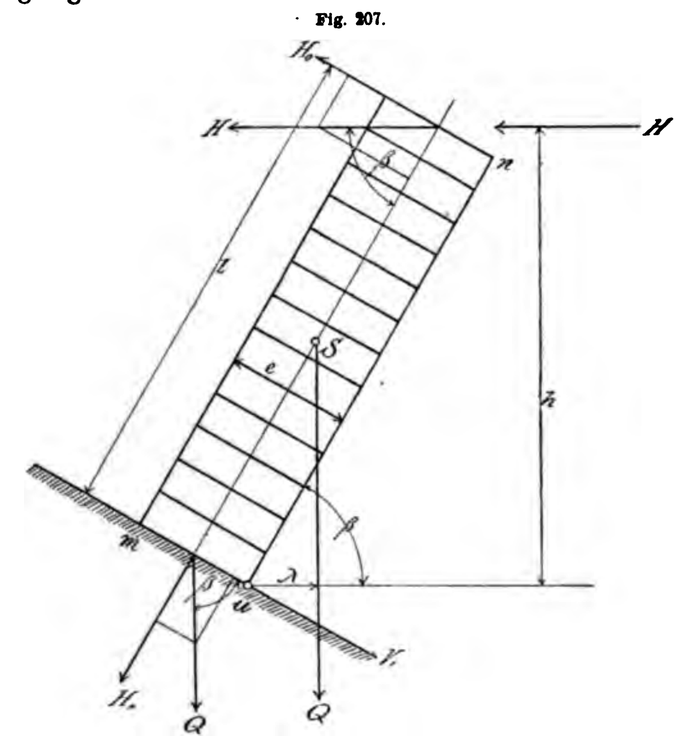
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot 0{,}25}{1} = 1,$$

$\alpha = 45^\circ$ sein. Da aber thatsächlich $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}67$, so wird $H_1 > H$ d. h.

$$H_1 > \frac{60 \cdot 1^2}{8 \cdot 0{,}25} > 30,$$

wir fanden oben $H_1 = 45$; hieraus folgt, dass man die Steine, wenn wir sie von einem Ort zum andern in der Zusammenstellung wie Fig. 205 tragen wollten, etwas schief halten müssen, wie die nächstfolgende Betrachtung ergeben dürfte.

Fig. 207.




Lassen wir auf eine unter dem Winkel β geneigte Steinschicht, Fig. 207, eine horizontale Kraft H einwirken, so wird diese das Gleichgewicht, einesteils um das Kanten um u zu verhindern, anderenteils um die Reibung zu vermehren, unter folgenden Bedingungen herstellen.

Zur Verhütung des Umsturzes allein muss sein $H_u h = Q\lambda$, wenn Q die Last im Schwerpunkt S angreift und λ und h die bewussten Hebel-

arme sind; es folgt dann die Umsturzkraft

$$\text{(e)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad H_u = \frac{Q\lambda}{h}.$$

Die Last Q drückt auf um und zerlegt sich in $V_1 = Q \cos\beta$ und $H_{,,} = Q \sin\beta$.

Die Kraft H lässt sich zerlegen in $H_1 = H \cos\beta$ und in $H_o = H \sin\beta$. Die letztere sucht die ganze Schicht, als auch die einzelnen Steine in die Höhe zu heben, um ihre oberen Kanten zu kippen.

$H_,$ und $H_{,,}$ bewirken die Reibung der Schicht auf mu; sie ist $\varphi . (H_, + H_{,,})$ und muss mit $V_1$ im Gleichgewicht sein, demnach die Reibungskraft mit $H_r$ bezeichnet und weil $\varphi = \operatorname{tg}\alpha$ ist, folgt

$$Q \cos\beta = \operatorname{tg}\alpha\,(Q \sin\beta + H_r \cos\beta),$$

hieraus folgt weiter

$$\text{(f)} \quad \ldots \quad H_r = Q\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}\beta\right) = Q\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Diese Kraft muss aufgewendet werden, damit die Steinmasse nicht abrutscht von ihrer Unterlage. Ist keine Reibung vorhanden, dann ist $\alpha = 0$, also $H_r = \infty$. Soll sich die Schicht ohne eine Kraftäusserung nur durch Reibung halten, dann würde für $H = 0$ aus (f) folgen

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\beta, \text{ oder } \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

d. h. dann muss $\beta = 90 - \alpha$ sein, die Steinschicht ist unter dem Reibungswinkel gelagert, je mehr wir uns diesem nähern, um so leichter ist eine solche Schicht transportfähig, wie wir oben schon Gelegenheit zu bemerken nahmen.

Ausser der in Gl. f entwickelten Reibungskraft $H_r$ muss die Steinschicht noch obiger Umsturzkraft $H_u = \frac{Q\lambda}{h}$ (Gl. e) das Gleichgewicht halten, so dass sich also H in $H_u + H_r$ zerlegt, beide halten die Schicht. Die Bedingung lautet demnach

$$H = \frac{Q\lambda}{h} + Q\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta},$$

woraus, wenn man $\cos(\alpha+\beta)$ zerlegt,

$$\text{(82)} \quad H = Q\left(\frac{\lambda}{h} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}\right) = Q\left(\frac{\lambda}{h} + \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\beta\right).$$

Wenn H klein genug, so dass kein Umsturz vorauszusehen ist, $\lambda = 0$, dann hat H nur dem Abrutschen das Gleichgewicht zu halten; wenn $\alpha = 0$, dann muss $H = \infty$ werden, wie uns bereits bekannt.

Wird aber H momentan grösser, dann wird ein Teil der Schicht, je nach der Vergrösserung von H in die Höhe klappen, eventuell auch die ganze Schicht um die obere Kante m, durch einen besonderen Druck in Richtung $H_1$ oder senkrecht von oben müsste dann diesem Moment entgegengearbeitet werden, damit keine klaffenden Fugen entstehen.

Aus der Figur findet man, um λ und h abhängig von e und l zu erhalten

$$\lambda = {}^1/_2\ (l \cos\beta - e \sin\beta),\ h = l \sin\beta + \frac{e}{l} \cos\beta.$$

Man erhält dann durch Division

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{\frac{1}{2}(l \cos\beta - e \sin\beta)}{l \sin\beta + \frac{e}{l}\cos\beta} = \frac{1 - \frac{e}{l}\operatorname{tg}\beta}{2 \operatorname{tg}\beta + \frac{e}{l}}$$

und in H gesetzt,

$$H = Q\left[\frac{1 - \frac{e}{l}\operatorname{tg}\beta}{2 \operatorname{tg}\beta + \frac{e}{l}} + \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\beta\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (82a)$$

Ist $1 = \frac{e}{l}\operatorname{tg}\beta$, also $\operatorname{tg}\beta = \frac{l}{e}$, dann ist kein Umsturz zu befürchten, wenn $\beta \gtreqless 90 - \alpha$, dann ist kein Rutschen zu befürchten.

Eine Steinschicht $e = 0{,}25$ Steinlänge, $l = 0{,}8^m$ Schichtlänge hat, wenn $\alpha = 33^\circ 40'$ angenommen wird, unter $\beta = 45^\circ$ Neigung eine Stütz- und Reibungskraft nötig von

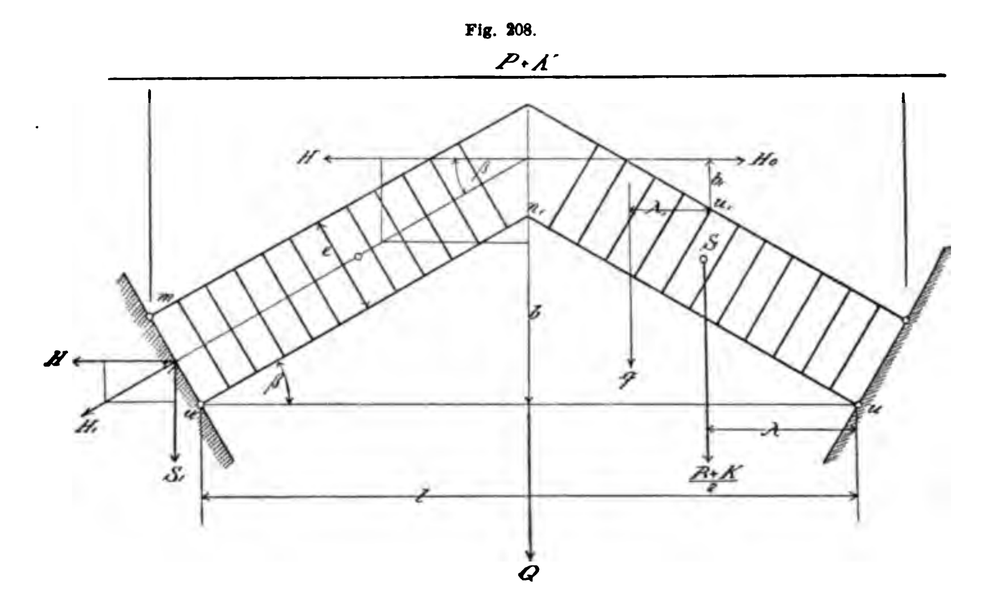
$$H = Q\left[\frac{1 - \frac{0{,}25}{0{,}80}}{2 + \frac{0{,}25}{0{,}80}} + \operatorname{cotg} 33^\circ 40' - 1\right] = \frac{9}{14}\, Q \text{ Klg.},$$

wenn Q das Gewicht der Steine. Nehmen wir $Q = 50$ Klg. für diesen Steinsatz, dann wird $H = 32$ Klg. Einige Klg. mehr Druck dürfte schon zum Kippen, ev. klaffenden Fugen Veranlassung geben. In der folgenden Figur 208 sind solche klaffende Fugen noch früher wahrscheinlich.

Wir nehmen hier zwei unter einem Winkel β geneigte, sich gegenseitig berührende, Steinsätze an. Jede drückt die andere mit der Horizontalkraft H, die sich gegenseitig aufheben, wenn Gleichtgewicht vorhanden. Wird aber H nach einer Richtung grösser, zu $H_0$, dann kann ein Fugenklappen um eine Kante $u_1$ eintreten, in der Gleichung $H_0 h_1 = q \lambda_1$

wird dann das Gleichgewicht gestört, $H > \frac{q \lambda_1}{h_1}$. Andererseits kann H zu klein sein, infolgedessen kann ein Rutschen der ganzen Masse oder ein

Fig. 208.



Herausrutschen der einzelnen Steine eintreten. Beides können wir vermeiden, wenn wir die beiden Schichten mit einer gleichmässig verteilten Last K belasten, hinterlegen, hintermauern, welche die Reibung vermehrt und einem Klappen nach oben entgegenwirkt; es käme nur darauf an, die Steinschicht stark genug zu machen, damit sie auch nicht zerdrückt, zerbröckelt werde.

Wir wollen uns statt der gleichmässig verteilten Gesamtlast, aus dem Eigengewicht P und noch einer sog. zufälligen Last K bestehend, eine konzentrierte Last Q Klg. in der Mitte angreifend denken, dann zerlegt sich $\frac{Q}{2}$ in H und $H_1$. Es ist $\frac{Q}{2 H_1} = \sin\beta$ und $\frac{Q}{2 H} = \tan\beta$. Die Zerlegung in n führt, wie uns bekannt (S. S. 67) zu $S_1 = \frac{Q}{2}$, während H seitlich auf das Widerlager einwirkt.

Die letzten Gleichungen führen zu

$$\text{(h)} \quad . \; . \; . \quad H_1 = \frac{Q}{2 \sin\beta} \text{ und } H = \frac{Q}{2\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{Q}{2} \cot\beta.$$

Setzt man in diese $\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{2b}$ und berücksichtigt, dass

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\beta}}, \text{ dann folgt}$$

$$H_1 = \frac{Q}{2}\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\beta} = \frac{Q}{2}\sqrt{1+\left(\frac{l}{2b}\right)^2} = \frac{Q}{4b}\sqrt{4b^2+l^2}, \quad (h_1)$$

$$H = \frac{Q}{2}\operatorname{cotg}\beta = \frac{Q}{4}\frac{l}{b}, \quad \text{(i)}$$

$$S_1 = \frac{Q}{2}. \quad \text{(k)}$$

Lassen wir H in $n_1$ angreifen und P + K im Schwerpunkt S, dann erhalten wir aus der Momentengleichung

$$\frac{P+K}{2}\lambda = Hb,$$

$$H = \frac{P+K}{2}\frac{\lambda}{b}. \quad (l_1)$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich unmittelbar auf die Dimensionen schliessen, wenn bekannt ist, wieviel Druck ein Stein pro $\square^m$ oder pro $\square^{ctm}$ aushalten kann. $H_1$ muss gross genug sein, damit durch den darauf-liegenden Druck keine Steine durchrutschen.

Man übersieht nun, dass H, $H_1$, also auch die Dimensionen der Steinsätze grösser werden, wenn l (λ) wächst oder b kleiner wird.

Würde man die Gl. $h_1$ zur Bestimmung der Dimensionen verwenden, und würde ein $B^m$ breiter Stein von der Höhe $e^m$, eBs Klg., also s Klg. pro $\square^m$ Druck aushalten können, dann erhält man die Formel

$$eBs = \frac{Q}{4b}\sqrt{4b^2+l^2}.$$

Die Stärke einer $B = 1^m$ breiten Schicht wäre dann

$$e = \frac{Q}{4sb}\sqrt{4b^2+l^2}.$$

Wenn $b = \frac{1}{4}l$, s = 70 000 Klg. pro $\square^m$, dann folgt

$$e = 0{,}000\,016\ Q.$$

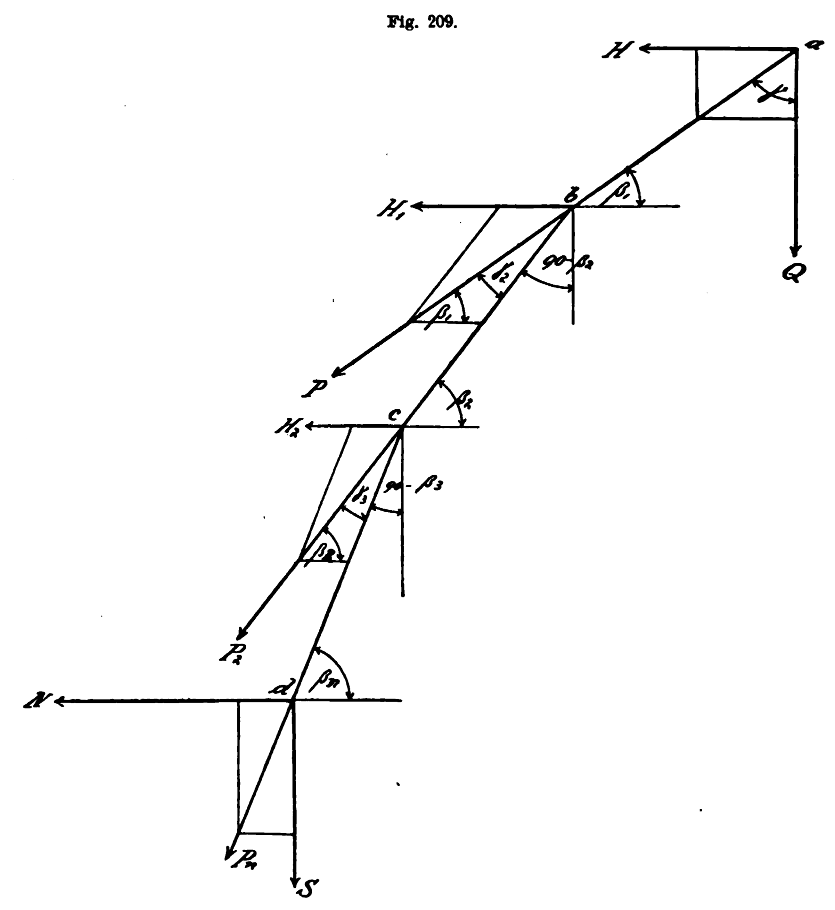
Eine Steinschicht von $e = 0{,}25^m$ und $1^m$ Breite würde

$$Q = \frac{0{,}25}{0{,}000\,016} = 15\,630 \text{ Klg. tragen können.}$$

Eine günstigere Verteilung des Druckes erhalten wir, wenn H unmittelbar senkrecht auf die Steinschicht wirkt, oder wirken kann, und hierbei aber wieder der Druck möglichst durch die Mitte der Steine führt bis zur Auflage am Widerlager. Wenden wir darum statt einer geraden eine

gebrochene oder in Bogenform ausgeführte Steinschicht an, dann ist zugleich auch die Winkellage der Steine günstiger; diese müssen eine immer

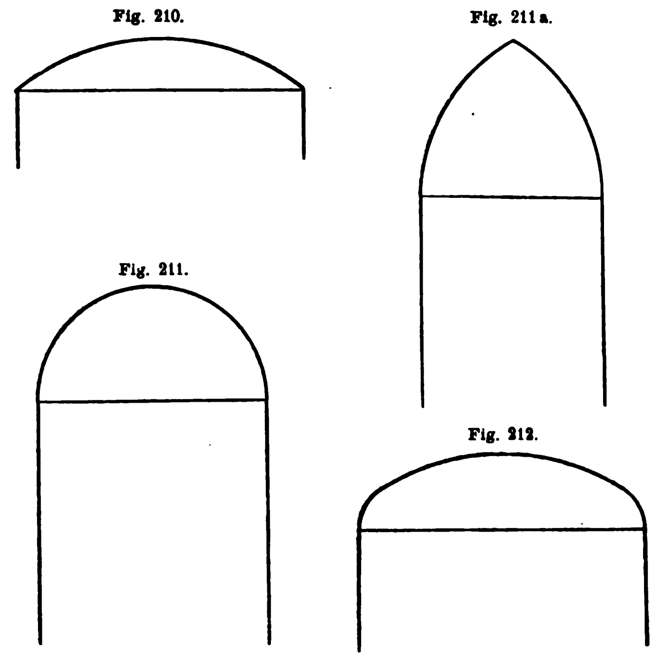
Fig. 209.



etwas konische Form erhalten, wodurch sie nicht so gefährdet sind, wie oben angedeutet bei der geraden, ev. Sehnenform. Eine solche Zusammenstellung heisst ein Gewölbe. Die Figuren 209 und 213 sollen uns den Kräftezug, die Verteilung der Kraftwirkung in einem Gewölbe andeuten und erklären.

Die von der Belastung herrührende Horizontalkraft H und Vertikalkraft Q bilden die Resultante $P_1$; diese zerlegen wir in $H_1$ und $P_2$, $P_2$ wirkt auf die nächste Schicht, $H_1$ sucht ein Kippen zu veranlassen; $P_2$ zerlegt sich in $H_2$ und $P_3$ u. s. w. bis die letzte Kraft $P_n$ auf das Widerlager einwirkt. Der Linienzug abcd . . . . muss inmitten der Steine blei-

ben, die Gewölbstärke e muss gross genug sein, damit die Kräfte H keinen Einfluss ausüben können. Bezeichnen wir die Winkel in den


Fig. 210. Fig. 211a. Fig. 211. Fig. 212.

Kräftedreiecken mit $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots$ und $\mathfrak{S}_1 = 180 - (\beta_1 + \gamma_2)$, $\mathfrak{S}_2 = 180 - (\beta_2 + \gamma_3)$, $\mathfrak{S}_3 = 180 - (\beta_3 + \gamma_4) \ldots$, so übersieht man leicht den Zusammenhang zwischen $< \beta$ und $\gamma$; nämlich

$$\gamma_1 = 90 - \beta_1;\ \gamma_2 = \gamma_1 - (90 - \beta_2) = \beta_2 - \beta_1,$$
$$\gamma_3 = 90 - \beta_2 - (90 - \beta_3) = \beta_3 - \beta_2,$$
$$\gamma_4 = \beta_4 - \beta_3;\ \gamma_5 = \beta_5 - \beta_4 \ldots, \text{ somit auch eingesetzt,}$$
$$\mathfrak{S}_1 = 180 - \beta_2,\ \mathfrak{S}_2 = 180 - \beta_3,\ \mathfrak{S}_3 = 180 - \beta_4 \ldots$$

Die Zerlegungen ergeben $H = P_1 \cos \beta_1$, und

$$P_1 : \sin \mathfrak{S}_1 = P_2 : \sin \beta_1,$$
$$P_2 : \sin \mathfrak{S}_2 = P_3 : \sin \beta_2,$$
$$P_3 : \sin \mathfrak{S}_3 = P_4 : \sin \beta_3.$$

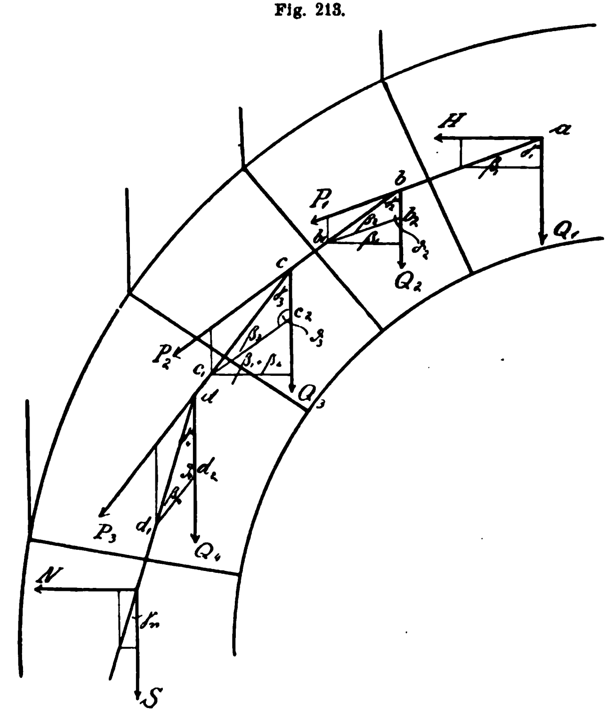
Hieraus findet man, obige Winkel berücksichtigt,

$$P_2 = \frac{P_1 \sin \beta_1}{\sin \mathfrak{S}_1} = P_1 \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2},$$
$$P_3 = P_2 \frac{\sin \beta_2}{\sin \mathfrak{S}_2} = P_2 \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3},$$
$$P_4 = P_3 \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_4} \ldots \ldots \text{ oder}$$

$$P_1 = \frac{H}{\cos \beta_1}; \; P_2 = \frac{H}{\cos \beta_1} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = H \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sin \beta_2},$$

$$P_3 = H \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sin \beta_3}; \; P_4 = H \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sin \beta_4} \; \ldots\ldots$$

Fig. 213.




Aus dem oberen Dreieck folgt $\frac{Q}{H} = \operatorname{tg} \beta_1$, man kann also auch setzen, weil hiernach $H = \frac{Q}{\operatorname{tg} \beta_1}$ und $H \operatorname{tg} \beta_1 = Q$,

(1) . . . . $P_1 = \frac{Q}{\sin \beta_1}, \; P_2 = \frac{Q}{\sin \beta_2}, \; P_3 = \frac{Q}{\sin \beta_3} \ldots$

Je kleiner die Winkel $\beta$, je flacher das Gewölbe ausgeführt wird, um so grösser werden die Kräfte P, um so stärker muss das Gewölbe werden.

Sind alle Winkel $\beta$ gleich, dann resultiert die obige Sehnenform, Fig. 208, und es wird $P_4 = H_1 = \frac{Q}{\sin \beta}$, Gl. h. Das Gewölbe übt auf das Widerlager den Vertikaldruck S und den Schub N aus, beide Teilkräfte ergeben sich durch Zerlegung aus der letzten Kraft $P_n$. —

Die Horizontalkräfte H findet man aus den Proportionen Fig. 209

$$H_1 : \sin \gamma_2 = P_1 : \sin \vartheta_1,$$
$$H_2 : \sin \gamma_3 = P_2 : \sin \vartheta_2,$$
$$H_3 : \sin \gamma_4 = P_3 : \sin \vartheta_3.$$
$$\vdots$$

Aus diesen folgt:

$$H_1 = P_1 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \vartheta_1} = P_1 \frac{\sin (\beta_2 - \beta_1)}{\sin \beta_2},$$
$$H_2 = P_2 \frac{\sin (\beta_3 - \beta_1)}{\sin \beta_3},$$
$$H_3 = P_3 \frac{\sin (\beta_4 - \beta_3)}{\sin \beta_4} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man in diese Gleichungen die Ausdrücke von (l) ein, dann folgt nach Auflösungen der trig. Funktionen und den nötigen Reduktionen

$$H = Q \operatorname{cotg} \beta_1,$$
$$H_1 = Q (\operatorname{cotg} \beta_1 - \operatorname{cotg} \beta_2),$$
$$H_2 = Q (\operatorname{cotg} \beta_2 - \operatorname{cotg} \beta_3), \quad \ldots\ldots \quad \text{(m)}$$
$$H_3 = Q (\operatorname{cotg} \beta_3 - \operatorname{cotg} \beta_4).$$
$$\vdots$$

Die vorstehenden Gleichungen (l, m) sagen aus, dass ein flaches Gewölbe einen grossen Seitendruck auszuhalten hat ($\beta$ klein), dass je grösser $\beta$, ein hohes Gewölbe, der Seitendruck mehr und mehr verschwindet, hingegen der Vertikaldruck sich mehr der vertikalen Last nähert, für $\beta_3 = 90°$ wird Gl. l $P_3 = Q$. Flache Gewölbe (Segmente), Fig. 210, benötigen hiernach stärkere Widerlager als hohe Gewölbe, Fig. 211 (Kreisbogen, Spitzbogen), die aber wieder verhältnismässig schwächer sein können.

Eine mittlere Form (elliptische Gewölbe) dürfte allen Anforderungen Genüge leisten, Fig. 212.

Die Kräfte P und H werden in der Nähe des Scheitels gross, nach den Kämpfern zu werden die Kräfte H kleiner, und nähern sich die Kräfte P der Vertikalbelastung, weil $\beta$ im ersteren Fall klein, nach den Widerlagern zu gross wird. Ein Abrutschen der Steine ist demnach mehr nach dem Scheitel zu zu befürchten. —

In Fig. 213 haben wir eine gleichmässig verteilte Last auf dem Gewölbe angenommen, und diese mit der Hintermauerung und dem Gewölbe in Teile zerlegt $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ ... Im Scheitel wirkt die Kraft H, welche mit $Q_1$ die Teilkraft $P_1$ für das zweite Gewölbeelement (als Resultante von H und $Q_1$) bildet, $P_1$ mit dem Gewicht des zweiten Gewichtselementes $Q_2$ bildet die Resultante $P_3$, zugleich wieder Teilkraft mit $Q_3$ u. s. w.

Die letzte Kraft $P_2$ wirkt auf das Widerlager, und zerlegt sich in S und N.

Die gebrochene Linie abcd ... ist die Druck- oder Widerstandslinie, welche sich mehr und mehr einer Kurve (Parabel) nähert, je kleiner die Gewichtseinteilung gewählt wird.

Ist H die horizontale Kraft in der Scheitelfuge; sind $\beta$, $\gamma$, $\vartheta$ die Kräftedreieckswinkel, dann findet man leicht aus den ähnlichen Dreiecken die folgenden Winkelbeziehungen:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 90 - \beta_1,\\
\gamma_2 &= 90 - (\beta_1 + \beta_2),\\
\gamma_3 &= 90 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= 90,\\
\vartheta_2 &= 180 - (\gamma_2 + \beta_2) = 90 + \beta_1,\\
\vartheta_3 &= 180 - (\gamma_3 + \beta_3) = 90 + (\beta_1 + \beta_2),\\
\vartheta_4 &= 180 - (\gamma_4 + \beta_4) = 90 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Kräftebeziehungen in den Dreiecken $bb, b_{,,}$, $cc, c_{,,}$, $dd, d_{,,}$ ... sind nach dem Sinussatz (S. Parallelogramm der Kräfte):

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{Q}{\sin\beta_1},\\
P_1 : \sin\gamma &= P_2 : \sin\vartheta_2 = Q_2 : \sin\beta_2,\\
P_2 : \sin\gamma_3 &= P_3 : \sin\vartheta_3 = Q_3 : \sin\beta_3,\\
P_3 : \sin\gamma_4 &= P_4 : \sin\vartheta_4 = Q_4 : \sin\beta_4.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Verbindet man die letzten Proportionen, um $P_2$, $P_3$, $P_4$ ... abhängig von $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ ... zu gewinnen und setzt die obigen Winkel ein, dann erhält man nach der nötigen Reduktion,

$$(n)\;.\;\left\{\begin{aligned}
&P_1 = \frac{Q_1}{\sin\beta_1},\quad P_2 = Q_2\,\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\beta_2} = Q_2\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_2},\\
&P_3 = Q_3\,\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_3},\quad P_4 = Q_4\,\frac{\cos(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}{\sin\beta_4},\\
&P_n = Q_n\,\frac{\cos(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\beta_{4-1})}{\sin\beta_4}.
\end{aligned}\right.$$

Die rechtwinkelige Zerlegung am Widerleger liefert die Teilkräfte

$$(o)\;\ldots\;.\;\left\{\begin{aligned}
N &= P_n\cos(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_4)\\
S &= P_n\sin(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_4)
\end{aligned}\right.$$

die oberen ersten Proportionen geben die Beziehungen der Kräfte P unter sich.

Aus den vorstehenden Formeln lassen sich dieselben Schlüsse ziehen, wie im ersten Fall. Die einzelnen Parallelogramme in Fig. 213 kann man selbstverständlich auch konstruieren, wenn die Werte von $H, Q_1 Q_2 \ldots$ bekannt sind, und müssen die Gewölbsteine senkrecht auf den resultierenden Linienzug stehen; wir werden aber weiter unten noch ein einfacheres Konstruktionsverfahren kennen lernen in der Anwendung der Graphostatik, welches uns zugleich auch die Kräfte H, N und S erkennen lässt. —

Bezeichnet man das Eigengewicht des Gewölbes mit P, die gleichmässig verteilte Last, welche das Gewölbe ausser diesem Eigengewicht tragen soll, mit K, dann ist für das halbe Gewölbe $Q = \frac{P + K}{2}$. Diese Kraft greift, Fig. 214, im Schwerpunkt S an. Zur Bestimmung der Kraft H, hat man sonach allgemein, s. Gl. $l_1$, $Hb = Q\lambda$, um das Kippen um u zu verhindern, woraus

$$H = Q\frac{\lambda}{b} = \frac{P + K}{2}\frac{\lambda}{b}. \quad \ldots \ldots \quad (83)$$

Sucht man für irgend eine Gewölbeform einen Ausdruck für λ, der jedenfalls von der Spannweite l abhängen muss, zu gewinnen, dann kann man H, wenn Last und Eigengewicht bekannt, berechnen. Kann nun 1 □ᵐ einer $B^m$ breiten Gewölbeschicht, deren Stärke $e^m$, s Klg. ohne zerstört zu werden mit genügender Sicherheit tragen, dann kann man aus

$$eBs = H \quad . \; . \quad (83a)$$

Fig. 214.



die Dimensionen folgern, welche man dem Gewölbescheitel geben muss. Durch Gleichsetzung mit (83) erhält man $eBs = \frac{P + K}{2}\frac{\lambda}{b}$ und für $B = 1^m$ Breite,

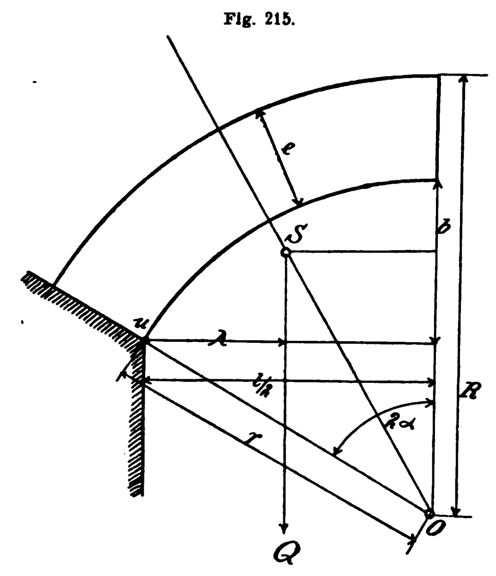
$$e = \frac{P + K}{2}\frac{\lambda}{bs}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

Die hieraus abgeleitete praktische (empirische) Formel ist, wenn μ und c zwei Koefficienten, G Gesamtlast

$$e = \frac{G}{\mu}\frac{l}{bs} + c, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84a)$$

welche auch noch weiter reduciert wird.

Fig. 215.




Es sei in nebenstehender Figur ein halbes Kreissegmentgewölbe dargestellt.

Die Schwerpunktsentfernung OS ist nach S. 98

$$OS = {}^2/_3 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Es wird dann

$$\lambda = \frac{l}{2} - OS \sin \alpha,$$

und weil

$$\frac{l}{2} = r \sin 2\alpha,$$

so folgt

$$\text{(p)} \quad \ldots \quad \lambda = r \sin 2\alpha - {}^2/_3 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}.$$

Für den Halbkreis (Tonnengewölbe) erhält man $2\alpha = 90°$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Die Formel (p) liefert für verschiedene Kreislängen

| | | |
|---|---|---|
| Halbkreis- | $^3/_8$ Kreis- | $^1/_3$ Kreisgewölbe |
| Bogen $\alpha = \frac{\pi}{4}$ | $^3/_{16}\ \pi$ | $^1/_6\ \pi$ |
| $2\alpha = 90°$ | $67\,^1/_2°$ | $60°$ |
| $\lambda = r - 0{,}424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ | $0{,}974 r - 0{,}348 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ | $0{,}866 r - 0{,}318 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ |
| $^1/_4$ Kreis- | $^1/_6$ Kreis- | $^1/_8$ Kreisgewölbe |
| $^1/_8\ \pi$ | $^1/_{12}\ \pi$ | $^1/_{16}\ \pi$ |
| $45°$ | $30°$ | $22\,^1/_2°$ |
| $0{,}7 r - 0{,}255 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ | $0{,}5 r - 0{,}173 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ | $0{,}38 r - 0{,}130 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$. |

Setzt man in Gl. (p) $r = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}$, $R = r + e$, dann erhält man nach gehöriger Reduktion

$$(\text{p}_1) \quad \ldots \quad \lambda = \frac{l}{2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \frac{\left(\frac{l}{e}\right) \frac{1}{2 \sin 2\alpha} + 1}{\left(\frac{l}{e}\right) \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1} \right].$$

Hierin ist $\frac{l}{2}$ die halbe Spannweite, $\frac{e}{l}$ die relative Grösse der Scheitelstärke, im Verhältnis zur Spannweite stehend.

Für die verschiedenen Kreislängen erhält man:

Halbkreisgewölbe $\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - 1{,}27\,\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{e}\right)+1}{\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right]$; $b = \frac{l}{2}$

$^3/_8$ Kreisgewölbe $\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - 1{,}13\,\frac{0{,}54\left(\frac{l}{e}\right)+1}{1{,}08\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right]$; $b = 0{,}334\,l$

$^1/_3$ Kreisgewölbe $\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - 1{,}10\,\frac{0{,}58\left(\frac{l}{e}\right)+1}{1{,}16\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right]$; $b = 0{,}288\,l$

$^1/_4$ Kreisgewölbe $\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - 1{,}06\,\frac{0{,}70\left(\frac{l}{e}\right)+1}{1{,}40\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right]$; $b = 0{,}208\,l$

$^1/_6$ Kreisgewölbe $\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - \frac{\left(\frac{l}{e}\right)+1}{2\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right]$; $b - 0{,}134\,l$

$^1/_8$ Kreisbogen $\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - 0{,}99\,\frac{1{,}30\left(\frac{l}{e}\right)+1}{2{,}61\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right]$; $b = 0{,}1\,l$

Die Bogenhöhe abhängig von der Sehne ist

$$b = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(1 - \cos 2\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

Kombiniert man die Gl. 84 und $(p_1)$ derart miteinander, dass man $\frac{\tang \alpha}{\alpha} = u$, $\frac{1}{2\sin 2\alpha} = v$ und $\frac{1}{\sin 2\alpha} = 2v$ setzt, dann ergiebt sich für

$$e = \frac{P+K}{2\,bs}\,\frac{l}{2}\left[1 - u\,\frac{v\left(\frac{l}{e}\right)+1}{2v\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right], \text{ hieraus}$$

$$\left(\frac{e}{l}\right) = C\left[1 - u\,\frac{v\left(\frac{l}{e}\right)+1}{2v\left(\frac{l}{e}\right)+1}\right],\ \text{worin}\ C = \frac{1}{4}\,\frac{P+K}{bs}.$$

Löst man diese Gleichung auf nach $\left(\frac{e}{l}\right)$, dann erhält man schliesslich:

$$\frac{e}{l} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{[2v + C(u-1)]^2 + 4Cv(2-u)} - [2v + C(u-1)]\right];$$

setzt man C zurück, dann ist die Scheitelstärke des Kreisgewölbes für einen beliebigen Kreisbogen, für die Konstanten u und v, die aus obiger Tabelle zu entnehmen sind,

$$e = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left[2v + \frac{1}{4}\,\frac{P+K}{bs}(u-1)\right]^2 + \frac{P+K}{bs}v(2-u)}\right.$$

(84b) . . . . . . . . . . . $$\left. - \left[2v + \frac{P+K}{4\,bs}(u-1)\right]\right\}.$$

Für ein $^1/_4$ Kreisgewölbe würde, $u = 1{,}06$, $v = 0{,}70$; für den Sechstel- und Achtelsegmentbogen wird $u = 1$.

Diese erhalten die theoretische Stärke

(84c) . . $$e = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left[4v^2 + \frac{P+K}{bs}v\right]} - 2v\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die Formel 84a kann man angenähert setzen für kleine und mittlere Brücken-Gewölbe*), $\lambda = \frac{l}{4}$ und

(84d) . . . . . $$e = 0{,}25^m + \frac{P+K}{8s}\,\frac{l}{b}.$$

Für Gewölbe, welche wenig oder nur ihr Eigengewicht zu tragen haben, wird die Konstande c kleiner; eine solche müsste in der Praxis auch den Formeln 84b und 84c zugefügt werden. —

Für ein elliptisches Gewölbe kann man genau genügend (S. S. 98) setzen $\lambda = 0{,}4\left(\frac{l}{2}\right) = 0{,}2\,l$; man erhält dann nach Gl. 84, bezw. 84a,

(84e) . . . . $$e = c + \frac{1}{10}(P+K)\frac{l}{bs}.$$

Bemerkung. Der Festigkeitskoefficient s**) schwankt zwischen $s = 30\,000$ bis $70\,000$ Klg. pro □$^m$.

*) S. d. demnächst erscheinenden Brückenbau d. Verf.

**) S. Festigkeitslehre.

Das Eigenewicht ist annähernd, wenn $\sigma$ das spez. Gewicht

$$P = 500\, l\sigma\,(b' + 0{,}6) \text{ Klg.}$$

für eine $1^m$ breite Brücke.

**Beispiele.** 1) Eine Brücke von $l = 5^m$ Spannweite, $5^m$ Breite in Halbkreisform ausgeführt, $b = 2{,}5^m$ soll eine Belastung $K_1 = 40\,000$ Klg. tragen. Das Eigengewicht wollen wir annehmen bei $\sigma = 2$ spez. Gew. zu $P = 500 \cdot 5 \cdot 2\,(2{,}5 + 0{,}6) = 15\,000$ Klg. abg., so dass also auf $1^m$ Breite reduciert $K = 8000$ und $P + K = 23\,000$ einzuführen wäre.

Nach obigen Angaben S. 203 ist $u = 1{,}27$, $v = {}^1/_2 = 0{,}5$; gleichzeitig mit $s = 50\,0000$ Klg. in Gl. 84b eingesetzt, folgt

$$e = \frac{5}{2}\left\{\sqrt{\left[2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{23\,000}{2{,}5 \cdot 50000}(1{,}27 - 1)\right]^2 + \frac{23\,000}{2{,}5 \cdot 50000}\,\frac{1}{2}(2 - 1{,}27)} - \left[2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{23\,000}{4 \cdot 2{,}5 \cdot 50\,000}(1{,}27 - 1)\right]\right\}$$

$$e = 2{,}5\,\{\sqrt{[1 + 0{,}0124]^2 + 0{,}067} - (1 + 0{,}0124)\} = 0{,}08^m.$$

Hierzu die Konstante $c = 0{,}25$ wird $e = 0{,}33^m$.

Nach 84d erhält man

$$e = 0{,}25 + \frac{23\,000 \cdot 5}{8 \cdot 50000 \cdot 2{,}5} = 0{,}25 + 0{,}12 = 0{,}37^m.$$

2) Es sei eine Brücke mit Segmentbogen von $l = 5^m$ Spannweite als Viertelkreis und derselben Breite und Belastung, wie im vorigen Beispiele zu berechnen; $P + K = 23\,000$ Klg., $s = 50\,000$ Klg. pro $\square^m$.

Nach S. 203 ist $b = 0{,}208\,l = 1{,}04^m$, $u = 1{,}06$, $v = 0{,}7$.

Man erhält nach Gl. 84b

$$e = \frac{5}{2}\left\{\sqrt{\left[2 \cdot 0{,}7 + {}^1/_4\,\frac{23\,000}{1{,}04 \cdot 50000}(1{,}06 - 1)\right]^2 + \frac{23\,000}{1{,}04 \cdot 50000}\,0{,}7\,(2 - 1{,}06)} - \left(2 \cdot 0{,}7 + \frac{23\,000}{4 \cdot 1{,}04 \cdot 50000}(1{,}06 - 1)\right)\right\}$$

$$e = {}^5/_2\,\{\sqrt{[1{,}4 + 0{,}0067]^2 + 0{,}3} - (1{,}4 + 0{,}0087)\} = {}^5/_2 \cdot 0{,}11 = 0{,}27.$$

Hierzu die Konstante 0,25, folgt $e = 0{,}52^m$.

Ein elliptischer Bogen würde eine Scheitelstärke des Gewölbes nach 84e liefern,

$$e = 0{,}25 + \frac{1}{10}\,23000 \cdot \frac{5}{1{,}04 \cdot 50000} = 0{,}47^m.$$

3) Bei sehr schwachen ruhenden Belastungen, wie sie meist im Hochbau vorkommen, wird der Kofficient c auch, wenn es möglich ist die Belastung noch anzugeben, kleiner angenommen bis $c = 0{,}1^m$; andern-

falls, wenn kaum eine Belastung vorliegt, wird die Gewölbstärke direkt proportional der Spannweite gesetzt, indem theoretisch zu geringe Dimensionen erzielt werden.

Ist für ein Gewölbe $P+K=1000$ Klg., $l=1{,}2^m$; und wird $^1/_6$ Kreisbogen, also $b=0{,}134\cdot 1{,}2=0{,}16^m$ Pfeilhöhe vorausgesetzt, dann erhält man nach Gl. 84c, weil $u=1$, $v=1$, bei $s=30000$ Klg. (Minimum),

$$e=\frac{1{,}2}{2}\left\{\sqrt{4+\frac{1000}{0{,}16\cdot 30000}}-2\right\}=0{,}04^m.$$

Hierzu $0{,}1^m$ (Minimum) giebt abg. eine Steinstärke (Rollschicht).

Wollen wir endlich untersuchen, ob die Steine am Scheitel herausrutschen, dann dient uns Gl. 83a zur Berechnung von H; für $B=1$, $e=0{,}04$ folgt $H=e\cdot s=0{,}04\cdot 30\,000=1200$ Klg.

Gl. 81 liefert $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{H_1}{\frac{1}{2}ql}$; die Belastung pro lauf. Meter ist $q=\frac{1000}{1{,}2}=833$, $H_1=H$ gesetzt, folgt der Reibungswinkel

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1200\cdot 2}{833\cdot 1{,}2}=2{,}4,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2{,}4}=0{,}417,\quad \alpha=22^\circ\,30.$$

Unter diesem Winkel, bezw. dem Reibungskoefficient $\varphi=0{,}417$ ist kein Abrutschen zu befürchten. In der Nähe der Kämpfer liegen die Steine ohnedies günstiger.

---

Jedes Gewölbe stützt sich seitlich auf die Widerlager, welche je nach der Gewölbeform einen grösseren oder geringeren Seitendruck auszuhalten haben, und also wie die Stützmauern durch ihr Gewicht vor Umkanten und einer etwaigen horizontalen Verschiebung zu sichern sind. Das Fundament muss natürlich den endgültigen vertikalen Kräften durch seine Festigkeit Widerstand leisten. Wir werden in der Graphostatik, wie schon angedeutet, noch näher hierauf zurückkommen.

Die Resultante aus N und S, also die Widerlagerkraft $P_n$, bildet, wie in Fig. 216 angedeutet, mit dem Gewicht des Widerlagers die Resultante R (S. auch Fig. 202), diese muss innerhalb der Basis fallen. R zerlegt sich wieder in V und T. Letztere sucht die Reibung des Widerlagers zu überwinden, V hingegen das Fundament zu zerdrücken.

Für sehr flache Gewölbe ist auch annähernd $P_n=H_1$ Gl. $h_1$, S. 195.

Setzen wir hier wegen der gleichmässigen Verteilung der Last

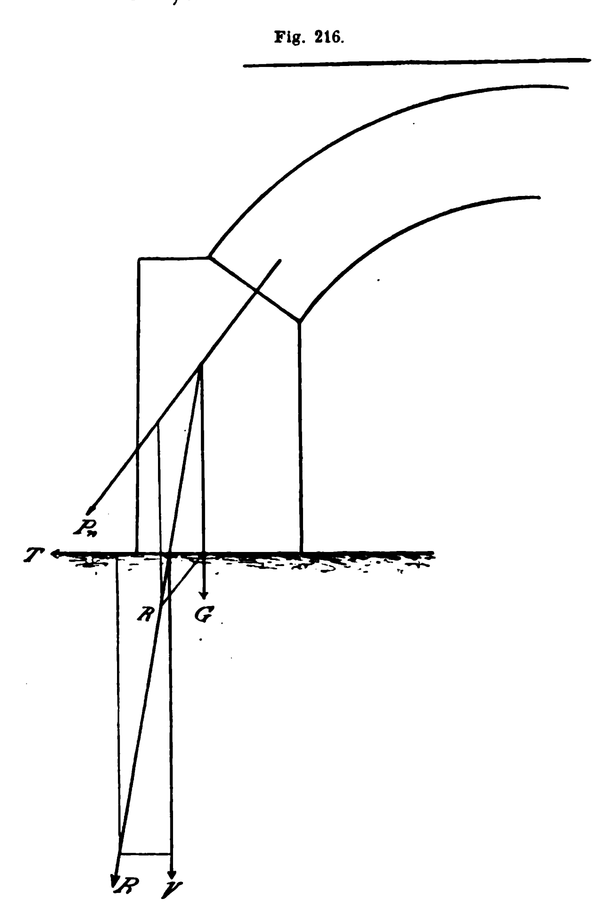
$$Q=\frac{P+K}{2},\text{ so folgt}$$

$$\text{(r)} \quad \ldots\ldots\quad H_1=\frac{P+K}{8b}\sqrt{4b^2+l^2}.$$

Für das letzte Beispiel würde

$$H_1 = \frac{1000}{8 \cdot 0{,}16} \sqrt{4 \cdot 0{,}16^2 + 1{,}2^2} = 580 \text{ Klg.}$$

Fig. 216.




Ist das Widerlager $h^m$ hoch, die Basis $b^m$ breit, dann folgt nach Gl. 77, S. 175, das Gewicht des Widerlagers

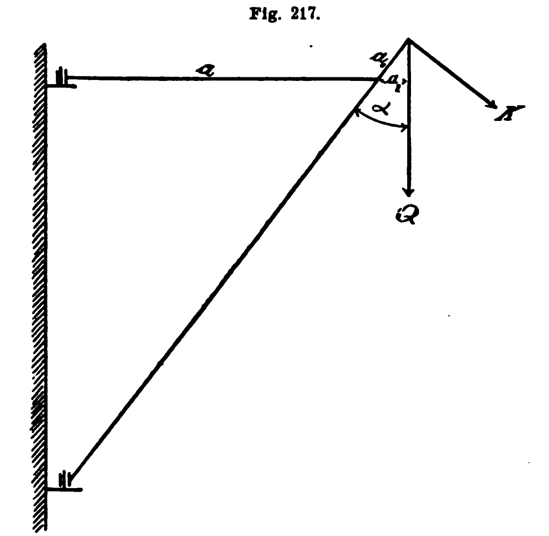
$$G = \frac{H_1 h}{b/2} = \frac{2 H_1 h}{b}.$$

**IV.** Gleichgewicht und Kräfteverteilung in (verstrebten) Krahngerüsten.

Wir nahmen bereits früher bei der Besprechung des Parallelogrammes der Kräfte die Gelegenheit wahr, dasselbe auf die Kräfteverteilung in einigen Krahngerüsten anzuwenden; wir wollen nun mit Rücksicht auf

die inzwischen besprochenen Grundsätze weiter auf die Theorie der Krahngerüste eingehen. —

Fig. 217.



Man kann die Krahnen einteilen in solche, welche

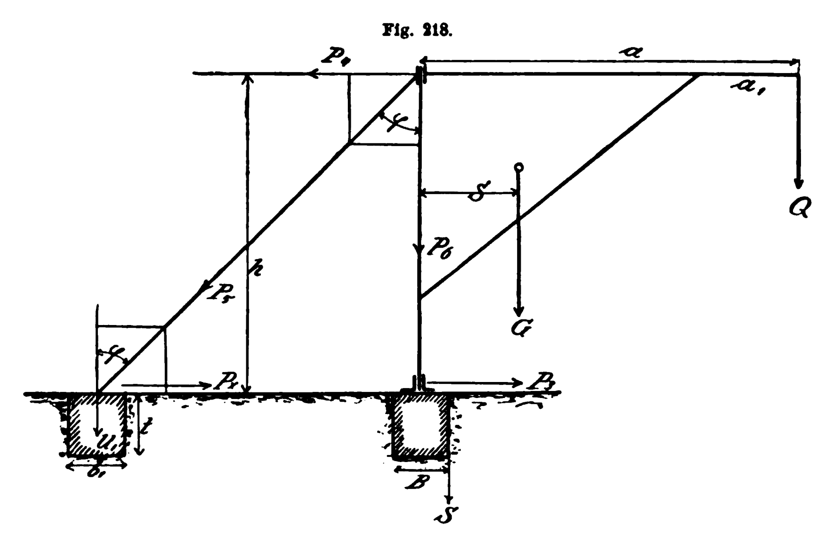
a. einen Kreisumfang beherrschen; Fig. 61 bis 66, Fig. 217 bis 221, Fig. 230 u. s. w;

b. eine Kreisfläche beherrschen, Fig. 227;

c. Krahngerüste, welche nur eine senkrechte Höhe beherrschen, Fig. 222, 223, 229;

d. Krahnen (Laufkrahnen), welche einen achteckigen Raum beherrschen; Fig. 224, 225, 226.

Fig. 218.



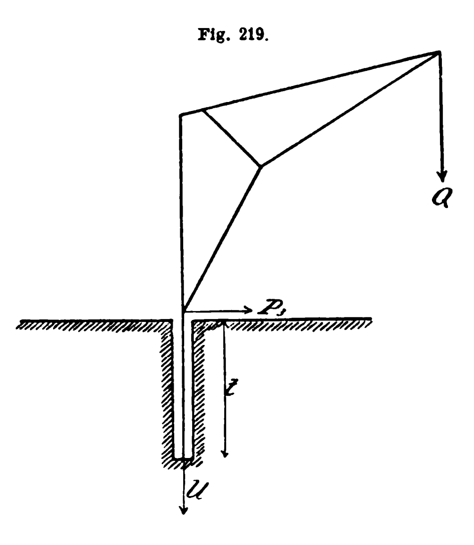
In Bezug auf ihre Betriebskraft kann man sie in Hand-, Dampf und hydraulische Krahnen (auch Accumulatorenbetrieb*) einteilen.**)

*) Eine Aufspeicherung an Kraft; beispielsweise Gewichte, welche während ihres Niedersinkens auf eine Wassersäule wirken und Arbeit verrichten.

**) Der elektrische Betrieb ist bis jetzt noch wenig für Krahnen in Anwendung.

Endlich in Bezug auf ihre Konstruktion in einfach verstrebte; Fig. 61 bis 66; doppelt verstrebte, Fig. 68, 219; mit vorspringender Ausladung, Fig. 217, 218. In Krahnen mit tiefen und flachen Fundamenten, Fig. 219, 220; in Fachwerkskrahnen, Fig. 232, 231; in Blechkrahnen, Fig. 221, und Krahnen mit und ohne Krahnsäule, Fig. 217.

Fig. 219.




Wir haben hier die hauptsächlichsten Konstruktionen und Anordnungen berührt, auf die wir in unseren Betrachtungen zurückkommen werden, allerdings erst zum Teil in späteren Kapiteln. Die Berechnung der Dimensionen würde sich einteilen in die der Elemente: Winde (einfache, doppelte oder Differential-), Flaschen-

Fig. 220.

züge, Krahnzapfen (mit und ohne Friktionsrollen), Fundamentberechnung; in die Berechnung der Dimensionen der Gerüste; auch hierauf werden

wir in den späteren Anwendungen zurückkommen. Im Anschluss an die früheren Zerlegungen begnügen wir uns an dieser Stelle nur mit der Feststellung der Kräfte.

Fig. 221.

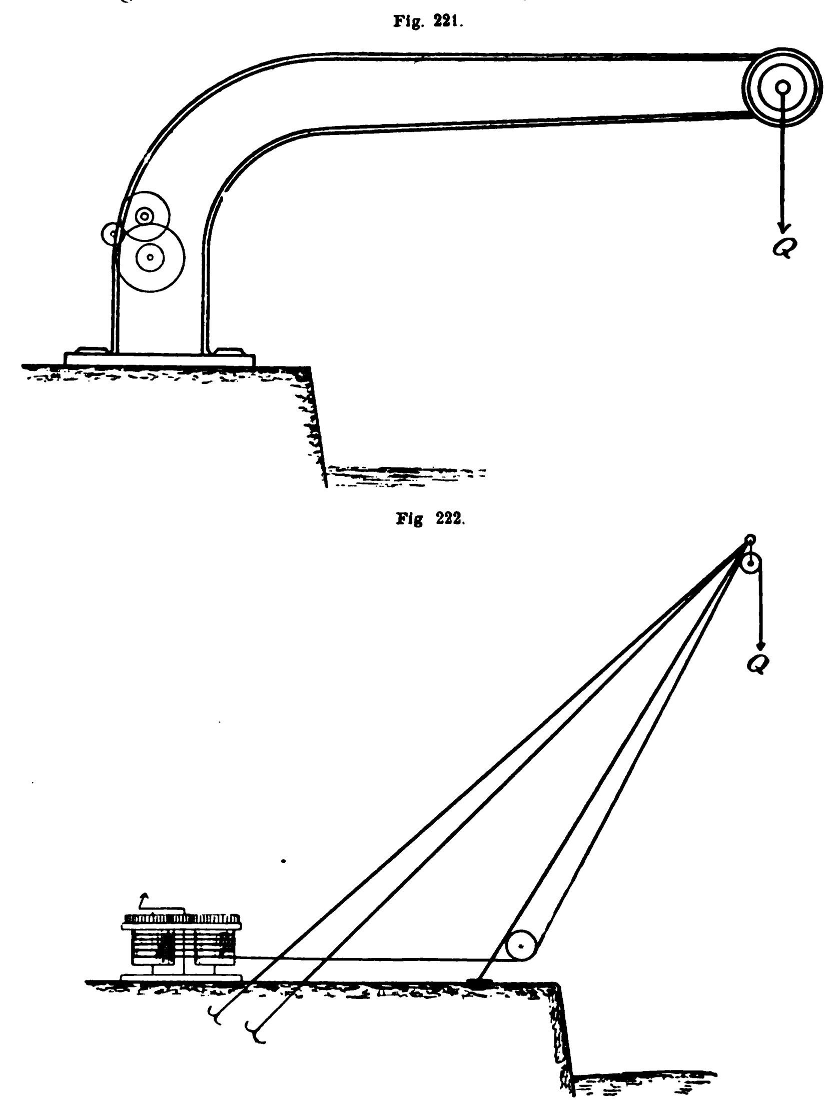



Fig 222.

Denken wir uns einen Krahn, wir haben Fig. 218 oder 220 im Auge, aus seinen beiden Befestigungsdrehpunkten, Krahnzapfen, herausgenommen und durch zwei Kräfte $P_4 P_3$ gehalten, so wird ihn die obere Kraft $P_4$.

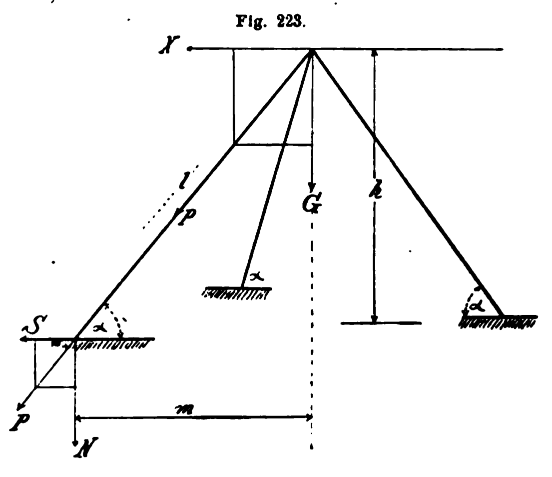
wenn kein Gleichgewicht vorhanden, um die untere Stütze nach links drehen. Gleichgewicht tritt ein, wenn

$P_4 h = Qa + Gs$, bezw.

$P_3 h = Qa + Gs$,

worin Q die Last, G das Eigengewicht im Schwerpunkt angreifend, in der Entfernung s vom Drehpunkt.

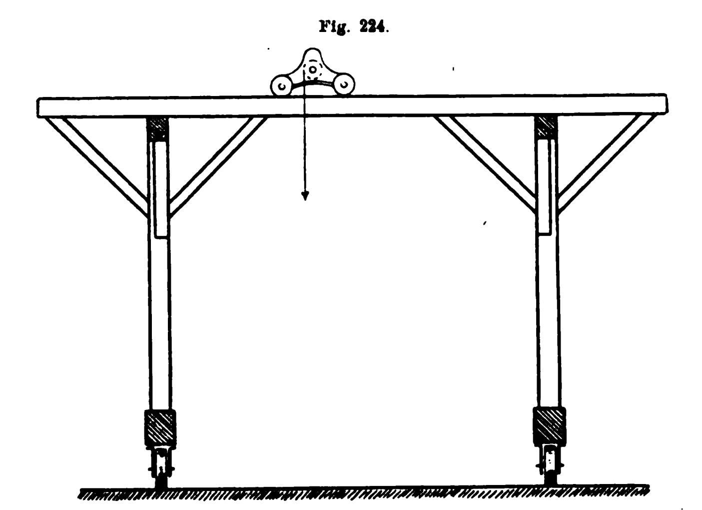
Fig. 223.




Käme die untere Zapfenkraft zur Wirkung, um eine Drehung des oberen Zapfens auszuführen, dann gilt offenbar dieselbe Momentengleichung; aus derselben folgt der Zapfenseitendruck

$$P_4 = P_3 = \frac{Qa + Gs}{h}. \qquad (85)$$

Fig. 224.



In den meisten Fällen der Praxis ist im Maximum $G = Q$, $s = {}^1/_3\, a$,*) man erhält dann

$$P_4 = P_3 = {}^4/_3\, Q \frac{a}{h}. \qquad (85a)$$

*) Für gewöhnlich kann man auch setzen $G = 0{,}8\, Q$, $s = {}^1/_4\, a$, und das Gewicht der drehbaren Teile 0,5 Q.

Je grösser die Ausladung, und je kleiner die Höhe, um so stärker der Zapfendruck.

Fig. 225.

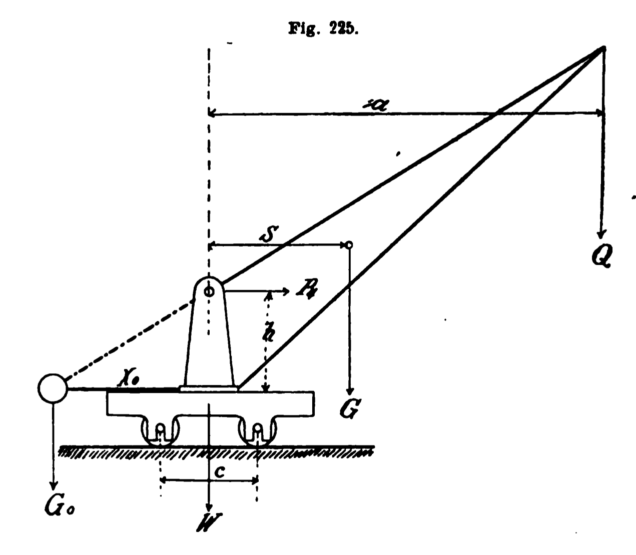
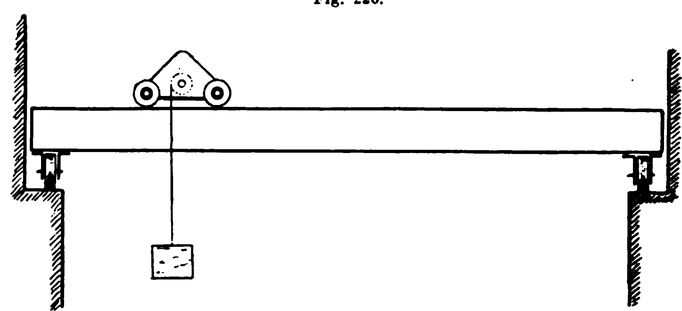



Fig. 226.



Der untere Zapfen muss aber ausser obigem Seitendruck noch einen vertikalen Druck aushalten, Fig. 227, 228 etc., man kann hierfür veranschlagen (S. S. 217)

(85b) . . . . . . . . $P_0 = G + Q$.

Die vorstehenden Gleichungen dienen zur Berechnung der Dimensionen, aber auch, um dann nach Gl. 71 das Zapfenreibungsmoment zu berechnen. Würde dasselbe zur Drehung des Krahnes zu gross ausfallen, dann lässt es sich nach einer der Gl. 72 durch geeignete Friktionsrollen verringern. In beiden Fällen kann noch ein Betriebswindwerk, dessen Hauptdimensionen sich nach Gl. 32 berechnen, in Anwendung kommen.

Die Krahnsäule hat den Gesamtvertikaldruck auszuhalten, gleichzeitig muss sie aber auch auf die Momente, Fig. 227,

$$M_1 = P_4 h_1,\ M_2 = P_3 h_2 \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

berechnet werden.

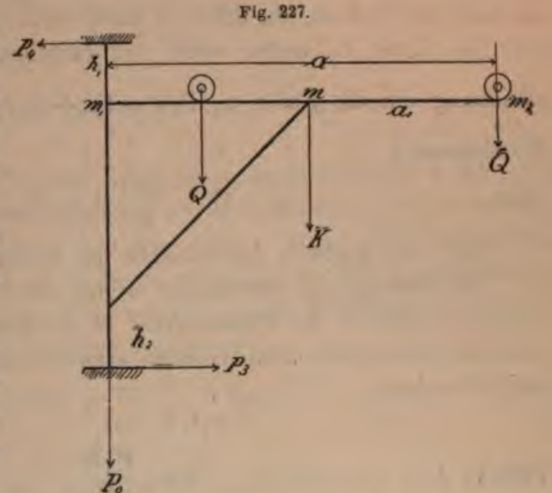
Ähnlich ist es mit dem oberen horizontalen Krahnbalken. Derselbe ist ausser der schon früher bemerkten Zugkraft ev. einem Moment ausgesetzt

$$M_3 = Q a_1, \quad (86a)$$

welches bei m als Bruchmoment wirkt.

Steht die Last an einem Krahnwagen hängend zwischen m und $m_1$, dann ist nach Fig. 227 das grösste Bruchmoment für $m_1 m$,

Fig. 227.




$$M_4 = \frac{1}{4} Q (a - a_1). \quad \ldots\ldots \quad (86b)$$

In den obigen Gleichungen, S. 68 etc., setzten wir die Last Q unmittelbar im m wirkend voraus und gründeten hierauf die Zerlegung. Ist der Träger weiter als m ausgeladen, wie in Fig. 218 und 227 angedeutet, dann wäre für Q in den oben entwickelten Gleichungen, S. 68 u. s. w.

$$K = Q \frac{a}{a - a_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

aus dem Moment $K(a - a_1) = Qa$ einzuführen.

Will man das Eigengewicht des Krahnes $G = Q$ mit in Rechnung ziehen in den obigen Gleichungen S. 68 etc., dann ist Q um $^1/_3$ cirka zu vergrössern; weil, wenn G in der Entfernung $s = {}^1/_3$ a nach $m_2$ verlegt, mit der Kraft $^1/_3$ G wirken müsste.

Auch in der Anordnung, Fig. 217, haben wir in der Druckstrebe noch ein Moment, welches sich leicht übersehen lässt, dasselbe ist

$$M_5 = Q a_2 = K a_0 = a_0 Q \sin \alpha. \quad \ldots\ldots \quad (86c)$$

Die Ausdehnung des Fundamentes, bezw. das Gewicht desselben muss so gross sein, dass es belastet vollständig frei liegend, stabil ist und soll eine solche Flächenausdehnung haben, dass es nicht zerdrückt, zerstört werden kann.

Auf das Fundament drückt die Kraft $\mathbf{P}_0$, diese mit dem Fundamentgewicht U, Fig. 219, 220, wirkten an dem Hebelarm $\frac{b}{2}$, der halben Fundamentbreite. Man nimmt die letztere gewöhnlich oben an und setzt es nach der Tiefe zu ab, führt es nach unten zu breiter, staffelförmig aus.

Die Kraft $P_3$ unten wirkt am Hebelarm t. Aus der Stabilitätsgleichung um die Kante u, $P_3 t = (U + P_0)\frac{b}{2}$ folgt das Gewicht des Fundamentes

$$(88) \quad \ldots\ldots \quad U = \frac{2t}{b} P_3 - P_0.$$

In U ist zugleich das Gewicht der Fundamentplatte enthalten.

Die Befestigung der Krahne erfolgt durch Fundamentschrauben. Ist Fig. 218, 220, B die Plattenbreite, S die Kraft, welche zum Befestigen auf der einen (hier rechten) Seite erforderlich ist, dann findet man aus der Gleichung

$$P_4 h = SB,$$

$$(88a) \quad \ldots\ldots \quad S = \frac{P_4 h}{B}.$$

Wenn S zu klein, die Schrauben zu schwach und abreissen würden, dann fände um die linke Plattenkante ein Umkippen des ganzen Bauwerkes statt.

In Fig. 218 ist noch das Gewicht des hinteren Fundamentklotzes zu bestimmen, auf welchem die Kraft $P_5$ unter dem $\angle \varphi$ einwirkt.

Die Kraft $P_5$ ist die Resultante aus $P_4$ und $P_6$ (S. auch Fig. 56), letztere wirkt mit als Druckkraft auf die Säule und deren Fundament. Man findet

$$(89) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} P_6 = P_4 \operatorname{cotg} \varphi, \\ P_5 = \dfrac{P_4}{\sin \varphi}. \end{cases}$$

$P_5$ sucht unter $90 - \varphi$ das Fundament zu heben und ist $P_x = P_5 \sin \varphi$ oder $P_5$ eingesetzt, $P_x = P_4$, somit kommt die Momentengleichung zur Geltung

$$P_4 t_1 = U_1 \frac{b_1}{2}; \text{ hieraus ist das Gewicht}$$

$$(88b) \quad \ldots\ldots \quad U_1 = \frac{2 P_4 t_1}{b_1}.$$

Der transportabele Krahn Fig. 225 ruht als Drehkrahn auf einem Eisenbahnwagen. Am hinteren Ende des Wagens befindet sich ein (ge-

wöhnlich verstellbares) Gewicht $G_0$, welches am Hebelarm $x_0$ der Krahnlast Q und dem Krahngewicht G das Gleichgewicht halten soll, so dass der Krahn nicht überkippen kann.

Es tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$G_0 x_0 = Qa + Gs \text{ oder}$$

$$G_0 = \frac{Qa + Gs}{x_0}. \qquad \ldots \ldots \quad (90)$$

[Für solche Krahnen ist gewöhnlich $a = 4^m$, $s = 1^m$, $G = {}^3/_4\ Q$, $x_0 = 3^m$ zu setzen.]

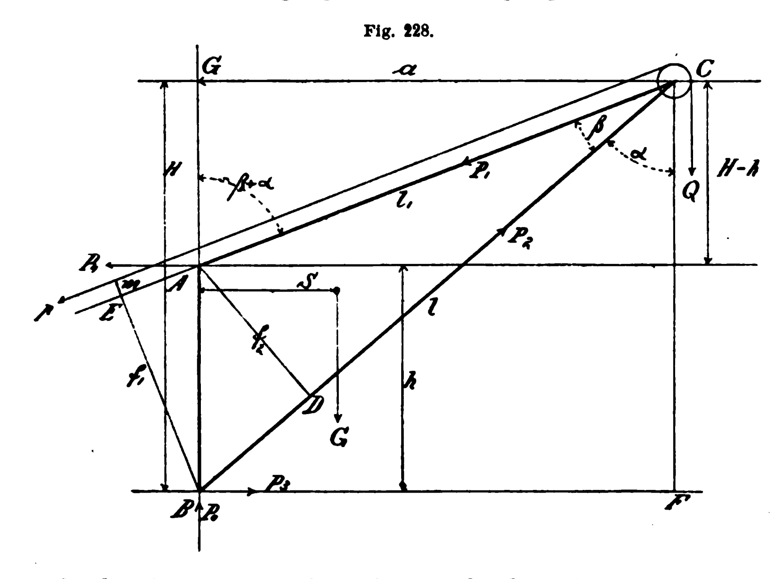
Am Schwerpunkt des Wagens wirkt die senkrechte Last $G + G_0 + W$, worin W das Wagengewicht selbst ist. Um vollkommen sicher zu sein, dass die Last Q kein Kippen um die vordere Wagenachse veranlasst, muss der Radstand c nicht zu klein angenommen werden (gewöhnlich ist c kleiner als die Spurweite der Schienen) und muss die Summe der obigen Gewichte gross genug sein, so dass wenigstens

$$(G + G_0 + W)\frac{c}{2} > Qa. \qquad \ldots \ldots \quad (90a)$$

---

Die beistehende Fig. 228 stellt ein Krahngerüst dar (s. auch Fig. 63). Es sollen mit Berücksichtigung des Kettenzuges p die Kräfte $P_1$ und $P_2$

Fig. 228.



in den Streben bestimmt werden, ohne Rücksicht auf eine trigonometrische Zerlegung. Man gelangt zum Ziele, wenn man sich ein solches oder die

noch weiter unten zu betrachtenden Gerüste an passenden Stellen durchschneidet, und die Momentengleichungen für günstig gewählte Drehpunkte aufstellt, in welchen die zu bestimmenden Kräfte enthalten sind*); denn für jeden beliebigen am besten in der Hauptebene des Bauwerkes liegenden Drehpunkt muss dasselbe im Gleichgewicht sein.

Betrachtet man B als Drehpunkt und schneidet bei A durch, dann erhält man wieder Gleichgewicht, wenn in den durchschnittenen Teilen die Kräfte p und $P_1$ an ihren Hebelarmen $f_1 + m$ und $f_1$ zur Wirkung kommen, die diesbezügliche Momentengleichung lautet

(a) . . . . . $Qa + Gs = P_1 f_1 + p(f_1 + m).$

Eine Drehung um A führt zu der Momentengleichung

(b) . . . . . . . $P_2 f_2 + pm = Qa + Gs.$

Q ist hier Nutzlast, G Eigengewicht; $f_1 f_2$ die Hebelarme senkrecht auf die Kraftrichtungen.

Aus den Gl. a und b erhält man

(91) . . . . $$\begin{cases} P_1 = \dfrac{Qa + Gs - p(f_1 + m)}{f_1}, \\ P_2 = \dfrac{Qa + Gs - pm}{f_2}. \end{cases}$$

Die Hebelarme $f_1 f_2$ lassen sich folgendermassen auf die Hauptdimensionen H, a, h zurückführen.

Setzt man $CB = l$, $CA = l_1$, dann ist

(c) . . . $l = \sqrt{H^2 + a^2},\ l^1 = \sqrt{a^2 + (H - h)^2}.$

Nun ist $\triangle ADB \sim CBF$, weil $\angle B = \angle C$ in diesen Dreiecken, ebenso $\triangle ABE \sim AGC$, weil bei A ein Scheitelwinkel, somit verhält sich

$$f_2 : h = \overline{BF} : l \text{ oder}$$
$$f_2 : h = a : l, \text{ woraus}$$
$$f_2 = \frac{ah}{l} = \frac{ah}{\sqrt{H^2 + a^2}}, \text{ wenn Gl. c eingeführt wird.}$$

Ferner $f_1 : h = a : l_1$, woraus

$$f_1 = \frac{ah}{l_1} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + (H - h)^2}}.$$

Entwickelt man aus der zweiten Gl. 91 pm, und setzt dessen Ausdruck in die erste ein, so folgt

(d) $$P_1 = \frac{Qa + Gs - pf_1 - [Qa + Gs - P_2 f_2]}{f_1} = P_2 \frac{f_2}{f_1} - p.$$

*) Momentenmethode von Ritter.

In Gl. 91 und (d) die Werte für $f_1$ und $f_2$ gesetzt, erhält man nach kurzer Reduktion

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \frac{\sqrt{H^2+a^2}}{ah}(Qa+Gs-pm), \\ P_1 &= P_2\sqrt{\frac{a^2+(H-h)^2}{H^2+a^2}} - p. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (91\,a)$$

Bedenkt man, dass $Qa + Gs = P_4 h$, so ist auch

$$P_2 = \sqrt{H^2+a^2}\left(\frac{P_4 h - pm}{ah}\right). \quad . \; . \; . \; . \quad (91\,b)$$

Vernachlässigt man den Kettenzug p und das Eigengewicht G (oder nimmt man, wie schon bemerkt, Q um $^1/_3$ bis $^1/_4$ grösser an, um das Eigengewicht in Rücksicht zu ziehen), dann vereinfachen sich obige Gleichungen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \frac{\sqrt{H_2+a^2}}{ah}Qa = \frac{Q}{h}\sqrt{H^2+a^2}, \text{ und} \\ P_1 &= P_2\sqrt{\frac{a^2+(H-h)^2}{H^2+a^2}} = \frac{Q}{h}\sqrt{(H-h)^2+a^2}. \end{aligned}\right\} . \quad (91\,c)$$

Mit Rücksicht auf die Winkel $\alpha$ und $\beta$ ist

$$\sin\alpha = \frac{a}{l} = \frac{a}{\sqrt{H^2+a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{f_2}{l_1} = \frac{ah}{\sqrt{H^2+a^2}\,\sqrt{a^2+(H-h)^2}},$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{a}{l_1} = \frac{a}{\sqrt{(H-h)^2+a^2}}.$$

Setzt man diese Werte in die oben entwickelten Gl. h und i, S. 70,

$$P_1 = Q\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad P_2 = Q\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta},$$

dann erhält man die gleichen Ausdrücke, wie die soeben in Gl. 91c gefundenen.

Lässt man den Krahn um C drehen, dann ist Gleichgewicht vorhanden, wenn

$$P_0 a + P_4(H-h) - P_3 H - G(a-s) = o.$$

Diese Gleichung bestätigt uns die obige Annahme Gl. 85b. Nach Gl. 85 ist $P_3 = P_4$, folglich $P_0 a = G(a-s) + P_3 h$ oder

$$P_3 = \frac{Qa+Gs}{h}$$

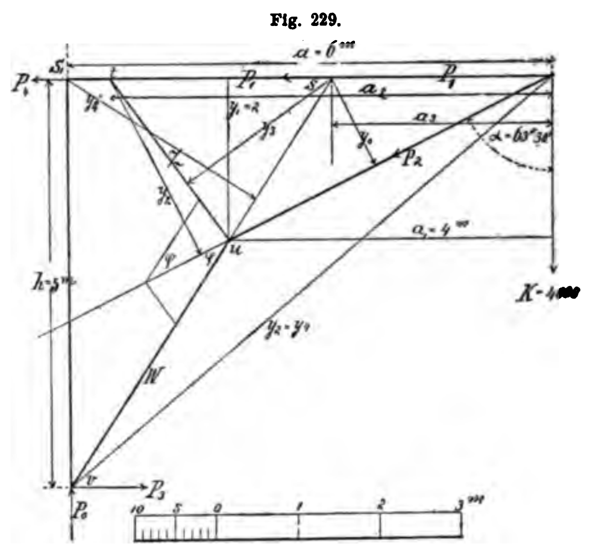
eingeführt $P_0\,a = a(G+Q)$, woraus $P_0 = G + Q$.

In obigem Krahn hat es uns offenbar keine Schwierigkeiten verursacht, geeignete Drehpunkte und Schnittpunkte zu wählen, durch die einfache Dreiecksform des Krahnes waren sie uns unmittelbar gegeben. —

---

Legen wir die frühere Form, in Fig. 229 nochmals dargestellt, zu Grunde, dann sind wir schon genötigt, Hülfsdrehpunkte anzunehmen, wie wir gleich sehen werden.

Fig. 229.



Der Krahn habe $a = 6^m$ Ausladung, $h = 5^m$ Höhe und es sei die Last, Nutzlast und Eigengewicht, $K = 4000$ Klg.

Die Zapfenkräfte $P_3$ und $P_4$ sind nach Gl. 85, wenn dort $G = o$ angenommen wird,

$$P_3 = P_4 = \frac{K a}{h} = \frac{4000 \cdot 6}{5} = 4800 \text{ Klg.}$$

Der untere Zapfen hat ausser dem Seitendruck $P_3$ noch eine Vertikallast $P_0 = 4000$ auszuhalten. Schneidet man die Zugstrebe bei t durch und betrachtet u als Drehpunkt, dann ist Gleichgewicht, wenn

$$P_1 y_1 = K a_1; \text{ somit, weil } y_1 = 2, \; a_1 = 4^m,$$

$$P_1 = \frac{4000 \cdot 4}{2} = 8000 \text{ Klg. Zugkraft.}$$

Die Last K drückt auf die Strebe cu, bei u durchgeschnitten würde sie um t als Drehpunkt die Strebe nach unten in die Richtung cu verschieben. Wenn man sich $P_2$ in entgegengesetzter Richtung uc wirken denkt, dann greift diese Kraft in der Entfernung $y_2 = 2{,}50^m$ vom t an, und man findet aus der Momentengleichung $K a_2 = P_2 y_2$, weil $a_2 = 5{,}5$ aus der Zeichnung

$$P_2 = \frac{4000 \cdot 5{,}5}{2{,}5} = 8800 \text{ Klg. Druckkraft.}$$

Mit Hülfe des Winkels $\alpha = 63^1/_2{}^\circ$ findet man nach unseren früher aufgestellten Formeln, S. 68, Gl. a, b.

$$P_1 = K \operatorname{tg} \alpha = 4000 \cdot 2{,}006 = 8000,$$

$$P_2 = \frac{K}{\cos \alpha} = \frac{4000}{\cos 63^\circ 30} = 8900 \text{ Klg.}$$

Um die Kraft (Druckkraft) Z der Strebe ut zu erhalten, verlängern wir W bis zum Schnitt in s, betrachten s als Drehpunkt und beziehen alle Kräfte auf diesen. Die Kräfte in sc und vu kommen hierbei ausser Belang, weil beide Strebenrichtungen durch s gehen. Die Momentengleichung für s als Drehpunkt lautet

$$K a_3 + P_0 (a - a_3) - Z y_3 - P_3 h - P_2 y_0 = o.$$

Hieraus wird

$$Z = \frac{Q a_3 + P_0 (a - a_3) - P_3 h - P_2 y_0}{y_3}.$$

$a_3 = 2{,}7$, $a - a_3 = 3{,}3$, $y_0 = 1{,}2$, $y_3 = 2{,}25$ eingesetzt, erhält man $Z = 4700$ Klg.

Die Druckkraft W würde die Strebe vu, wenn man sie bei v durchschneidet, nach unten drücken, hierbei nehmen wir $s_1$ als Drehpunkt an und erhält die Gleichung $W y_4 = K a$.

Sonach $W = \frac{K a}{y_4} = \frac{4000 \cdot 6}{2{,}75} = 9000$ Klg.

Die Winkel $\varphi = 30^\circ$ und $\varphi = 79^\circ$ in die früher entwickelten Gleichungen l, m S. 74 eingeführt, erhält man

$$W = P_2 \frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \psi)} = 8800 \frac{\sin 79}{\sin 109^\circ} = 8800 \frac{0{,}982}{0{,}946} = 9000 \text{ Klg.};$$

$$Z = P_2 \frac{\sin \psi}{\sin (\varphi + \psi)} = 4650 \text{ Klg.}$$

Beide Kräfte W und $P_2$ werden gleich, wenn

$$\frac{K a}{y_4} = \frac{K a_2}{y_2} \text{ oder } a y_2 = a_2 y_4.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Strebe ungebrochen von c bis v durchläuft; dann würde $a_2 = a$ und $y_2 = y_4$.

Die obere Belastung $K = 4000$ Klg. enthält die Nutzlast

$$Q = {}^3/_4\, 4000 = 3000 \text{ Klg.}$$

Nehmen wir an, dass diese an einen besonderen Wagen (Katze) auf dem oberen Balken hin und her bewegt werden kann, und dass das Gewicht dieses Wagens und Kette, Haken u. s. w. 800 Klg. beträgt, dann ist der

obere Balken auf das Moment

$$M = \frac{(3000 + 800)\, a_2}{4} = \frac{3800 \cdot 5{,}5}{4} = 5225 \text{ Klgmeter}$$

zu berechnen, durch welches eine Durchbiegung der horizontalen Strebe stattfindet, die mehr als die Zugkraft $P_1$ auf den Balken einwirkt und ihn zu zerstören strebt.

Die beiden schmiedeeisernen Zapfen, welche den Krahn halten sollen, mögen nach einer weiter unten aufzustellenden Formel

$$d = 1{,}2\, \sqrt{P_3} = 1{,}2\, \sqrt{4800} = 80^{mm} \text{ Durchmesser}$$

erhalten. Nimmt man $\varphi_0 = 0{,}15$ als Zapfenreibungskoefficient, dann ist das Moment, um den Krahn samt Last in seinen Zapfen zu drehen (Gl. 71).

$$M_2 = (P_3 + P_4)\, \frac{d}{2}\, \varphi_0 = 2 \cdot 4800\, \frac{80}{2}\, 0{,}15 = 57\,600 \text{ Klgmm.}$$

Dieses Moment erfordert bei c am Hebelarm $6^m$ eine Zugkraft

$$\frac{57\,600}{6000} = 10 \text{ Klg. abg.}$$

Das Fortbewegungsmoment des Krahnwagens, an welchem die Last hängt, kann man nach Beispiel 7, S. 169 zu 8800 Klgmm. annehmen, wenn wir die zu bewegende Last 3000 + 800 Klg. abg. 4000 Klg. setzen. —

---

In Fig. 230 haben wir ein Krahngerüst mit Flaschenzug dargestellt. Hubhöhe und Ausladung $5^m$, Nutzlast $Q = 2000$ Klg., von denen theoretisch die Hälfte 1000 Klg. auf die Krahnwinde wirken; rechnen wir zu diesen letzteren noch 200 Klg. für die Ketten- und Rollenwiderstände,*) dann ist die Windenkraft $p = 1200$ Klg.; ferner $^4/_5$ der Last 1600 Klg. als Eigengewicht angenommen, welches wir zum dritten Teil am Ende des Gerüstes angreifend uns denken wollen, so wird das letztere auf die Last $K = 2000 + \frac{1600}{3} = 2600$ Klg. abg. zu berechnen sein.

Die Krahnwinde habe $240^{mm}$ Trommeldurchmesser, $K = 400^{mm}$ Kurbelhalbmesser, $n = 4$ Mann Bedienung, dann ist, 20% Verluste zugeschlagen, nach Gl. 32, S. 42 aus $nPKi = 1{,}2\, Qw$, eine

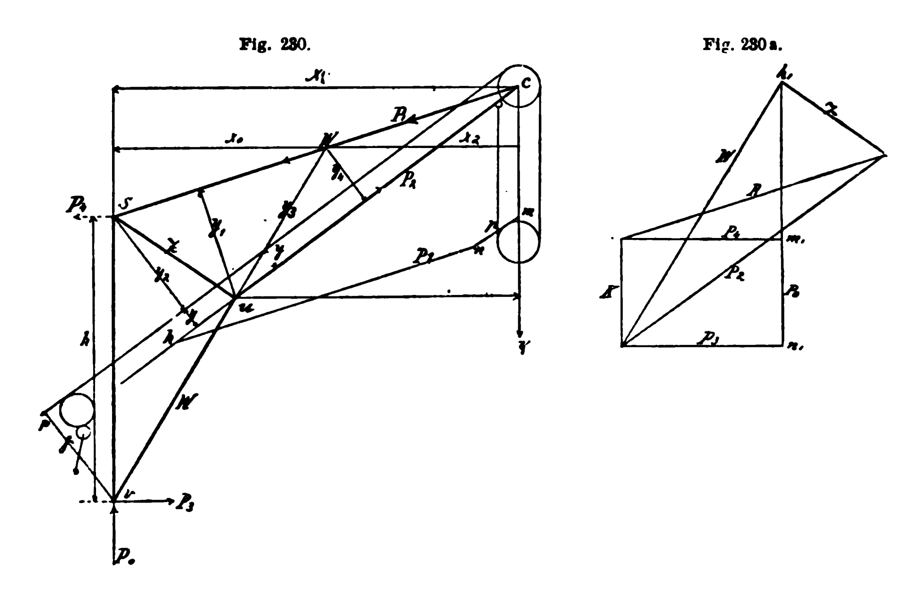
$$i = \frac{1{,}2\, Qw}{nPK} = \frac{1{,}2 \cdot 1200 \cdot 120}{4 \cdot 400 \cdot 15} = 7{,}2$$ fache Übersetzung erforderlich zur Hebung der Maximallast.

---

*) S. d. Anwendungen auf Flaschenzüge weiter unten.

Zur Berechnung der Kräfte in den Gerüststreben übersieht man, dass nur die Strebe sc, in welcher die Kraft $P_1$ wirkt, durch eine Kette ersetzt werden kann, folglich allein eine Zugkraft auszuhalten hat, während die anderen Streben und die Säule vs von ihren Kräften zerdrückt werden könnten, wenn sie nicht als feste Holz- oder Eisenstreben durch ihre Steifigkeit den nötigen Widerstand leisten würden.

Fig. 230. Fig. 230a.



Betrachten wir v als Drehpunkt, dann wirken $P_4$, p und K an ihren Hebelarmen h, $f_1$ und a, und tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$P_4 h + p f_1 - K a = 0, \text{ woraus}$$

$$P_4 = \frac{K a - p f_1}{h} = \frac{2600 \cdot 5 - 1200 \cdot 1{,}4}{3{,}5} = 3235 \text{ Klg.}$$

Schneidet man die Strebe cs bei s durch, betrachtet u als Drehpunkt, dann wirkt $P_1$ in derselben Richtung wie $P_4$, die Momentengleichung ist für die um u wirkenden Kräfte

$$P_1 y_1 + p y - K x_1 = 0;$$

die Hebelarme $y_1 y x_1$ aus der Zeichnung entnommen,

$$P_1\, 1{,}4 + 1200 \cdot 0{,}3 - 2600 \cdot 3{,}5 = 0, \text{ also}$$

$$P_1 = \frac{2600 \cdot 3{,}5 - 1200 \cdot 0{,}3}{1{,}4} = 6243 \text{ Klg.}$$

Schneidet man die Druckstrebe bei u durch, so dass eine Drehung

um s stattfindet, dann wird

$$-py_2 - Ka + P_2(y_2 + y) = 0 \text{ und}$$

$$P_2 = \frac{1200 \cdot 1,4 + 2600 \cdot 5}{1,4 + 0,3} = 8634 \text{ Klg.}$$

Die Druckkraft in der Säule vs ist wieder

$$P_0 = Q + G = 2000 + 1600 = 3600 \text{ Klg.}$$

Verlängert man die Strebe vu bis w, betrachtet w als Drehpu dann verschwinden die Hebelarme der Kräfte W und $P_1$ in vu und man erhält für $P_0$, Z, $P_2$ p und K die Gleichung

$$P_2(y_4 + y) + Zy_3 - py_4 - Kx_2 - P_0x_0 = 0, \text{ woraus}$$

$$Z = \frac{1200 \cdot 0,5 + 2600 \cdot 2,2 + 3600 \cdot 2,8 - 8634\,(0,5 + 0,3)}{2,1} = 3570\,]$$

Bei v die Strebe W durchschnitten, s als Drehpunkt betrachtet, hält man aus der Gleichung

$$W\overline{su} = Ka + py_2$$

$$W = \frac{2600 \cdot 5 + 1200 \cdot 1,4}{1,8} = 8150 \text{ Klg.}$$

Wählt man endlich zur Bestimmung der äussern Kraft $P_3$, s no mals zum Drehpunkt der Kräfte p, $P_3$ und K, dann folgt $P_3$ aus

$$P_3 h' = py_2 + Ka, \text{ nämlich}$$

$$P_3 = \frac{1200 \cdot 1,4 + 2600 \cdot 5}{3,5} = 4200 \text{ Klg.}$$

Zum Halt der Krahnsäule wenden wir oben einen vollen schmi eisernen Zapfen von 100mm Stärke, unten einen hohlen gusseiser (Röhren-) Zapfen von 500mm Durchmesser an, welchen letzteren wi Friktionsrollen laufen lassen, gemäss der Anordnung, S. 159.

Das Reibungsmoment der Zapfen ohne Anwendung der Frikti rollen ist

$$M_2 = \left(P_4 \frac{d}{2} + P_3 \frac{D}{2}\right) \varphi_0 = \left(3225 \cdot \frac{100}{2} + 4290 \frac{500}{2}\right) 0,15$$

$$= 182\,000 \text{ Klgmillim.}$$

Wenden wir 200mm grosse Friktionsrollen mit 50mm Zapfen an, d wird das untere Reibungsmoment $4200 \frac{500}{2}\, 0,15 = 157\,500$ Klgm nach Gl. 72c vermindert um $200 \frac{R_1}{(d/2)} = \frac{100}{50/2} = 4$, d. h. es ist das M ment um den unteren Zapfen zu drehen $\frac{157\,500}{4} = 39\,400$ Klgme

also das ganze Reibungsmoment

$$0{,}15 \cdot 3225 \frac{100}{2} + 39\,400 = 63\,600 \text{ abg. Klgmeter,}$$

also ungefähr dreimal so klein wie das obige.*) —

---

In den Figuren 231 haben wir ein festes Gerüst dargestellt, welches auf 4,5$^m$ Höhe und 3,5$^m$ freie Ausladung $Q_1 = 10\,000$ Klg. tragen soll. Wir verteilen die Last auf zwei gleiche Gerüstschilde, die durch Querverbände miteinander in Verbindung stehen; jedes Schild nach der in der Figur angegebenen Konstruktion ausgeführt, soll $Q = \frac{Q}{2} = 5000$ Klg. Tragfähigkeit besitzen.

Das Gerüst wird durch vier Fundamentbefestigungen gehalten ...



... nalt aus ... (2) entgegengesetzt wie $P_1$, man erhält

$$Qx_2 + y_2 P_2 = 0.$$

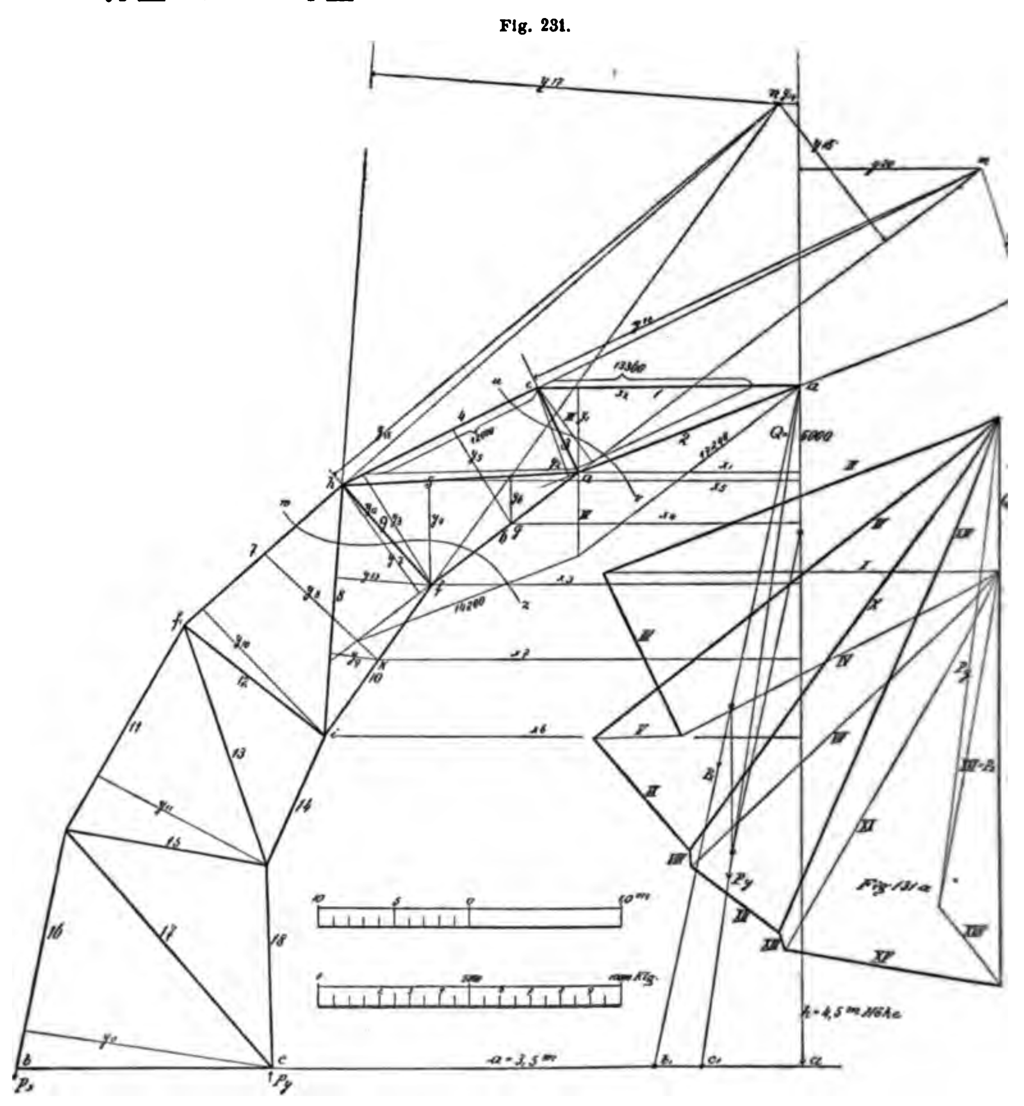
$$P_2 = -\frac{Qx_2}{y_2} = -\frac{5000 \cdot 1{,}73}{0{,}61} = -14\,200 \text{ Klg.};$$

---

*) Auf die Bedeutung der Fig. 230a werden wir später in der Graphostatik zurückkommen.

hierbei sind $x_2 = 1{,}73$ und $y_2 = 0{,}61$ aus der Zeichnung entnommen; $y_2 \perp ad$, $ea = x_2 \perp Q$.

Fig. 231.



Um die Kräfte in (4) und (5) zu bestimmen, nehmen wir f als Drehpunkt und schneiden bei h die genannten Streben durch, dann wählen wir einen beliebigen zwischen f und d liegenden Drehpunkt g, von welchem aus wir auf (4) und (5) die Hebelarme $y_6$ und $y_5$ abmessen,

erhalten sonach zwei Gleichungen

$$Q x_3 - P_4 y_3 - P_5 y_4 = 0 \text{ und}$$
$$Q x_4 - P_4 y_5 - P_5 y_6 = 0.$$

$P_4$ und $P_5$ wirken in derselben Richtung wie $P_1$.

Aus der Zeichnung entnehmen wir $x_3 = 2{,}44$, $y_3 = 0{,}87$, $y_4 = 0{,}7$; $x_4 = 1{,}94$, $y_6 = 0{,}32$ und $y_5 = 0{,}73$.

Die erste Gleichung ergiebt, $P_5$ entwickelt,

$$P_5 = \frac{Q x_3 - P_4 y_3}{x_3} = \frac{5000 \cdot 2{,}44 - P_4\, 0{,}87}{0{,}7},$$

in die zweite eingeführt, folgt

$$5000 \cdot 1{,}94 = \frac{5000 \cdot 2{,}44 - P_4\, 0{,}87}{0{,}7}\, 0{,}32 + 0{,}73\, P_4.$$

Aus den beiden Gleichungen erhält man abg.

$$P_4 = 12\,000 \text{ Klg. und } P_5 = 2800 \text{ Klg.}$$

Betrachtet man h als Drehpunkt und schneidet bei f die Strebe 6 durch, dann wirkt $P_6$ in demselben Sinne wie $P_2$, es wird, wenn $y_7$ von h aus $\perp$ (6) und $x_5$ von h $\perp$ Richtung Q,

$$P_6 y_7 = Q x_5.$$

Hieraus findet sich $P_6 = \frac{Q x_5}{y_7} = \frac{5000 \cdot 3}{0{,}87} = 17\,240$ Klg. Druck.

Misst man die Drehpunktsentfernung $x_6 = 3{,}18^m$, und den Hebelarm $y_{10} = 1{,}15$ von i als Drehpunkt auf (7), so erhält man die Zugstangenkraft $P_7$ aus der Gleichung

$$P_7 y_{10} = Q x_6,$$
$$P_7 = \frac{5000 \cdot 3{,}18}{1{,}15} = 14\,000 \text{ Klg.}$$

Die Kraft in (8) wird sehr klein, und zwar erhält man vom beliebigen Drehpunkt k ausgehend,

$y_9 = 0{,}36 \perp (8)$, $y_8 = 1{,}00^m$ senkrecht auf (7) und
$x_7 = 2{,}76^m \perp$ Richtung Q gemessen,
$Q\, 2{,}76 = P_8\, 0{,}36 + P_7\, 1{,}00 = P_8\, 0{,}36 + 14\,000$, hieraus
$P_8 = -500$ Klg. Druckkraft in (8).

Schneidet man bei b an der Befestigungsstelle des Gerüstes durch und lässt Q um c als Drehpunkt wirken, dann findet man

$$Q\, 3{,}5 = P_{16} y_0 = P_{16}\, 1{,}65, \text{ sonach}$$
$$P_{16} = \frac{5000 \cdot 3{,}5}{1{,}65} = P_x = 11\,000 \text{ Klg.}$$

Zugkraft, welche in Richtung der Fundamentbefestigung wirken.

Betrachtet man b als Drehpunkt, dann erhält man eine senkrecht auf $\overline{bc}$ wirkende Druckkraft aus

$$P_y^1 \cdot 1{,}75 = Q\,(a + \overline{bc}) = 5000\,(3{,}5 + 1{,}75),$$
$$P_y^1 = 15\,000 \text{ Klg.}$$

Die senkrecht wirkende Zugkraft bei b folgt aus

$$P_x^1\, 1{,}75 = 3{,}5\, Q = 3{,}5 \cdot 5000$$
$$P_x^1 = 10\,000 \text{ Klg.}$$

$P_x = 11\,000$ Klg. wirken in Richtung der Strebe (16) und muss diese mit $P_y$ und Q im Gleichgewicht sein; $P_y$ bildet mit Q und $P_x$ ein Kräfteparallelogramm. Denkt man sich $P_x$ bis in die Richtung Q verlängert und den hier allerdings nicht sichtbaren Schnittpunkt mit c verbunden, so ist die letztere Linie die Richtung von $P_y$.

Wir haben hier in der Figur ab, parallel zu (16) gezogen und $b_1 c_1$ in demselben Verhältnis wie $1{,}75 : 3{,}5$, also $1 : 2$ von $b_1 a_1$ abgeteilt, so dass $b_1 c_1 = \frac{1}{2}\, c_1 a_1$, weil $bc = \frac{1}{2}\, ca_1$, dann fällt, wenn man von a auf $ab_1 = P_x = 11\,000$, von a nach $a_1$ $Q = 5000$ aufträgt, $ac_1$ in die Resultante beider; $ac_1$ von a entgegengesetzt aufgetragen, stellt Gleichgewicht her; man findet $P_y = 16\,400$ Klg. aus dem Parallelogramm.

Wir werden noch später erkennen, dass uns die Fig. 231 a dasselbe bestätigen wird.

Die drei äusseren Kräfte Q, $P_x$, $P_y$ müssen zunächst unter sich im Gleichgewicht sein, ehe es die inneren sein können.

Um die Kraft in (3) zu erhalten, kann man aus (4) und (1) bezw. $P_6$ und $P_2$, wie in der Figur angegeben, die Resultante bilden, man erhält III $= P_3 = 6000$ Klg.

Verlängert man die Richtungen (4) und (6) bis zum Schnitt in m, welchen Punkt wir für die Kräfte Q, $P_3$ und $P_2$ als Drehpunkt annehmen wollen, so kommen die Kräfte in (4) und (6) ausser Betracht, weil ihre Richtung durch m geht; man erhält dann die Momentengleichung, dem Schnitt uv entsprechend, $-Qy_{20} - P_2 y_{19} = P_3 y_{18}$.

Setzt man $y_{20} = 1{,}03$, $y_{19} = 0{,}88$, $y_{18} = 3{,}10$, $P_2 = 14\,200$ ein, dann findet man $P_3 = -5700$ Klg.

Die Kräfte in (7) und (8) lassen sich auch mit Hülfe des Drehpunktes f bestimmen. Schneidet man bei h durch und bringt an (7) und (8) die Kräfte $P_7$ und $P_8$ an, $P_9$, $P_{10}$, $P_6$ fallen in den Drehpunkt, misst $y_{12} = hf = 0{,}9^m$, $y_{13} = 0{,}63$, $x_3 = 2{,}46$ und berücksichtigt $P_7 = 14\,000$, so findet sich

$$Qx_3 = P_7 y_{12} + P_8 y_{13}, \text{ die Zahlen eingeführt,}$$
$$P = -500 \text{ abg.}$$

Man sieht, dass bei einer geringen Veränderung in der Anordnung die Strebe (8) keine Kraft auszuhalten hat. In der Ausführung wird man sie selbstredend lassen, eventuell noch eine Kreuzstrebe $ff_1$ einführen, um dem Gerüst noch mehr Sicherheit zu gewähren.

Verlängert man die Streben (7) und (10) bis zum Schnittpunkt n, und betrachtet diesen als Drehpunkt der Kräfte $P_6$, $P_8$, $P_9$ und Q dem Schnitt wz entsprechend, so ist die bezügliche Momentengleichung

$$Qy_{14} - P_6 y_{16} + P_8 y_{17} - P_9 y_{15} = 0.$$

Aus der Zeichnung findet man $y_{16} = 1{,}13$, $y_{15} = 3{,}8$, $y_{17} = 2{,}63$, $y_{14} = 0{,}2$. Setzt man die oben gefundenen Werte für $P_6$ und $P_8$ ein, so folgt $P_9 = -4600$ Klg. Druckkraft, welche die Strebe auszuhalten hat.

Die noch restierenden Strebenkräfte werden wir weiter unten in der Anwendung auf Graphostatik bestimmen. —

Zur Berechnung eines Fachwerkkrahnes haben wir die in den Figuren 232 aufgezeichnete Konstruktion (Fairbairn-Krahn) gewählt.

Der Krahn soll 1600 Klg. Last auf $a = 4^m$ Ausladung und $H = 4{,}75^m$ Höhe tragen. Das Eigengewicht veranschlagen wir zu 1600 Klg. Zuschlag für Ketten, Haken 200 Klg. Die Schwerpunktsentfernung wollen wir in $^1/_4$ der Ausladung annehmen, den Krahn rechnen wir an der Ausladungsrolle somit auf $1600 + \frac{1600}{4} + 200 = 2200$ Klg. Last, die wir auf zwei Schilde (Seitenwände) verteilen, welche unter sich durch Quer-Kreuze verbunden sind. Jedes Schild wird auf die Last $K = 1100$ Klg. zu berechnen sein. Die Krahnenwinde hat theoretisch 1600 Klg. zu heben. Der Kettenzug p auf ein Schild ist $\frac{1600}{2} = 800$ Klg., welche wir auf $p = 1000$ Klg. abrunden wollen. Die Winde denken wir uns an drei Stellen einer jeden Seitenwand befestigt, welche die Zugkraft

$$W_1 = W_2 = W_3 = \frac{p}{3} = 333 \text{ Klg.}$$

aushalten müssten. Die Rollen haben $2\rho = 0{,}26^m$ Durchmesser; die Kraftwirkung auf die Rollen wollen wir uns in deren Mittelpunkt verlegt denken. Aus den Gegenkräften von $W_1 = \frac{p}{3}$ und $W_2 + W_3 = {}^2/_3\, p$ ergiebt sich die Resultante $p_1$ abg. zu 1000 Klg. angenommen pro Seitenwand natürlich.

In der Höhe $h = 2^m$ sind die Zapfenlager angebracht, welche den Zapfendrücken $P_3 = P_4 = \frac{K \cdot a}{h} = \frac{1100 \cdot 4}{2} = 2200$ Klg. entsprechen;

der Krahn oder vielmehr die eine Krahnwand ist somit durch die Kräfte K am Ausleger, K am unteren Zapfen bei s und durch die Seitenkräfte $P_3\,P_4$ im Gleichgewicht. Figur 232 giebt eine Seitenansicht, die obere Figur in doppelter Grösse das Ende des Auslegers ohne Rolle; auf die graphostatische Seitenfigur werden wir noch zurückkommen, unterhalb sind die Längen- und Kräftemassstäbe gezeichnet. Die Streben haben wir mit fortlaufenden Nummern bezeichnet. Zur Berechnung der inneren Kräfte machen wir wieder verschiedene passende Schnitte und wählen den Schnitten entsprechende Drehpunkte, die Strebenkräfte seien $P_1\,P_2 \ldots . P_{52}$.

1) Drehpunkt a, Schnitt bei b zur Berechnung der Kraft $P_1$ in (1). Von a eine Senkrechte auf die Kraftrichtung K, obere Figur, und eine solche $y_1$ auf (1), erhält man, wenn mit $y_0$ die Senkrechte von a auf Richtung p bezeichnet wird, die Momentengleichung

$$P_1 y_1 + p y_0 - K_1 x_1 = 0.$$

$P_1$ und p wirken K entgegen. Die Zeichnung liefert $x_1 = 0{,}114$, $y_1 = 0{,}18$, $y_0 = 0{,}085^m$, und man findet

$$P_1 = \frac{1100 \cdot 0{,}114 - 1000 \cdot 0{,}085}{0{,}18} = 220 \text{ Klg. Zugkraft.}$$

2) Drehpunkt b, Schnitt bei a; in (2) muss eine Druckkraft wirken. Die Momentengleichung ist $K x_2 + p x_0 - P_2 y_2 = 0$.

Von b aus ist $x_2 \perp K$, $x_0 \perp p$, $y_2 \perp P_2$.

Setzt man $x_2 = 0{,}213$, $y_2 = 0{,}23$, $x_0 = 0{,}175$ ein, dann erhält man $P_2 = 1800$ Klg.

3) Drehpunkt a, Schnitt der Strebe (4) bei d.

$y_5 \perp \overline{db}$ ist der Hebelarm der Kraft in (4). Die Momentengleichung um a ist dann, weil p und $P_4$ in gleicher Richtung drehen,

$$K x_1 = p y_0 + P_4 y_5.$$

$y_5 = 0{,}25^m$ eingesetzt, erhält man aus

$$1100 \cdot 0{,}114 = 1000 \cdot 0{,}085 + P_4\, 0{,}25,\quad P_4 = 160 \text{ Klg.}$$

4) Drehpunkt d, Schnitt der Strebe (6) bei e. Hebelarm der Kraft K, $x_6 = 0{,}8^m$ ist von d senkrecht auf K, $y_7 = 0{,}25^m$ von $d \perp p$ und $\overline{de} = 0{,}35^m$*) Hebelarm der Kraft in (6)

$$K x_6 + p y_7 = P_6 \overline{de};$$

$$P_6 = \frac{1100 \cdot 0{,}8 + 1000 \cdot 0{,}25}{0{,}35} = 3230 \text{ Klg.}$$

5) Drehpunkt b, Schnitt der Streben (5) und (6) bei $m_2\,n_2$. Hebel-

(* Wir haben für den Hebelarm die betreffende Strebenlänge als genau genügend angenommen.

arm der Kraft $P_5$, $y_6 + \overline{ad}$, $\overline{ab}$*) Hebelarm der Kraft in (6). Momentengleichung

$$Kx_2 + px_0 = P_5 y_6 + P_6 \overline{ab}$$

$$1100 \cdot 0{,}213 + 1000 \cdot 0{,}175 = P_5\, 0{,}235 + 3230 \cdot 0{,}266.$$

Hieraus folgt $P_5 = -1900$ Klg. Druck.

6) Zur Berechnung der Kraft in (3) verlängern wir die Streben (4) und (6) bis zum Schnitt in (c), schneiden den Krahn bei $m_1 n_1$ durch und denken uns an den durchgeschnittenen Stellen die Kräfte $P_1 P_3 P_5$ angebracht. Die Hebelarme der Kräfte $P_4$ und $P_6$ sind Null, $y_3 = 2{,}05$ senkrecht auf $\overline{ab}$, Hebelarm von $P_3$, $x_3 = 1{,}42 \perp$ Verlängerung von (1) Hebelarm der Kraft $P_1$; $y_4 = 1{,}75$, $x_5 = 1{,}013$ senkrecht auf K bezw. (5) von c aus. Die Momentengleichung um c

$$Ky_4 + P_1 x_3 + P_3 y_3 - P_5 x_5 + px_4 = 0$$

ergiebt, die Werte eingeführt

$$1100 \cdot 1{,}75 + 220 \cdot 1{,}42 + P_3\, 2{,}05 - 1900 \cdot 1{,}013 + 1000 \cdot 0{,}07 = 0,$$

hieraus findet sich $P_3 = -180$ Klg.

7) Drehpunkt e, Schnitt der Strebe (8) in f. $x_7 = 0{,}7$ Hebel der Kraft K, von e $\perp$ K. Hebelarm der Kraft $P_9$ ist Null. Momentengleichung

$$Kx_7 - px_4 + P_8 \overline{de}\text{*}) = 0;$$

die Zahlen eingeführt,

$$1100 \cdot 0{,}7 - 1000 \cdot 0{,}07 + P_8\, 0{,}35 = 0, \; P_8 = 1870.$$

8) Drehpunkt c, Schnitt des Auslegers in $m_3 n_3$. Momentengleichung

$$-P_7 y_8 + K_1 y_4 + px_4 = 0,$$

$$y_8 = 2{,}65, \; y_4 = 1{,}75, \; x_4 = 0{,}07$$

wie oben, folgt $P_7 = -750$ Klg. Druckkraft.

9) Schneidet man den Krahn bei $m_4 n_4$, betrachtet um die Kraft in (9) zu berechnen c wieder als Drehpunkt, dann erhält man die Gleichung

$$P_9 x_8 + Ky_4 + px_4 = 0, \; x_8 = 1{,}5$$

senkrecht auf die Verlängerung von (9) durch c gehend gemessen, findet sich

$$P_9 = -\frac{2000}{1{,}5} = -1300 \text{ Klg.}$$

10) Drehpunkt f, Schnitt bei g, die Strebe (10) muss bei g durch die Kraft $P_{10}$ unterstützt werden.

Die betreffenden Hebelarme sind $x_{10} = 1{,}36$, $y_9 = 0{,}333$, $\overline{fg} = 0{,}425$*).

---

*) S. Bemerkung S. 228.

Aus der Gleichung

$$-P_{10}\,\overline{fg} + Kx_{10} + pg_9 = 0 \text{ folgt eingesetzt}$$

$$-P_{10}\,0{,}425 + 1100 \cdot 1{,}36 + 1000 \cdot 0{,}333 = 0 \text{ und}$$

$$P_{10} = 4300 \text{ Klg. Druckkraft.}$$

11) Drehpunkt g, Schnitt bei h zur Berechnung der Zug- oder Kettenkraft $P_{12}$ in (12). $x_{11} = 1{,}2^m$ aus der Zeichnung als Hebel der Last K gemessen, muss sein $Kx_{11} - px_4 - P_{12}\,\overline{fg} = 0$, woraus man

$$P_{12} = 3000 \text{ Klg. findet.}$$

Die Berechnung der Kräfte im Ausleger dürfte so fortgesetzt keine Schwierigkeiten bereiten. Um einige Strebenkräfte in dem Zwischenstück zwischen Ausleger und Säule zu bestimmen, wollen wir von den Drehpunkten i, k, l und m ausgehen, l liegt in der Verlängerung von (31) und (35).

12) Drehpunkt i (Schnitt v · 30, 31, 34), Schnitt der Strebe (32). Hebelarme $x_{12} = 3{,}53 \perp K$; $x_{13} = 0{,}18 \perp p_1$*); $y_{10} = 0{,}72 \perp (32)$. Momentengleichung $P_{32}\,y_{10} = Kx_{12} - p_1\,x_{13}$; die Werte eingeführt, folgt

$$P_{32} = \frac{1100 \cdot 3{,}53 - 1000 \cdot 0{,}18}{0{,}72} = 5100 \text{ Klg. Zugkraft.}$$

13) Schnitt $m_5\,n_6$, Drehpunkt m. $P_{33}$ wirkt an $y_{15} = 0{,}18$, $P_{32}$ an $y_{14} = 0{,}72$ von m $\perp$ Richtung (32)*); $p_1$ an $x_{17}$*), K an $x_{18} = 3{,}6^m = mm_1$, m ist Schnitt der Streben 34, 35, 38; $m_1$ Schnitt $v \cdot x_{15}$ mit der Senkrechten K.

Die betreffende Gleichung ist

$$P_{33}\,y_{15} - P_{32}\,y_{14} + p_1\,x_{17} - Kx_{18} = 0$$

$$P_{32}\,0{,}18 - 5100 \cdot 0{,}72 - 1000 \cdot 0{,}12 - 1100 \cdot 3{,}6 = 0.$$

Hieraus folgt $P_{33} = 1000$ Klg.

14) Drehpunkt l durch Verlängerung von (35) und (33) gefunden, Schnitt $m_5\,n_5$. Die Momente der Kräfte in (32), (33) und (34) sind $P_{34}\,x_{14}$, $P_{32}\,y_{16}$**) und $P_{33}\,y_{13}$, die Hebelarme von $p_1$ und K sind $x_{16} = 0{,}55$, $x_{15} = lm_1 = 3{,}22$, die Momentengleichung um l wird

$$P_{34}\,x_{14} + P_{33}\,y_{13} + P_{32}\,y_{16} + px_{16} = Kx_{15}.$$

Entnimmt man die noch fehlenden Hebelarme aus der Zeichnung, dann erhält man

$$P_{34}\,0{,}37 + 1000 \cdot 0{,}26 + 5100 \cdot 1{,}1 + 1000 \cdot 0{,}55 = 1100 \cdot 3{,}22,$$

hieraus $P_{34} = 7700$.

In folgenden Momentengleichungen fügen wir noch einige Anhaltepunkte zur Berechnung des Krahnsäulengerüstes bei.

---

*) In der Zeichnung nicht angegeben.

**) $x_{16}$, $y_{16}$ sind nicht mit angegeben in der Zeichnung.

15) Wählt man n als Drehpunkt und schneidet bei o die Zugstrebe (48) durch, dann wirken dem Strebenmoment $P_{48}\,\overline{on}$*) die beiden äusseren Momente $Kx_{19}$ und das Zapfenmoment $P_4 y_{17}$ entgegen; die Momentengleichung ist $Kx_{19} = P_4 y_{17} + P_{48}\,\overline{on}$ oder

$$1100 \cdot 3{,}84 = 2200 \cdot 1{,}75 + P_{48}\,0{,}32,$$

hieraus erhält man $P_{48} = 1200$ Klg.

16) Drehpunkt q, Schnitt bei n. Momentengleichung

$$P_{47}\,y_{19} + P_4\,y_{20} = K\,(x_{20} + \overline{qr}).$$

$y_{19} = 0{,}46$, $P_4 = 2200$ Zapfendruck, $y_{20} = 1{,}16$, $x_{20} + \overline{qr} = 4{,}25$ eingesetzt, folgt

$$P_{47}\,0{,}46 + 2200 \cdot 1{,}16 = 1100 \cdot 4{,}25,$$

somit $P_{47} = 4700$ Klg. Druckkraft.

17) Drehpunkt o, Schnitt bei n. Der Hebelarm der Kraft $P_{49}$ ist $y_{18} = 0{,}285$, der der Kraft $P_{47}$ ist genau genügend $\overline{on}$, man erhält die Gleichung $P_{49}\,y_{18} + P_{47}\,\overline{on} = K\,(x_{19} + \overline{on}) - P_4\,y_{17}$ und aus

$$P_{49}\,0{,}285 + 4700 \cdot 0{,}32 = 1100 \cdot 4{,}16 - 2200 \cdot 1{,}75,$$

$$P_{49} = -\,2700 \text{ Klg.}$$

18) Verlängert man die Streben (47), (48) bis zum Schnitt in p, und betrachtet diesen als Drehpunkt, schneidet die Säule bei $m_7\,n_7$ durch, dann sind die Hebelarme von (47) und (48) Null, die Kraft in (49) wirkt dagegen am Hebelarm $x_{21} = 0{,}92^m$. Dem Moment $P_{49}\,x_{21}$ wirkt die Differenz der äusseren Momente $Ka - P_4\,y_{21}$ entgegen, man erhält aus $P_{49}\,x_{21} = Ka - P_4\,y_{21}$, die Werte eingesetzt

$$P_{49} = \frac{1100 \cdot 4 - 2200 \cdot 3{,}1}{0{,}92} = 2710 \text{ Klg.}$$

Die Differenz mit obigen 2700 Klg. liegt nur an der Ungenauigkeit der Zeichnung.

19) Schneidet man bei $m_8\,n_8$, dann wirken p als Drehpunkt betrachtet, dem Moment $Ka - P_4\,y_{21}$ die Differenz der äusseren Momente $W_1\,(y_{22} - \rho) - W_2\,(y_{23} + \rho)$ auf beiden Seiten des Drehpunktes wirkend und das Moment $P_{45}\,x_{22}$ entgegen; man erhält die Gleichung

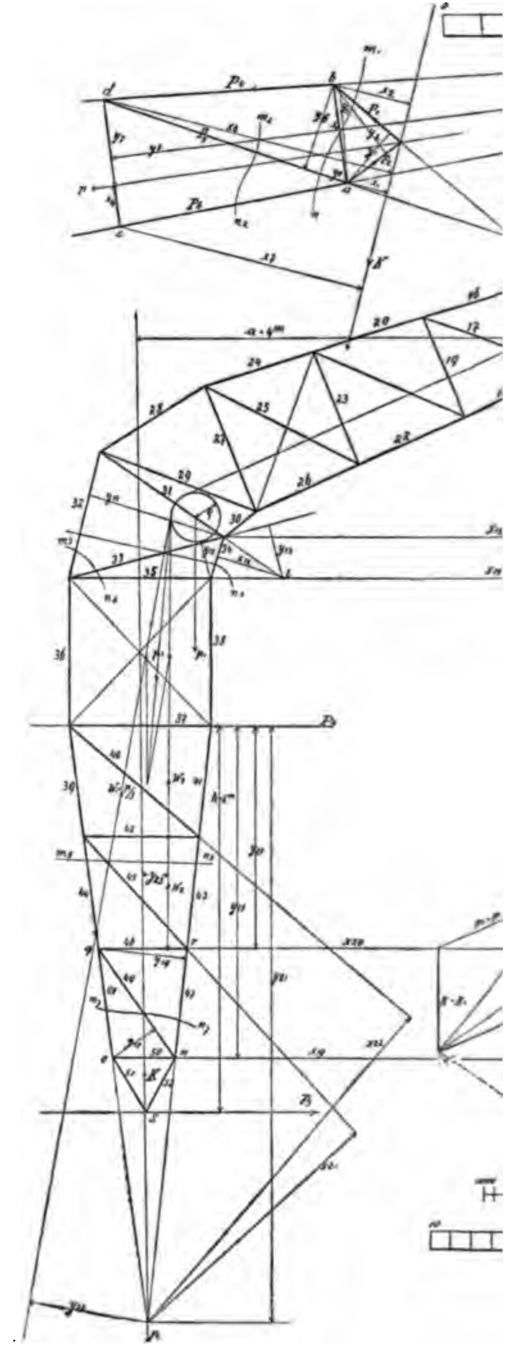
$$W_1\,(y_{22} - \rho) - W_2\,(y_{23} + \rho) + P_{45}\,x_{22} = Ka - P_4\,y_{21}.$$

Entnimmt man die Hebellängen wieder aus der Zeichnung, so folgt

$$\frac{1000}{3}\,(0{,}6 - 0{,}13) - \frac{1000}{3}\,(0{,}12 + 0{,}13) + P_{45}\,1{,}5 = 1100 \cdot 4 - 2200 \cdot 3{,}1,$$

sonach $$P_{45} = 1560 \text{ Klg.}$$

*) S. Bemerkung S. 228.



In der Ausführung wird man selbstverständlich die Zugstreben 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 39, 44, 48 nicht aus Kettengliedern, sondern immerhin steif ausführen. Die sämtlichen andern als Druckstangen, und wird der Sicherheit wegen in jedes Fach ein Doppelkreuz einlegen, wie in (36) (38), (24) (26) angedeutet, auch die Streben 1, 2, 3 und 50, 51, 52 zu einem ganzen Abschlusskörper vereinigen. —

In den beiden folgenden Theorien sind die beiden Krahngerüste Fig. 223 und 233 zu Grunde gelegt.

Das Gerüst Fig. 223 besteht aus drei Stangen von der Länge l, welche unter $\alpha°$ geneigt zusammengestellt sind.

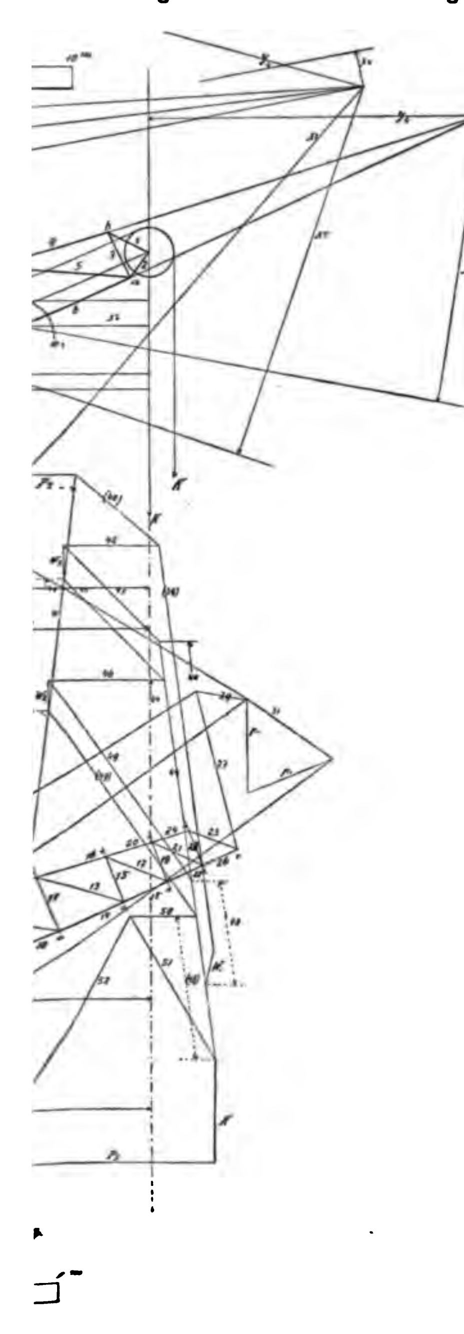
Am Vereinigungspunkt in der Höhe h wird die Last G angehängt. Die Entfernung eines jeden Fusspunktes einer Stange ist m.

Auf jede Stange drückt das Gewicht $G_1 = \frac{1}{3} G$.

Für jede Stange muss sein $G_1 = P \sin \alpha$ und $G_1 = X \operatorname{tg} \alpha$, woraus $P = \frac{G_1}{\sin \alpha}$ und $X = \frac{G_1}{\operatorname{tg} \alpha}$ oder $G_1$ eingesetzt,

$$P = \frac{1}{3} \frac{G}{\sin \alpha} \text{ und}$$

$$X = \frac{1}{3} \frac{G}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3} G \operatorname{cotg} \alpha.$$



Ist Gleichgewicht vorhanden, dann müssen im Grundriss die drei Kräfte X unter 120° zu einander stehen, andernfalls entsteht eine Resultante, welche die Spitze des Gerüstes nach einer Seite zu neigen droht.

Am Fusspunkt der Säule zerlegt sich jede Druckkraft P in $S = P \cos \alpha$ und $N = P \sin \alpha$.

P eingeführt, folgt

$$S = \frac{G_1}{\sin \alpha} \cos \alpha = G_1 \operatorname{cotg} \alpha = X$$

und $N = \frac{G_1}{\sin \alpha} \sin \alpha = G_1$, wie vorauszusehen. Die Kraft S muss mindestens der Reibung der Stange auf der Unterlage das Gleichgewicht halten.

Setzt man $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ und $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{m}{h}$, dann folgt

$$P = \frac{1}{3} \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \frac{G}{h} l$$

$$S = X = \frac{1}{3} G \frac{m}{h} = \frac{1}{3} G \operatorname{cotg} \alpha.$$

Die Fig. 233 stellt ein Aufstellgerüst dar. Es soll die Pyramide, Säule oder der Körper AB senkrecht aufgestellt werden. Die Länge sei l, die Basis sei B und dieser Punkt zugleich Hubkante. Das Gewicht G der Säule greift im Schwerpunkt in der Entfernung s von B an. In A ist unter dem Winkel $\alpha$ eine Kette befestigt, welche über die beiden Druckstangen CD und

$C_1D$ (s. Grundriss) mit einer Winde in E in Verbindung steht. Die Stangen drehen sich während des Hebens um C und $C_1$, welche in der Entfernung e vom Schnittpunkt F der mittleren Ebene des Gerüstes mit der Terrainebene liegen. L sei die Stangenlänge im mittleren Schnitt, $L_1$ die Länge im Grundriss. Die Gesamtanordnung ist aus der Figur hinreichend zu entnehmen. DF ist Horizontalprojektion der Linie HO.

Wir wollen zunächst das Gleichgewicht im mittleren Schnitt aufzustellen suchen.

In A wirkt die Kraft p senkrecht zu der natürlich horizontal angenommenen Achse des zu hebenden Körpers.

Es folgt aus der Gleichung

$$pl = Gs$$

$$p = G \frac{s}{l},$$

und weil $p = P \sin\alpha$, so wird die Zugkraft in der Kette in der mittleren Ebene

$$\text{(a)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad P = \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{Gs}{\sin\alpha}.$$

Betrachten wir o als Drehpunkt, dann wirkt P an x, das Eigengewicht des Balkens L, q, an z, die Kraft der Winde Q an y.

Gleichgewicht tritt ein, wenn

$$\text{(b)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad Qy = Px + qz.$$

Es ist $y = t \sin\gamma$, $x = L \cos\varphi$.

Da $\varphi = 90 - (\alpha + \beta)$, so wird

$$\text{(c)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad x = L \sin(\alpha + \beta), \quad y = t \sin\gamma.$$

Wir wollen den Angriffspunkt des Eigengewichtes q in der halben Balkenlänge annehmen, dann folgt

$$\text{(d)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad z = \frac{m+n}{2}.$$

Die letzten beiden Gleichungen in (b) eingeführt, erhält man

$$Qt \sin\gamma = PL \sin(\alpha + \beta) + q \frac{m+n}{2}.$$

P aus (a) eingeführt wird

$$Q = \frac{\frac{Gs}{l \sin\alpha} L \sin(\alpha + \beta) + q \frac{m+n}{2}}{t \sin\gamma}.$$

In dem Dreieck OEH verhält sich

$t : \sin\psi = L : \sin\gamma$, oder da

$\psi = 180 - [180 - \beta + \gamma] = \beta - \gamma$ ergiebt sich

$$t = \frac{L \sin \psi}{\sin \gamma} = \frac{L \sin (\beta - \gamma)}{\sin \gamma}, \text{ eingesetzt in } Q, \text{ wird}$$

$$Q = \frac{\frac{G s}{l \sin \alpha} L \sin (\alpha + \beta) + q \frac{m + n}{2}}{L \sin (\beta - \gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Bezeichnet man mit Z die von H nach O wirkende Stangenkraft, welche die Stange zu zerknicken strebt, so lässt sich diese aus Q ermitteln, durch $\frac{Q}{z} = \cos \psi$, woraus $Z = \frac{Q}{\cos \psi}$ bezw. $\psi$ eingesetzt,

$$Z = \frac{Q}{\cos (\beta - \gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Z verteilt sich aber unter $\angle \vartheta$ auf zwei Stangen, aus der Zeichnung folgt

$$Z_1 = \frac{1}{2} \frac{Z}{\cos \vartheta};$$

führt man (e) ein, dann wird die Druckkraft in einer Strebe

$$Z_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{\cos \vartheta \cos (\beta - \gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92a)$$

Nach Q der Gl. (92) wird die Übersetzung in der Hebmaschine und diese überhaupt berechnet. Gl. 92a dient, wie wir noch später erkennen werden, als Grundlage zur Berechnung der Stärke der Streben. q ist das Eigengewicht beider Streben.

Bleibt das letztere unberücksichtigt, dann erhält man

$$Q = G \frac{s}{l \sin \alpha} \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\beta - \gamma)}, \quad Z_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{\cos \vartheta \cos (\beta - \gamma)}. \quad (92b)$$

Ordnet man die Hebung so an, dass $\beta = 90 - \alpha$, dann folgt

$$Q = \frac{\frac{G s}{l \sin \alpha} L + q \frac{m + n}{2}}{L \cos (\alpha + \gamma)}, \quad Z_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{\cos \vartheta \sin (\alpha + \gamma)}. \quad (92c)$$

**Beispiel** hierzu. Es soll eine vierseitige steinerne Pyramide von $l = 6^m$ Höhe und $2 \cdot 2 = 4 \square^m$ Grundfläche aufgehoben werden. Die beiden Stangen DC und $DC_1$ haben $8{,}24^m$ Länge und stehen unten $4^m$ auseinander. Die Aufstellung soll so bewirkt werden, dass $h = 5^m$, $t = 4^m$, $n = 3^m$. Aus der Zeichnung findet man dann $m = 3{,}3^m$.

Die Rechnung ergiebt

$$L = \sqrt{8{,}24^2 - 2^2} = 8^m.$$

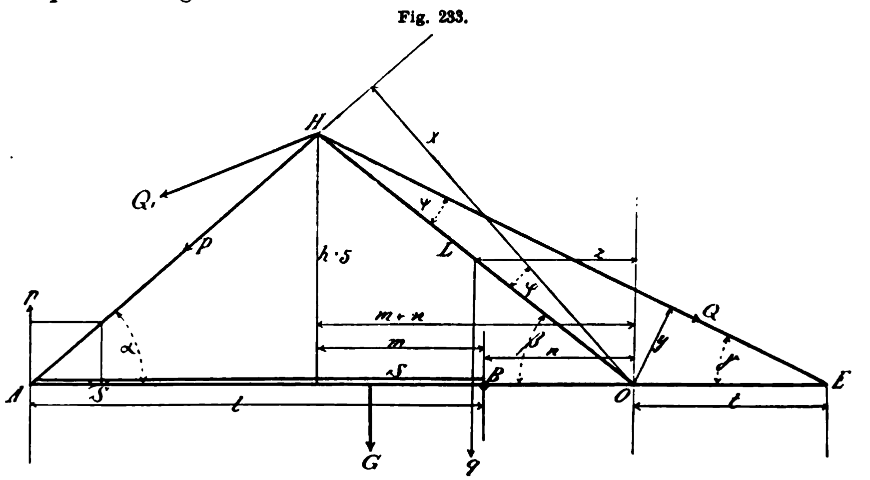
$$tg\, \alpha = \frac{5}{6 - 3{,}3} = 1{,}852, \quad \alpha = 61^\circ 40', \quad \sin \beta = \frac{h}{L} = \frac{5}{8} = 0{,}625, \quad \beta = 38^\circ 40.$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{h}{m+n+t} = \frac{5}{10,3} = 0,485, \quad \gamma = 25^\circ\,50,$$

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{2}{8} = 0,25, \quad \vartheta = 14^\circ\,10'.$$

Das Gewicht der Pyramide ist, wenn $\sigma = 2,2$ das spez. Gewicht $G = 1000 \cdot 2,2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 17\,600$ Klg.; die Entfernung des Schwerpunktes $s = \frac{l}{4} = \frac{6}{4} = 1,5^m$. Das Eigengewicht der Balken wollen wir zu $q = 500$ Klg. annehmen.

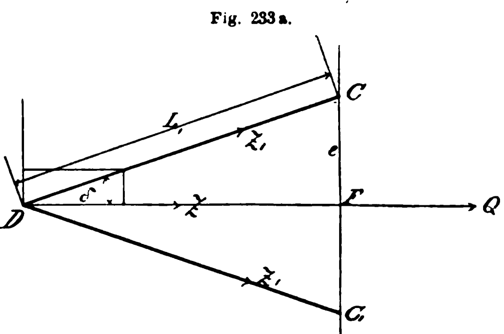
Fig. 233.



Nach Gl. 92 muss die Winde auf eine Maximalkraft berechnet werden von

$$Q = \frac{\frac{17\,600 \cdot 2}{6 \cdot 0,88}\, 8 \cdot 0,924 + 500\, \frac{3,3+3}{2}}{8 \cdot 0,222} \text{ abg. } 30\,000 \text{ Klg.}$$

Fig. 233 a.



Jede Stange hat einen Druck auszuhalten von

$$Z_1 = \frac{1}{2}\,\frac{30\,000}{0,97 \cdot 0,975}$$

abg. 16 000 Klg.

Die Hebung wird um so günstiger, je kleiner $\gamma$ und je mehr sich $\alpha$ und $\beta$ einem Rechten nähern. Q ist im Anfang am grössten, wird

während der Hebung kleiner; es ist also zweckmässig t und h gross anzuordnen, dann wird Q gleich zu Beginn der Hebung kleiner. B hat eine Horizontalkraft nach der Richtung OE auszuhalten, die sich aus dem Parallelogramm bei A ergiebt, nämlich $S = P \cos \alpha$; oder P aus (a) eingeführt

$$S = \frac{Gs}{l \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{Gs}{l} \operatorname{cotg} \alpha = \frac{Gs}{l \operatorname{tg} \alpha} = \frac{17\,600 \cdot 2{,}5}{6 \cdot 1{,}852} = 2400 \text{ Klg.}$$

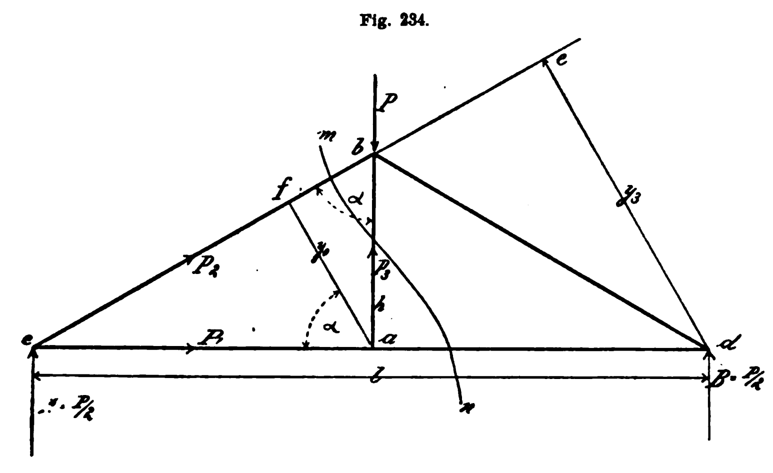
Würde man $\gamma = 8° 40'$ wählen oder die Winde $t = 27^m$ vom Fusspunkt o abstellen, dann wird $\beta - \gamma = 30°$; nach (92) folgt dann

$$Q = 14\,000 \text{ Klg. abg.}$$

Ist die Säule hoch gestellt, dann sind $\alpha$ und $\beta$ am grössten; für $\alpha$ und $\beta$ 90° in Gl. 92 eingeführt, würde folgen $Q = 0$. Der letztere Fall $\alpha = \beta = 90°$ kann und braucht nicht einzutreten, weil man streng genommen die Hebung nur bis zum labilen Gleichgewicht auszuführen braucht (S. auch die Fig. 118—120); es wird sogar dann der entgegengesetzte Fall eintreten, man muss jetzt mit einer Gegenkraft die Pyramide zurückzuhalten suchen, damit sie nicht mit Gewalt vom labilen Gleichgewichtszustand in die senkrechte Lage gleichsam fallend gelangt. Um dem vorzubeugen, ist nach der Richtung $Q_1$ eine Gegenwinde aufzustellen, die in Thätigkeit kommt, wenn das labile Gleichgewicht erreicht ist.

**V. Gleichgewicht und Kräfteverteilung in einigen Dachkonstruktionen.**

Fig. 234.




Das Dach soll das Gebäude nach oben abschliessen; es ruht also auf den Seitenmauern des Gebäudes und muss zunächst sich allein tragen

können, ferner aber auch stark genug sein für etwaige innere oder äussere Lasten. Die inneren sind abhängig von dem Nebenzweck des Daches, Verwertung des Dachraumes für das Gebäude u. s. w., zu den äusseren Lasten oder besser Kräften sind namentlich Schnee als ruhende, und der Wind als bewegliche Kräfte zu rechnen, welche auf das Dach einwirken.

Der Abschluss des Hauses kann nun horizontal sein, dann besteht das Dach aus mehreren auf zwei oder mehr Stützen (Zwischenmauern) ruhenden Trägern und das Haus findet seinen Abschluss in einem freien Stockwerk. Wir wollen aber das Dach, den Dachstuhl, als mehrere nebeneinander stehende einfache oder zusammengesetzte Strebenwerke in Dreiecks-, Bogen- oder in beliebiger Winkelform auffassen, die unter sich verbunden das Dachmaterial tragen, und durch ihre Neigung oder Krümmung fähig werden, die atmosphärischen Niederschläge seitlich abzuleiten. Infolge dieser Form wird aber ein Horizontal- und Vertikaldruck ausgeübt auf die Unterstützungen (S. d. Fig. 67, 70, 71), wie bei Gewölben und Spreng- bezw. Hängewerken. Die Horizontalkraft kann ein Umstürzen der Seitenmauern nach aussen veranlassen, es sind also innere Verspannungen erforderlich, Verankerungen in der Weise durchgeführt, dass die Horizontalkräfte aufgehoben werden. Die einfachsten Verstrebungen sind horizontale Balken, wie sie die Fig. 234 andeutet, diese können nun gleichzeitig dazu dienen, die oben erwähnten horizontalen inneren Lasten aufzunehmen, um den Dachraum auszunutzen. Um Durchbiegungen zu vermeiden, werden sie durch Hängestangen mit den eigentlichen Dachträgern verbunden, die dann auch diesen Teil der Last mit auf die Seitenwände übertragen. Die Dachträger selbst (Sparren) sind entweder einfache Balken oder je nach ihrer Länge, Spannung, grössere oder kleinere Strebwerke; jeder Sparren bildet für sich allein gleichsam einen Brückenträger, der um die Durchbiegung zu verhüten mehr oder weniger verstrebt ist. —

1) Es sei Fig. 234 bcd ein einfacher Dachstuhl, das ganze Dach besteht aus mehreren solchen gewöhnlich in $1^m$ Entfernung stehenden, unter dem Winkel $2\alpha$ am First zusammengesetzten Streben, Sparren, die durch den horizontalen Balken cd unten zusammengehalten werden. Die Gesamtbelastung verteilt sich gleichmässig auf die Sparren und wollen wir sie für ein Sparrenwerk in b koncentriert denken. (S. S. 107, 109 u. f.)

P verteilt sich an den Auflagern gleichmässig;

$$A = B = \frac{P}{2}.$$

$P_2$ sei die Druckkraft in den Streben, $P_1$ die Zugkraft in cd, $P_3$ wirke in ab.

Schneidet man bei b durch und lässt, a als Drehpunkt betrachtet, $P_2$ an $y_2$ sich bewegen, um einem Teil der Kraft P Widerstand zu leisten, dann wirken beide Momente $A\frac{l}{2}$ und $P_2 y_2$ in gleicher Drehungsrichtung, man erhält aus

$$A\frac{l}{2} + P_2 y_2 = 0;\ A = \frac{P}{2} \text{ eingesetzt, folgt}$$

$$P_2 = -P\frac{l}{4\,y_2} \text{ Druckkraft.}$$

Bedenkt man, dass $y_2 = \frac{l}{2}\cos\alpha$, so erhält man, wie schon Gl. n, S. 75 entwickelt,

$$P_2 = -\frac{Pl}{4\,y_2} = -\frac{P}{2\cos\alpha}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Betrachtet man b als Drehpunkt und schneidet bei a durch, so wird $P_1$ von h entgegengesetzt dem Moment A an $\frac{l}{2}$ drehen, man erhält die Gleichung $A\frac{l}{2} - P_1 h = 0$, oder A eingesetzt, $P_1 = \frac{P}{2}\frac{l/2}{h}$.

Es ist aber $\frac{l}{2} = h \operatorname{tang}\alpha$, folglich wie bereits bekannt

$$P_1 = \frac{P}{4}\frac{l}{h} = \frac{P}{2}\operatorname{tang}\alpha. \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Die Kraft $P_3$ in ab wird Null, weil bereits die Last P von den Streben $P_2$ vollständig aufgenommen wird; man kann also diese Strebe unbeschadet herausnehmen.

$P_3$ müsste in ab P entgegenwirken. Betrachtet man B als Drehpunkt, dann wirkt $P_2$ an $y_3$, $P_3$ an $\frac{l}{2}$ und A an l, P kommt nicht in Betracht, weil $P_2$ und $P_3$ diese Kraft in sich aufgenommen haben, man erhält

$$Al + P_2 y_3 + P_3\frac{l}{2} = 0. \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

$A = \frac{P}{2}$ und $P_2$ aus (a) eingesetzt, folgt

$$P_3\frac{l}{2} = P\frac{l}{4}\frac{y_3}{y_2} - P\frac{l}{2}, \text{ hieraus}$$

$$P_3 = P\left(\frac{y_3}{2\,y_2} - 1\right).$$

Aus der Figur ergiebt sich aber die Proportion

$$y_3 : y_2 = l : \frac{l}{2}, \text{ oder } \frac{y_3}{y_2} = 2,$$

eingeführt, wird $P_3 = 0$. Schneidet man bei mn durch, dann erhält man dieselbe Momentengleichung wie (c); es wird das Moment $A\frac{l}{2}$ durch das gleiche $P\frac{l}{2}$ vertreten, $P_2 y_3 + P_3 \frac{l}{2} + P_1 o + P\frac{l}{2} = 0$.

Aus der Figur übersieht man leicht, dass sich auch verhalten muss $y_2 : \overline{ac} = \overline{ab} : \overline{cb}$ oder

$$y_2 : \frac{l}{2} = h : \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

$y_2$ abhängig von l und h aus dieser Proportion ausgedrückt

$$y_2 = \frac{lh}{\sqrt{l^2 + 4h^2}}$$ in (a) eingeführt, wird endlich

$$(93) \quad \ldots \quad \begin{cases} P_1 = \frac{P}{4}\frac{l}{h} = \frac{P}{2}\tang \alpha \\ P_2 = \frac{P}{4h}\sqrt{l^2 + 4h^2} = \frac{P}{2\cos\alpha}. \end{cases}$$

Ist die Balkenlage cd noch besonders belastet, dann ist eventuell um eine Durchbiegung derselben zu verhindern, eine Hängsäule **ab** geboten; die innere Last auf cd hängt dann zum Teil mit an ab und wirkt mit P vereint in Richtung bc und bd nach den Auflagern.

Ein Haus von $10^m$ Länge und $6^m$ Breite soll ein einfaches Ziegeldach erhalten. Es sei also $l = 6^m$ und soll das Dach die Höhe $h = 3^m$ erhalten.

Die wirklichen Sparrenlängen sind $d = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24^m$. Die ganze Dachfläche $2 \cdot 4{,}24 \cdot 10 = 85$ □$^m$ abg. Nehmen wir 100 Klg. pro □$^m$ Belastung, 50 Klg. pro □$^m$ Schneelast an, dann ist die Gesamtaussenlast $150 \cdot 85 = 13000$ Klg. abg. Bei Anwendung von 10 Sparrenfeldern kommen auf einen solchen Binder 1300 Klg. gleichmässig verteilt; in der Mitte koncentriert $P = \frac{1300}{2} = 650$ Klg.

Nehmen wir noch eine Innenlast von 300 Klg. pro Sparrenfeld auch gleichmässig verteilt an, die durch eine Hängsäule mit P verbunden sind, dann ist in a angenommen die Innenlast $\frac{300}{2} = 150$ Klg. und wird

$$P = 650 + 150 = 800 \text{ Klg.}$$

Die Gl. 93 ergeben

$$P_1 = \frac{800}{4}\,\frac{6}{3} = 400 \text{ Klg. Zug- und}$$

$$P_2 = \frac{800}{4 \cdot 3}\sqrt{6^2 + 4 \cdot 3^2} = 633 \text{ Klg. Druckkraft.}$$

Die Hängesäule ab wäre auf die Zugkraft 150 zu berechnen.

Sind die Träger cd stark genug, um ausser der Zugkraft $P_1$ das Biegungsmoment der 300 Klg. aushalten zu können, dann hat das Dach nur $P = 650$ Klg. in b zusammengedrängt oder 1300 Klg. verteilt zu tragen, es würde dann nach Gl. 93

$$P_1 = \frac{650}{4} \cdot \frac{6}{3} = 325 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = \frac{650}{4 \cdot 3}\sqrt{6^2 + 3 \cdot 4^2} = 500 \text{ Klg.}$$

cb und bd hätten demnach 460 Klg. Druckkraft auszuhalten auf die Länge von 4,24$^m$.

cd ist hingegen auf die Zugkraft 325 Klg. zu berechnen, und hat noch dem Biegungsmoment

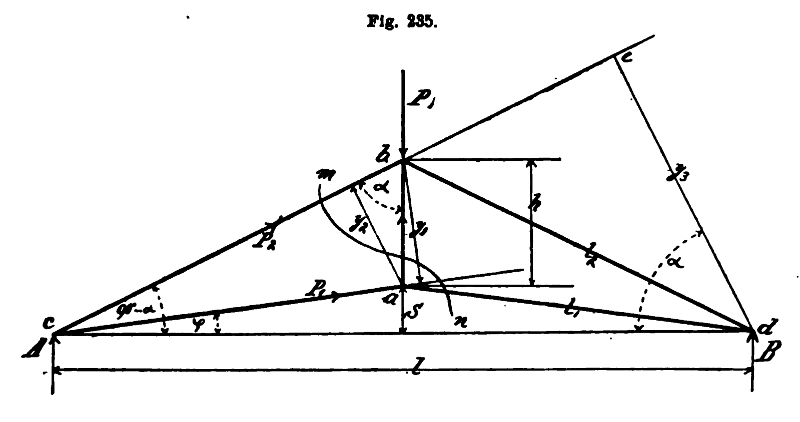
$$\frac{300 \cdot 6}{8} = \frac{150 \cdot 6}{4} = 225 \text{ Klg.}$$

zu widerstehen.

2) In dem Dachstuhl Fig. 235 ist wieder

$$A = B = \frac{P}{2}.$$

Fig. 235.



Betrachtet man a wieder als Drehpunkt und schneidet bei b, so folgt,

wie oben aus $$A\frac{l}{2} + P_2 y_2 = 0,$$

(a) . . . . . . . . $$P_2 = -\frac{Pl}{4 y_2}.$$

b als Drehpunkt mit Schnitt bei a, ergiebt die Gleichung

$$A\frac{l}{2} - P_1 y_1 = 0,$$ woraus A eingesetzt

(b) . . . . . . . . $$P_1 = \frac{Pl}{4 y_1}.$$

ac verlängert und von b eine Senkrechte auf die Verlängerung errichtet, erhält man den Hebelarm $y_1$ der Kraft $P_1$ für den Drehpunkt b.

Um die Kraft $P_3$ in ab zu berechnen, wählen wir B zum Drehpunkt; es wirkt dann $P_2$ an $y_3$, $P_3$ an l/2 und A an l. Die äussere Kraft P kommt nicht in Betracht, weil diese bereits von $P_2$ vertreten und von A im Gleichgewicht erhalten wird; ebenso ist $P_1$ abhängig von $P_3$ (wie $P_2$ von P) und kommt also auch in der Momentengleichung in Wegfall. Die letztere lautet

$$Al + P_2 y_3 + P_3 \frac{l}{2} = 0,$$

oder bei mn geschnitten

$$P_2 y_3 + P_3 \frac{l}{2} - P\frac{l}{2} = 0;$$

$A = \frac{P}{2}$ und Gl. a eingesetzt, ergiebt sich

(c) . . . . . $$P_3 = P\left(\frac{y_3}{2 y_2} - 1\right).$$

In Folge der Senkrechten $y_1 y_2 y_3$ entstehen mehrere ähnliche Dreiecke, die aus der Figur leicht zu erkennen sind, indem $\angle \varphi = \angle fba$, $\angle bca = \angle bag = 90 - \alpha$, $\angle edc = \alpha$.

Bezeichnet man ab mit h und ai mit s, dann ist

$$cb = \sqrt{(h+s)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(h+s)^2 + l^2},$$

$$ac = \sqrt{s^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 s^2 + l^2}$$ und $$gb = \sqrt{h^2 - y_2^2}.$$

In den Dreiecken gba und cbi verhält sich

$y_2 : h = ci : cb$ oder

$y_2 : h = \frac{l}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{4(h+s)^2 + l^2},$ sonach wird

$$y_2 = \frac{hl}{\sqrt{4(h+s)^2 + l^2}}.$$

In den ähnlichen Dreiecken gba und cde verhält sich

$y_3 : l = \overline{gb} : h$ oder gb eingeführt,

$y_3 = \frac{l\sqrt{h^2 - y_2^2}}{h}$ und noch $y_2$ eingesetzt, reduciert

$$y_3 = \frac{2l(h+s)}{\sqrt{4(h+s)^2 + l^2}}.$$

Endlich verhält sich in $\triangle abf$ und $\triangle aci$

$y_1 : h = ci : ac$ oder

$y_1 : h = \frac{l}{2} : \sqrt{s^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$, woraus

$$y_1 = \frac{hl}{\sqrt{l^2 + 4s^2}}.$$

$y_1 y_2 y_3$ in die Gl. a, b, c eingeführt, erhält man die Ausdrücke für $P_1 P_2 P_3$ geeignet zusammengezogen, und $ac = l_1$, $cb = l_2$ gesetzt,

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{P}{4h}\sqrt{4s^2 + l^2} = \frac{P}{2}\frac{l_1}{h}, \text{ Zugkraft} \\ P_2 &= \frac{P}{4h}\sqrt{4(h+s)^2 + l^2} = \frac{P}{2}\frac{l^2}{h}, \text{ Druckkraft} \\ P_3 &= P\frac{s}{h} \text{ Zugkraft.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (94)$$

Für $s = o$ folgen wieder die obigen Formeln 93.

Je kleiner s, um so mehr heben sich die Kräfte in den Stangen ac und ad gegenseitig auf.

Unter den gleichen Belastungsverhältnissen wie in obigem Beispiel für $l = 6^m$, $h = 2^m$, $s = 1^m$, $P = 650$ Klg. würde man $P_1 = 520$ Klg., $P_2 = 700$ Klg. und $P_3 = 325$ Klg. erhalten.

Entwickelt man aus obigen Dachstühlen die beistehende in Fig. 236 dargestellte Form, dann brauchen wir in obigen Gleichungen nur s negativ bei Beibehaltung der analogen Bezeichnungen zu setzen.

Man erhält

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{P}{4h}\sqrt{4s^2 + l^2} = \frac{P}{2}\frac{l_1}{h}, \\ P_2 &= \frac{P}{4h}\sqrt{4(h-s)^2 + l^2} = \frac{P}{2}\frac{l_2}{h}, \\ P_3 &= -P\frac{s}{h}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Verwendet man erst a, dann b als Drehpunkte, dann ergeben sich dieselben Momentengleichungen wie oben

$A\frac{l}{2} + P_2 y_2 = 0$ und $A\frac{l}{2} - P_1 y_2 = 0$, woraus

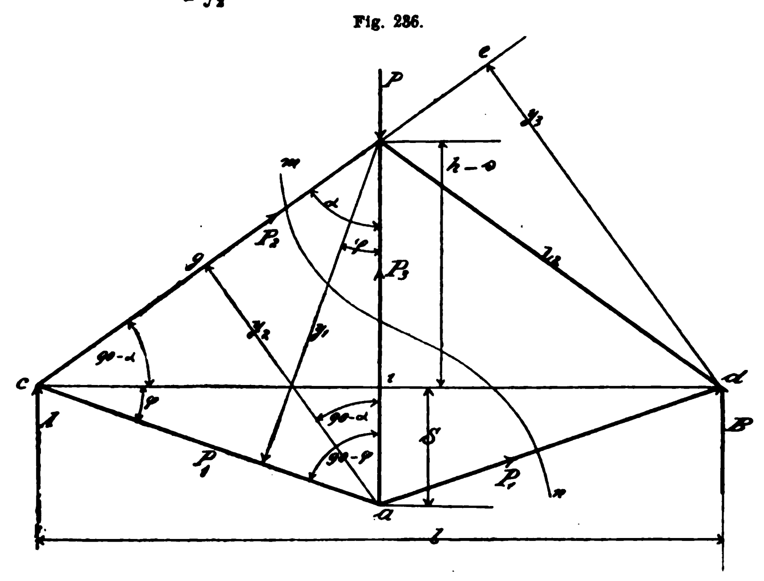
$$P_1 = P\frac{l}{4\,y_1};\quad P_2 = P\frac{l}{4\,y_2}.$$

Das Gerüst bei mn geschnitten, die durchgeschnittenen Strebenstellen durch Kräfte ersetzt, folgt Gleichgewicht, wenn

$$P_2 y_3 + P_3\frac{l}{2} + P_1\cdot o + P\frac{l}{2} = 0 \text{ und}$$

$$P_3 = P\left(\frac{y_3}{2\,y_2} - 1\right).$$

Fig. 286.




Aus den ähnlichen Dreiecken $\triangle$ gba $\sim$ cib findet man $y_2$ durch die Proportion

$$y_2 : h = ci : l_2 = l/_2 : l_2,$$

$$y_2 = \frac{lh}{2 l_2}.$$

Aus $y_1 : h = ci : ca = l/2 : l_1$ in den Dreiecken cia $\sim$ fab, ergiebt sich

$$y_1 = \frac{hl}{2 l_1}.$$

$y_3$ endlich aus den ähnlichen Dreiecken edc und cib; es verhält sich

$$y_3 : l = h - s : l_2 = h - s : \sqrt{(h-s)^2 + (l/2)^2} \text{ und ist}$$

$$y_3 = \frac{l\,(h-1)}{l_2}.$$

Die vorstehenden Hebelarme $y_1\, y_2\, y_3$ in die Ausdrücke für $P_1\, P_2\, P_3$ eingesetzt, etwas reduciert, lassen sich die Gleichungen (95) leicht entwickeln.

3) Der beistehende sog. einfache Polonceaubinder kann bekanntlich schon bis ca. 15m Spannweite verwendet werden. Jeder Sparren für sich

Fig. 237.

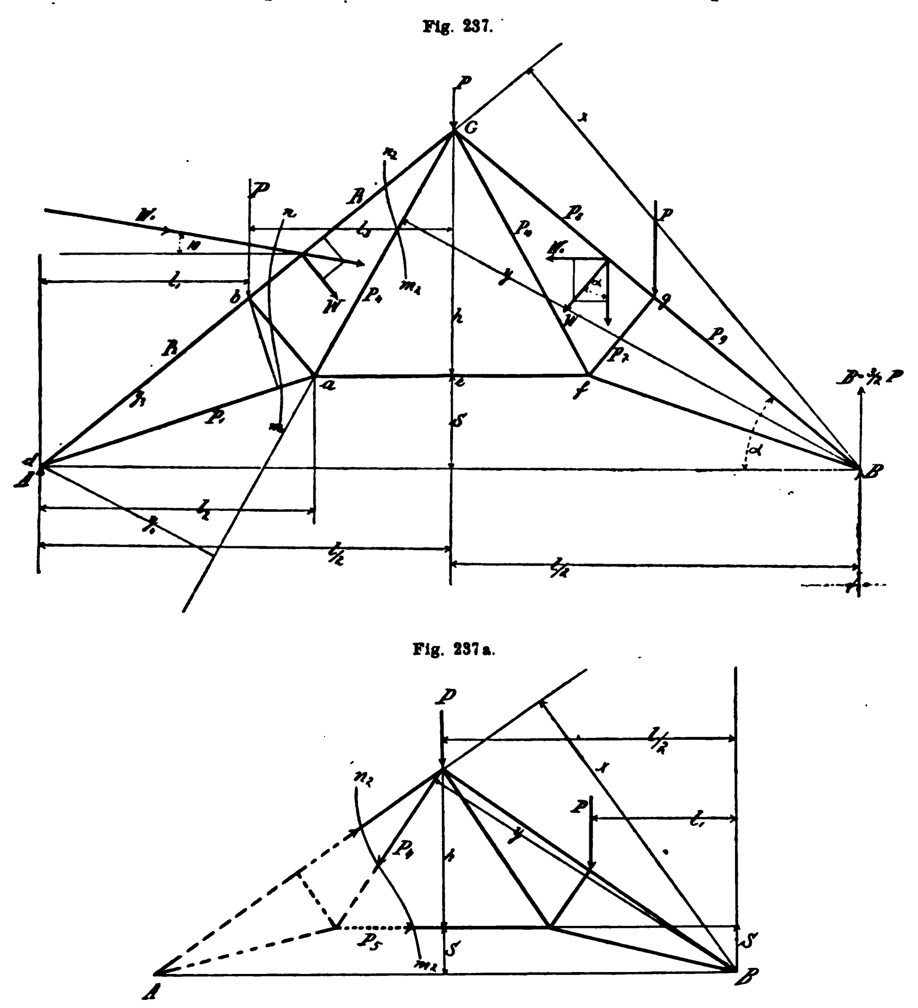



Fig. 237a.

dacb, cfhg bildet ein verstärkter Träger; um dessen Durchbiegung zu vermeiden, ist derselbe durch die Druckstangen ab und fg, an denen die Zugstangen da, ca bezw. cf und hf befestigt sind, so verspannt, dass er für grössere Längen verwendet werden kann. Zwei solcher Träger scharnierartig unter sich und noch mit der Zugstange af, wie in der Figur angedeutet, zusammengestellt, bilden einen Binder. Jeder Träger für sich ist gleichsam ein umgekehrtes Hängewerk (s. Fig. 70). Die Kraft x in

b, hier eine Komponente von P, bewirkt durch die Druckstrebe ab je eine Zugkraft in ad und ac.

Fig. 237 b.

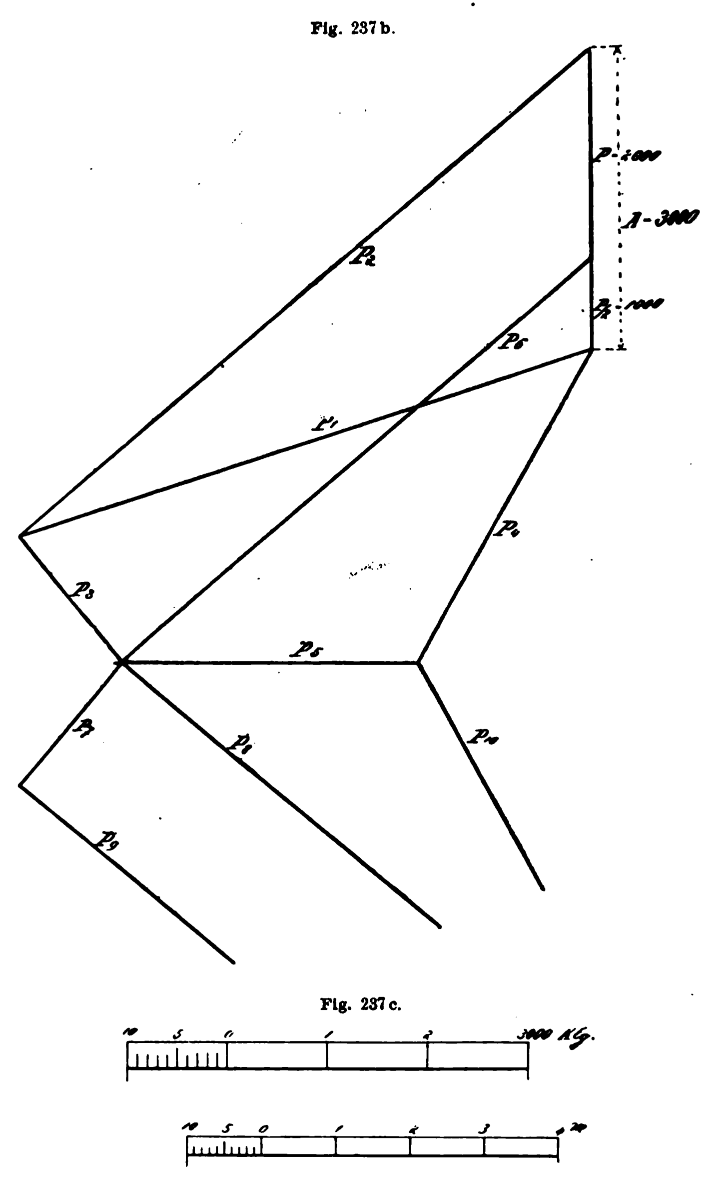


Fig. 237 c.

Die Gesamtlast verteilen wir am besten auf einzelne Knotenpunkte b, c, g. Diese Verteilung ganz gleichmässig anzunehmen, ist nicht voll-

ständig richtig; jede auf der schiefen Ebene gleichmässig verteilte Last wird sich nach den Auflagern zu am dichtesten lagern, vom First nach unten zu zusammendrängen. Von der Ermittelung einer genauen Druckverteilung wollen wir aber abstehen, sie würde uns zu weit führen. In Bezug auf den Winddruck nimmt man denselben unter 10° Steigung zur Horizontalen an. Massgebend für uns ist nur die eine Komponente, welche senkrecht zur Dachfläche wirkt W, während die andere, da die Reibung des Windes an der Fläche Null angenommen werden kann, nicht in Betracht kommt. Der Winddruck ist von der Windgeschwindigkeit abhängig und kann für Deutschland zu 200 Klg. pro □ᵐ angenommen werden*), je flacher das Dach, um so geringer ist der Druck der senkrechten Komponente. Für die Praxis genügt es bei einer Neigung von 1 : 1 (45°) 100 Klg. pro □ᵐ Dachfläche, bei 1 : 5 (10 bis 11°) 20 Klg. pro □ᵐ senkrechten Druck auf die Dachfläche anzunehmen.

Zerlegt man diesen wieder in eine horizontale und vertikale Komponente $W_0$ und $W_1$, so wirkt die erstere am Hebelarm der Schwerpunktsentfernung als Umsturzmoment, um den Dachstuhl bei d oder h zu kanten. Die andere Teilkraft $W_1 = W \cos \alpha$ würde zu obigen Vertikalkräften zuzuschlagen sein. Für die verschiedenen Dachneigungen von 45° bis 10° ist aber $W_1 = 80$ bis 15 Klg. pro □ᵐ Dachfläche.

Zur Ermittelung der innern Kräfte wirken auf einen Binder insgesamt 3 P Klg., die beiden Auflagerdrücke sind dann $A = B = \frac{3}{2} P$.

Betrachten wir a als Drehpunkt und schneiden bei b die Strebe db, dann folgt aus

$$A l_2 = P_2 y_2,$$
$$P_2 \frac{A l_2}{y_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Drehpunkt b, Schnitt bei a der Strebe ad, findet man die Momentengleichung

$$A l_1 = P_1 y_1 \text{ und}$$
$$P_1 = \frac{A l_1}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Die Kraftrichtung in beiden Streben ist entgegengesetzt, $P_2$ ist Druck, $P_1$ Zugkraft.

*) Für Brücken 250 Klg. pro □ᵐ; infolge des Unglückes der Tay-Brücke in England setzte man nach neueren Beobachtungen bei 45ᵐ Windgeschwindigkeit 270 Klg. pro □ᵐ fest.

Zur Ermittelung der Kraft $P_5$ schneiden wir bei e und wählen c als Drehpunkt; es entsteht Gleichgewicht, wenn

$$A\,l/2 = Pl_3 + P_5 h, \text{ oder}$$

(c) . . . . . . . $$P_5 = \frac{A\,l/2 - Pl_3}{h}.$$

Bei $m_1 n_1$ geschnitten und A als Drehpunkt betrachtet sind die Hebelarme der Streben db und do Null, ab, also $P_3$ wirkt an $db = y_3$ so zwar, dass

$$P_3 y_3 = Pl_1, \text{ wonach}$$

(d) . . . . . . . . $$P_3 = \frac{Pl_1}{y_3}.$$

Ein Schnitt bei $m_2 n_2$ und A als Drehpnnkt liefert die Momentengleichung

$$Pl_1 + P_5 s - P_4 y_4 = 0, \text{ also}$$

(e) . . . . . . . $$P_4 = \frac{Pl_1 + P_5 s}{y_4}.$$

Derselbe Schnitt, aber B als Drehpunkt zu Grunde gelegt (S. Fig. 237 a) liefert die Momentengleichung

$$P_6 x - P_4 y - P_5 s = Pl/2 + Pl_1, \text{ woraus}$$

(f) . . . $$P_6 = \frac{Pl/2 + Pl_1 + P_5 s + P_4 y}{x}.$$

Setzt man in diese Gleichungen $A = 3/2\,P$; $l_1 = l_3 = l/4$, dann erhält man entsprechend reduciert:

(96) . . $$\left\{\begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{8}\frac{Pl}{y_1} \\ P_2 &= \frac{3}{2}\frac{Pl_2}{y_2} \\ P_5 &= \frac{1}{2}\frac{Pl}{h} \\ P_3 &= \frac{Pl}{4y_3} = \frac{Pl}{\sqrt{4(h+s)^2 + l^2}} \\ P_4 &= \frac{Pl}{4hy_4}(h+2s) \\ P_6 &= \frac{Pl}{4hx}\left[2h + (h+2s)\left(1+\frac{y}{y_4}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Setzt man für einen Fall alles in allem gerechnet

$$P = 2000 \text{ Klg.}, \; l = 12^m, \; s = 1{,}3, \; h + s = 5^m,$$

dann erhält man

$$P_1 = \frac{3}{8} \frac{2000 \cdot 12}{1,5} = 6000 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = \frac{3}{2} \frac{Pl_2}{y_2} = \frac{3}{2} \frac{2000 \cdot 4}{1,56} = 7700 \text{ Klg.}$$

$$P_5 = \frac{1}{2} \frac{2000 \cdot 12}{3,7} = 3300 \text{ Klg.}$$

$$P_3 = \frac{2000 \cdot 12}{\sqrt{4 \cdot 5^2 + 12^2}} = 1500 \text{ Klg.}$$

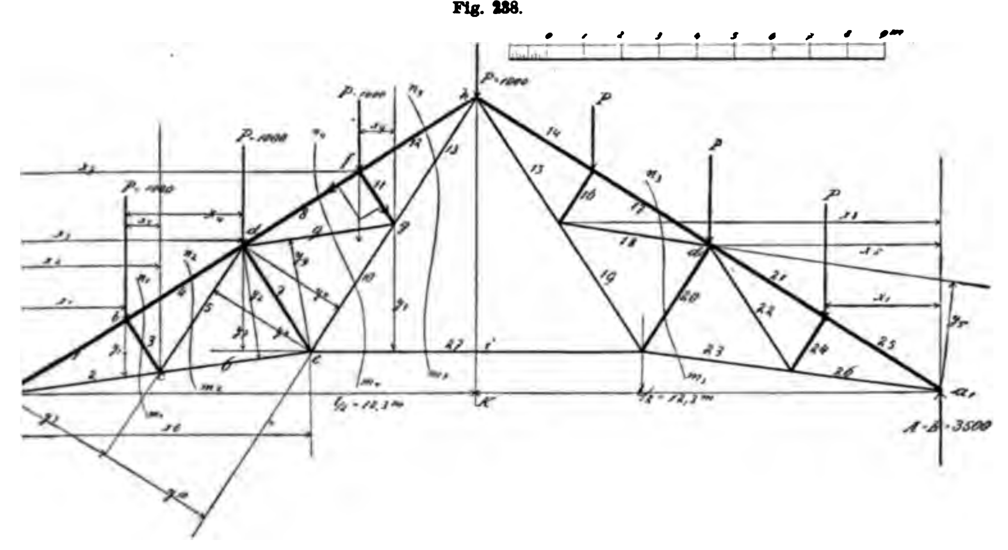
$$P_4 = \frac{2000 \cdot 12}{4 \cdot 3,7 \cdot 2,8} (3,7 + 2 \cdot 1,3) = 3700 \text{ Klg.}$$

$$P_6 = \frac{2000 \cdot 12}{4 \cdot 3,7 \cdot 7,6} \left[2 \cdot 3,7 + (3,7 + 2 \cdot 1,3)\left(1 + \frac{7,6}{2,8}\right)\right] = 6600 \text{ Klg.}$$

---

In der umstehenden bekannten Dachstuhlkonstruktion (stehender Dachstuhl, Kehlbalkendach) sind die Sparren unterstützt durch den Ein-

Fig. 288.



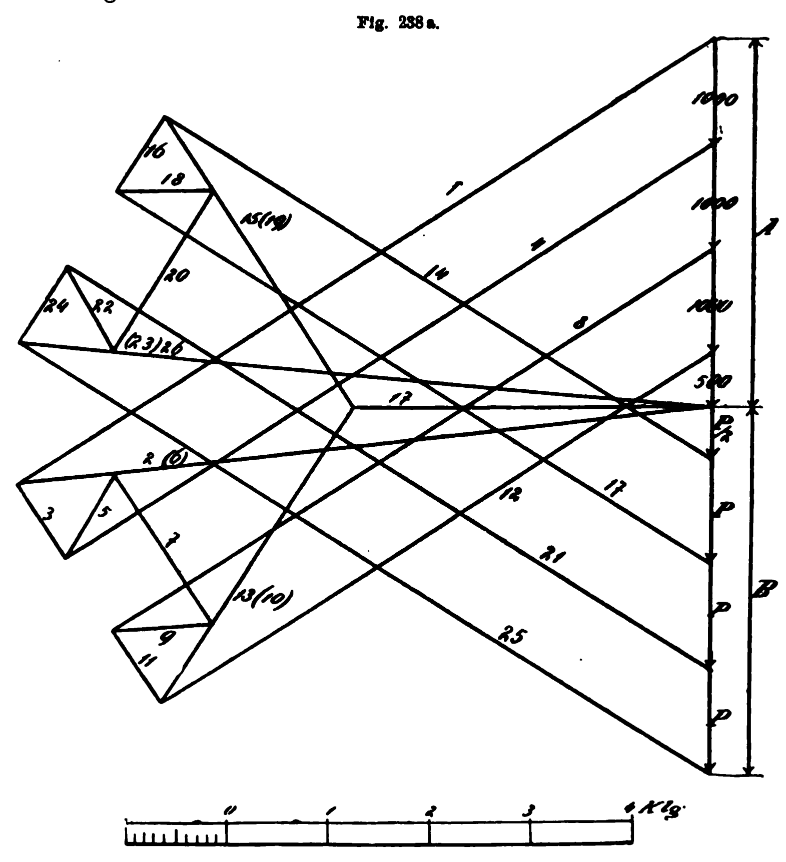
bau mnop, bezw. abgesteift durch den Kehlbalken po. Die Säulen pm und on sind entweder durch Mauern unterstützt, oder sie dienen als Hängestangen, um eine innere Last durch die Strebenteile tp und or auf die Seitenmauern zu übertragen; auf eventuell weitere Konstruktionselemente, Kopfbänder, Fetten wollen wir hier nicht weiter eingehen. Die Aussenlast incl. Eigengewicht sei in den Punkten p, s, o verteilt und zu

je P Klg. angenommen. Die Innenlast sei q Klg. gleichmässig verteilt oder in m und n zu je Q Klg. reduciert. Ist eine solche vorhanden, dann ist

(a) . . . . $A = B = 3/2\, P + 9/2 = 3/2\, P + Q.$

Die Kraft P in s verteilt sich wie uns bereits aus Gl. 93 bekannt und aus Fig. 239a zu ersehen ist.

Fig. 238 a.




Die Kräfte in o und p, sowie die Innenlast wird, wie Fig. 239b andeuten soll, von dem Einbau übernommen.

Die Kräfteverteilung in Fig. 239a ist, Gl. 93

(b) . $P_1 = \frac{P}{4}\frac{l}{h} = \frac{P}{2}\operatorname{tang}\alpha,\ P_2 = \frac{P}{4\,h}\sqrt{l^2 + 4\,h^2} = \frac{P}{2\cos\alpha}.$

In p und o zerlegen sich die Kräfte in

$$P_4 = P\operatorname{tang}\alpha = P\,\frac{l}{2\,h},\ \text{und weil}\ P = P_5\cos\alpha,$$

$$P_5 = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{\frac{P}{h}}{\sqrt{(l/2)^2 + h^2}} = \frac{P}{2h} \sqrt{l^2 + 4h^2} \; . \; . \quad (c)$$

Aus dem Parallelogramm in r findet man

$P_6 = P_5 \sin \alpha$ und $P_5$ eingesetzt, aus (c)

$$P_6 = P \operatorname{tang} \alpha = P \frac{l}{2h} = P_4. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

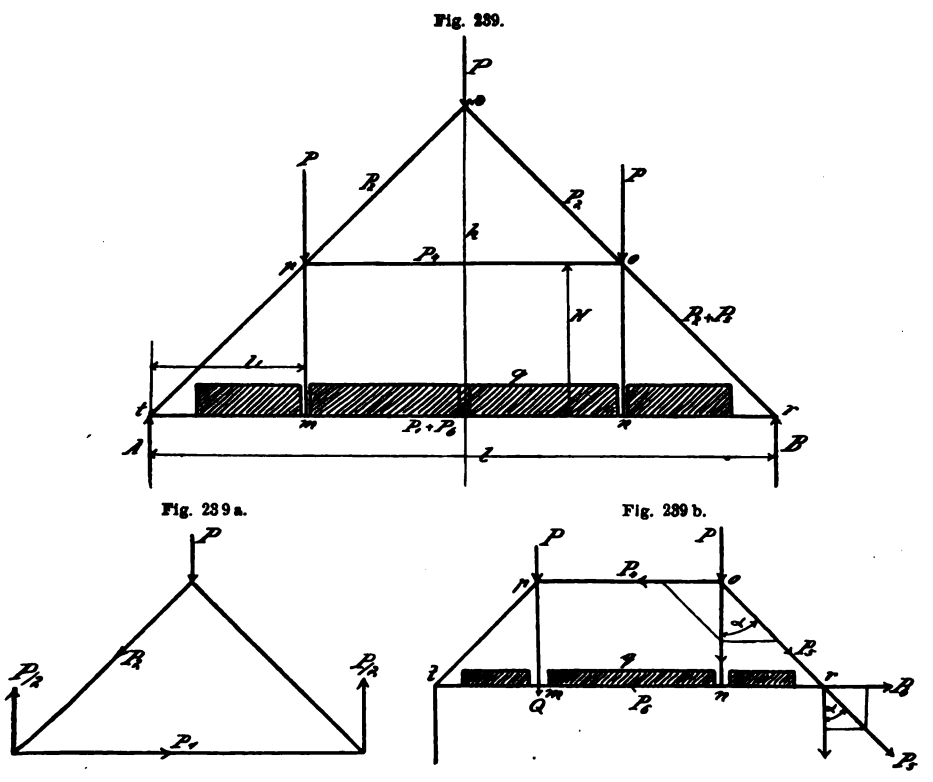


Fig. 239.

Fig. 239 a.

Fig. 239 b.

Das grösste Moment der gleichmässig verteilten Last auf tr ist (Gl. 53a, S. 110, Fig. 129) $M = \frac{ql}{8}$, das grösste Moment, wie die Verteilung der Kräfte Q, Fig. 239b, in m und n liefern, ist nach Gl. 58, Fig. 134, $M = Ql_1$. Setzt man beide Ausdrücke gleich, dann erhält man

$$\frac{ql}{8} = Ql_1 \text{ und } Q = \frac{ql}{8l_1}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

Soll die Last Q in p und o aufgehängt werden, so ist zu P in p und o noch Q zuzuschlagen.

Ist keine Innenlast vorhanden, dann ist der Sparren $\overline{ps}$, bezw. $\overline{so}$, nach Gl. b bezw. 93 zu berechnen; der Sparren in pt hat aber ausserdem noch die Druckkraft $P_5$ auszuhalten, nämlich zusammen

(97) . . . . $$P_2 + P_5 = \frac{3}{4}\frac{P}{h}\sqrt{l^2 + 4h^2}.$$

Der Kehlbalken po hat dem Druck

(97a) . . . . $$P_4 = P\frac{l}{2h} = P \operatorname{tg} \alpha \text{ zu widerstehen;}$$

Der Träger tr ist auf $P_1 + P_6$ zu berechnen, nämlich

(97b) . . . . . . . . . $$P_1 + P_6 = \frac{3}{4}\frac{l}{h}P.$$

Ist eine Innenlast q vorhanden, dann ist in den Formeln für $P_4$. $P_5$ und $P_6$ noch Q zu P zu zählen, es wird dann, wie oben

(97c) . . . . $$P_1 = \frac{P}{4}\frac{l}{h},\ P_2 = \frac{P}{4h}\sqrt{l^2 + 4h^2},$$

hingegen

(97d) . . . $$P_4 = (P + Q)\frac{l}{2h},\ \text{die Druckkraft in tp,}$$

(97e) $$P_2 + P_5 = \frac{P}{2h}\sqrt{l^2 + 4h^2} + \frac{P+Q}{2h}\sqrt{l^2 + 4h^2} = \frac{2P+Q}{2h}\sqrt{l^2 + 4h^2},$$

die Zugkraft in tr

(97f) $$P_1 + P_6 = \frac{P}{4}\frac{l}{h} + \frac{P+Q}{2}\frac{l}{h} = \left(\frac{3}{2}P + Q\right)\frac{l}{2h}.$$

Ausser dieser ist aber der Träger noch einer biegenden Kraft unterworfen, welche Momente sich aus den gleichmässigen Belastungen nach dem früheren ergeben. Hauptsächlich ist es das Moment in mn, (Gl. 53a).

(97g) . $$M = \frac{q}{8}(l - 2l_1),\ \text{sicherer noch } M = \frac{ql}{8},$$

welches eine Durchbiegung des Trägers veranlassen würde.

**Beispiel.** Auf einen Binder reduciert, sei $P = 1000$ Klg. und $q = 500$ auf tr gleichmässig verteilt; $h = 4^m$, $l = 6^m$, $H = 2^m$.

Aus $H : h = l_1 : \frac{l}{2}$ folgt $l_1 = \frac{Hl}{2h} = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 4} = 1{,}5^m$.

Man findet ohne Rücksicht auf q

$$P_1 = \frac{P}{4}\frac{l}{h} = \frac{1000}{4}\frac{6}{4} = 375 \text{ Klg.}$$

$$P_2 = \frac{P}{4h}\sqrt{l_2 + 4h^2} = \frac{1000}{4 \cdot 4}\sqrt{6^2 + 4 \cdot 4^2} = 625 \text{ Klg.}$$

$$P_4 = P\frac{l}{2h} = 1000\frac{6}{2\cdot 4} = 750 \text{ Klg.}$$

$$P_2 + P_5 = \frac{3}{4}\frac{P}{h}\sqrt{l^2 + 4h^2} = \frac{3}{4}\frac{1000}{4}\sqrt{6^2 + 4\cdot 4^2} = 1875 \text{ Klg.}$$

$$P_1 + P_6 = \frac{3}{4}P\frac{l}{h} = \frac{3}{4}1000\frac{6}{4} = 1125 \text{ Klg.}$$

Berücksichtigt man q, dann wird zunächst

$$Q = \frac{q}{8}\frac{l}{l_1} = \frac{500}{8}\frac{6}{1,5} = 250 \text{ Klg., somit}$$

$$P_5 = \frac{1000 + 250}{2\cdot 4}\sqrt{6^2 + 4\cdot 4^2} = 1562.$$

$$P_6 = (1000 + 250)\frac{6}{2\cdot 4} = 940 \text{ Klg.}$$

Die Kräfte in po, pt und tr ändern sich jetzt; man findet

$$P_4 = 1250\frac{6}{2\cdot 4} = 940.$$

$$P_2 + P_5 = 625 + 1562 = 2187 \text{ Klg.}$$

$$P_1 + P_6 = 375 + 940 = 1315 \text{ Klg.}$$

Das grösste Biegungsmoment in tr ist

$$M = \frac{ql}{8} = \frac{500\cdot 6}{8} = 375 \text{ Klgmeter.}$$

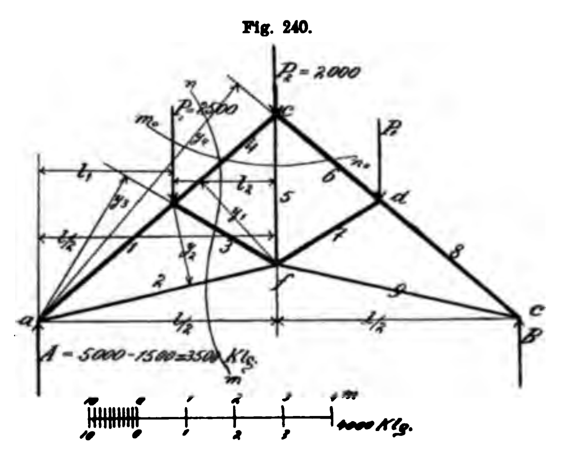
---

5) Die Dachsparren in dem nächstfolgenden Dachstuhl, Fig. 240, sind nicht in der Mitte unterstützt, sondern in dem Verhältnis

$$ab : bc = 3 : 2$$

geteilt, so dass die Knotenpunktsbelastung in bc und d nicht gleichmässig angenommen werden kann.

Fig. 240.




Die Figur 240a stellt die gleichmässige Verteilung des Dachstuhles dar mit zusammen 10000 Klg., es kommen sonach auf c

$$P_2 = \frac{2000}{2} + \frac{2000}{2} = 2000 \text{ Klg.,}$$

auf b und d

$$P_1 = \frac{3000}{2} + \frac{2000}{2} = 2500 \text{ Klg.}$$

In A und B wirken je 5000 Klg., von denen die Hälfte der gleichmässig verteilten 3000 Klg. abgehen, so dass für

$$A = B = 5000 - 1500 = 3500 \text{ Klg.}$$

Fig. 240 a.

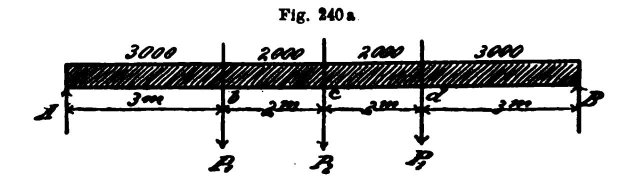
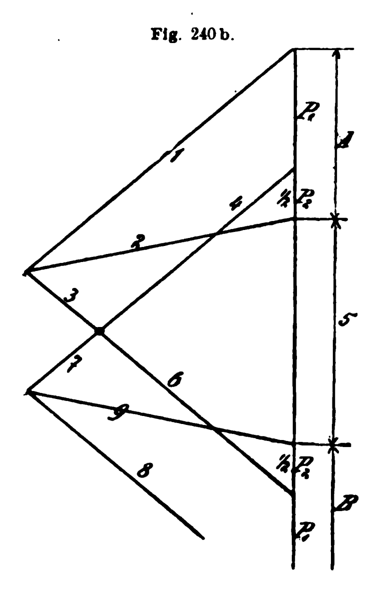



Fig. 240 b.



bleiben. Auf die graphische Verteilung der Kräfte, Fig. 240b, kommen wir später zurück. Wir haben auch hier die Druckstreben mit starken, die Ketten- oder Zugstreben mit schwachen Linien angegeben. Die Spannweite ist, wie aus dem Massstab zu ersehen, 10m.

Wir benötigen die Berechnung von fünf Streben, da die andern symmetrisch liegen; die Kräfte in den Streben seien $p_1 \cdots p_9$.

Schneidet man die Strebe 2 und betrachtet b als Drehpunkt, dann erhält man die Gleichung, wenn $y_1 \perp af$,

$$A l_1 = p_1 y_2, \text{ woraus}$$

$$p_2 = \frac{A l_1}{y} = \frac{3500 \cdot 3}{1,75} = 6000 \text{ Klg.}$$

Den Knotenpunkt f als Drehpunkt betrachtet, erhält man die Strebe ab geschnitten, wenn $y_2 = 2,4$ senkrecht durch f auf die Kraftrichtung von ab, die Bedingung, um ab vor Druck zu schützen

$$A l/2 = y_1 p_1, \text{ aus welcher } p_1 = \frac{A l/2}{y_1} = \frac{3500 \cdot 5}{2,4} = 7300 \text{ Klg.}$$

Verlegt man den Schnitt zwischen b und c, so lässt sich die Kraft in (4) finden, es wirken hierbei die äussern Kräfte $P_1$ und A an ihren betreffenden Hebelarmen $l_2$ und $l/2$, während $p_4$ an $y_1$ angreift.

Die Momentengleichung ist

$$Al/2 = P_1 l_2 + p_4 y_1 \text{ und}$$

$$p_4 = \frac{Al/2 - P_1 l_2}{y_1} = \frac{3500 \cdot 5 - 2500 \cdot 2}{2,4} = 5000 \text{ Klg. abg.}$$

Den Drehpunkt nach a verlegt und erst nach mn geschnitten, erhält man die Gleichung

$$P_1 l_1 + p_3 y_3 = 0, \text{ somit}$$

$$p_3 = - \frac{2500 \cdot 3}{3,6} = - 2100 \text{ Klg.};$$

den Schnitt aber durch $m_0 n_0$ gelegt gedacht, findet man

$$P_1 l_1 + p_6 y_4 + p_5 l/2 = 0.$$

Die Hebelarme wieder aus der Zeichnung entnommen $y_4 = 6,3$, $l/2 = 5$, $l_1 = 3$, und da wegen der Symmetrie des Binders $p_6 = p_4 = 5000$, folgt

$$p_5 = \frac{-7500 + 32\,760}{5} = 4700 \text{ Klg. Zugkraft.}$$

6) Das in Fig. 238 (und Fig. 238a) dargestellte doppelte Polonceaudach sei pro Binder mit 7000 Klg. belastet, so dass auf jeden Knotenpunkt b, d, f, h ... P = 1000 Klg. gleichmässig verteilt kommen und jedes Auflager mit A = B = 3500 Klg. Reaktionsdruck entgegen wirken muss. (S. d. Figur S. 249.)

Es handelt sich nun auch hier um die Bestimmung der Kräfte in den Streben. Die äusseren lassen wir wieder senkrecht einwirken, und werden erst später auf seitlich wirkende Kräfte zurückkommen, wenn solche in Rücksicht gezogen werden müssen. Aus dem der Figur beigegebenen Massstab sind die Längen der Hebelarme der äusseren und inneren Kräfte bezogen auf die einzelnen Drehpunkte zu entnehmen, die wir wieder mit x und y bezeichnet haben; die inneren Kräfte seien $p_1 p_2$ .......

a) Drehpunkt b, Schnitt der Strebe (2) bei c.

$$A x_1 = p_2 y_1 \text{ oder}$$

$$3500 \cdot 2,9 = p_2\, 1,5, \text{ somit } p_2 = \frac{3500 \cdot 2,9}{1,5} = 7000 \text{ Klg. abg.}$$

b) Drehpunkt c, Schnitt der Strebe (1).

$$A x_2 = p_1\, \overline{bc} \text{ oder } 3500 \cdot 3,8 = p_1\, 1,6, \text{ somit } p_1 = 8300 \text{ Klg.}$$

Der Hebelarm $\overline{bc}$ der Kraftrichtung in ab fällt mit der Druckstrebe bc zusammen, da er $\perp$ ab durch c gehen muss.

Die Kraft in b wirkt nach A und nach c als Druckkraft, sucht also die Streben (1) und (3) zu zerknicken, während sie von c auf die Streben

(2) und (5) ziehend wirkt. Obige beiden Momentengleichungen müssen also, A als positive Kraft angenommen, heissen

$$Ax_1 + p_2 y_1 = 0 \text{ und } Ax_2 - p_1 \overline{bc} = 0,$$

woraus $p_2$ negativ, als Druckkraft, resultiert.

c) Drehpunkt a, Schnitt $m_1 n_1$.

Die Hebelarme der Schnittstreben (4) und (2) sind Null, somit, weil P in Richtung $p_3$ wirkt

$$Px_1 + p_3 \overline{ab} = 0, \text{ oder}$$
$$1000 \cdot 2{,}9 + p_3\, 3{,}5 = 0, \text{ woraus}$$
$$p_3 = -\frac{1000 \cdot 2{,}9}{3{,}5} = 830 \text{ Druck.}$$

d) Drehpunkt d, Schnitt der Strebe (6) bei e.

$$Ax_3 - Px_4 = p_6 y_2, \text{ oder}$$
$$3500 \cdot 6 - 1000 \cdot 3 = p_6 \cdot 3, \text{ woraus } p_6 = 6000 \text{ Klg.}$$

e) Drehpunkt a, Schnitt bei $m_1 n_2$. Hier kommt nur die Zugstange cd in Betracht.

$$Px_1 = p_5 y_3, \text{ oder}$$
$$1000 \cdot 2{,}9 = p_5\, 2{,}8,\ p_5 = \frac{1000 \cdot 2{,}9}{2{,}8} = 1040 \text{ Klg.}$$

f) Drehpunkt c, Schnitt $m_2 n_2$.

$$Ax_2 - Px_5 + p_4\, tc = 0. \text{ Aus}$$
$$3500 \cdot 3{,}8 - 1000 \cdot 0{,}9 + p_4\, 1{,}6 = 0, \text{ erhält man}$$
$$p_4 = 7700 \text{ Klg. Druck.}$$

g) Drehpunkt e, Schnitt bei d oder $m_2 n_2$.

$$Ax_6 - P(x_6 - x_1) + p_4 \overline{de} + p_5 y_4 = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung $x_6 = 8$, $\overline{de} = 3{,}4$, $y_4 = 3{,}1$ aus der Zeichnung entnommen, dann erhält man nahezu auch $p_4 = 7700$ Klg. Die Abweichungen liegen an der Ungenauigkeit der im sehr kleinen Massstab ausgeführten Zeichnung.

h) Drehpunkt h, Schnitt bei i.

$$A\, l/2 - P(l/2 - x_1) - P(l/2 - x_3) - P(l/2 - x_7) = p_{27} \overline{ih}, \text{ oder}$$
$$A\, l/2 - P[\tfrac{3}{2} l - (x_1 + x_3 + x_7)] = p_{27}\, 6{,}8.$$

$l/2 = 12{,}3^m$ und die obigen Zahlen für $x_1 x_3$, sowie $x_7 = 9{,}1^m$ eingesetzt, resultiert $p_{27} = 3550$ Klg.

i) Drehpunkt d, Schnitt bei $m_4 n_4$

$$Ax_3 - Px_4 = p_{10}\, y_6 = p_{27}\, y_7 \text{ oder}$$
$$3500 \cdot 6 - 1000 \cdot 3 = p_{10} \cdot 3 - 3550 \cdot 2{,}8, \text{ hieraus folgt}$$
$$p_{10} = 2800 \text{ Klg.}$$

k) Drehpunkt g, Schnitt $m_4 n_4$

$A x_8 - P(x_8 - x_1) - P(x_8 - x_3) = p_{27} y_8 - p_8 \overline{fg}$ oder, weil $\overline{fg} = \overline{bc}$,
$3500 \cdot 10 - 1000\,[(7{,}2 + 4)] = 3550 \cdot 3{,}5 - p_8\, 1{,}6$, somit
$p_8 = 7000$ Klg.

l) Drehpunkt e, Schnitt durch 8 und 9

$A x_6 - [P(x_6 - x_1) + P(x_6 - x_3)] = p_8 \overline{de} + p_9 y_9$, oder
$3500 \cdot 7{,}6 - 1000\,[4{,}7 + 1{,}6] = 7000 \cdot 3{,}4 + p_9\, 3{,}0$, also
$p_9 = 1100$ Klg.

m) Drehpunkt $a_1$, Schnitt bei $n_3 m_3$.

Infolge der Symmetrie des Binders sind offenbar die Kräfte gleich in (23) und (6), (20) und (7), (18) und (9), (17) und (8); rechtsseitig ist somit

$P x_1 + P x_3 - p_{20} \overline{a_1 d_1} + p_{18} y_5 = 0$, bezw.
$1000\,(2{,}9 + 6) - p_7\, 7{,}2 + 1100 \cdot 3{,}3 = 0$, sonach wird
$p_7 = 1700$ Klg.

n) Drehpunkt a, Schnitt $m_5 n_5$

$P x_1 + P x_3 + P x_7 = p_{12} \cdot 0 + p_{13} y_{10} - p_{27} \overline{ik}$,
$1000\,(2{,}9 + 6 + 9{,}1) = p_{13} \cdot 6 - 3550 \cdot 1$, hieraus erhält man
$p_{13} = 3600$ Klg.

o) Drehpunkt g, Schnitt $m_5 n_5$

$A x_8 - [P(x_8 - x_1) + P(x_8 - x_3) + P x_3] + p_{12}\, fg - p_{27} y_8 = 0$,
oder

$3500 \cdot 10 - 1000\,(7{,}2 + 4{,}0 + 0{,}9] - 3550 \cdot 3{,}5 + p_{12}\, 1{,}6 = 0$,
sonach

$p_{12} = 6500$ Klg. Druckkraft.

p) Die Druckkraft in (11) hat denselben Wert, wie in (3), weil in f und b dieselben Zerlegungen in die Streben (8) und (11) bezw. (1) und (3) von den gleichen Kräften $P = 1000$ vorgenommen werden können.

---

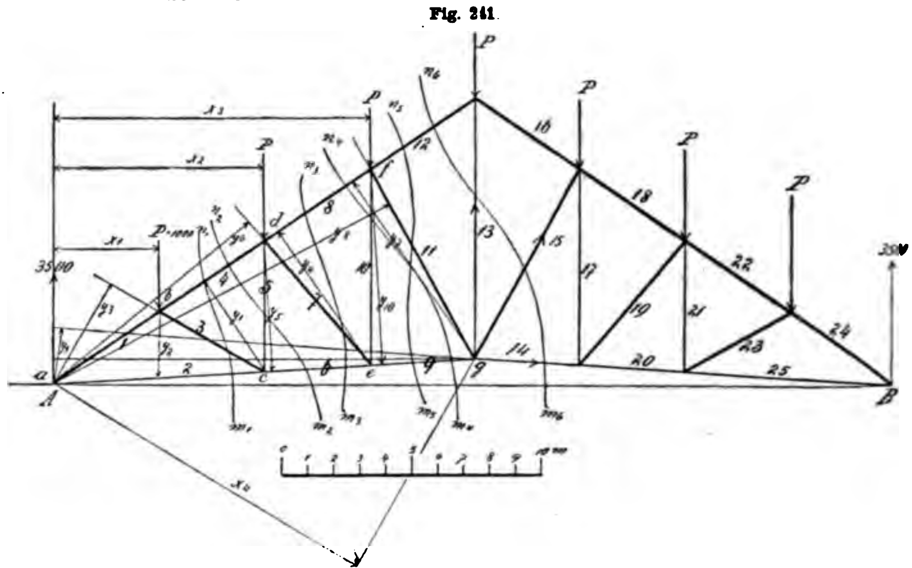
7) Wir haben in Fig. 241 einen englischen Dachstuhl von $32^m$ Spannweite mit der gleichen Last wie den erweiterten Polonceaubinder, Fig. 238, belastet, und wollen im folgenden die Grösse der inneren Kräfte zu ermitteln suchen.

Auf jedem der sieben Knotenpunkte sei die Last $P = 1000$ Klg., so dass jedes der Auflager mit $\frac{7 \cdot 1000}{2} = 3500$ Klg. entgegendrückt.

Die Kräfte in den Streben sind wieder $p$, $p_2$, $p_3$ . . . , während wir in der Fig. die Streben selbst mit den betreffenden Zahlen bezeichnet haben.

Auf die graphische Verteilung der Kräfte, wie solche in Fig. 241a dargestellt ist, wollen wir erst später zurückkommen. Die Hebelarme x . . . y . . . sind aus dem beigegebenen Massstab zu entnehmen. Die Druckstreben, welche also eventuell zerknickt werden könnten, haben wir wieder durch stärkere Linie markirt als die Zugstreben, die durch Ketten ersetzt werden könnten.

Fig. 241.



a) Drehpunkt b; Schnitt durch die Strebe (2). $x_1$, senkrecht auf die Kraftrichtung A, $y_2$ senkrecht zur Richtung der Kraft in (2), beide durch den Drehpunkt gehend.

$$A x_1 = p_2 \; y_2 \text{ oder}$$

$$3500 \cdot 4 = p_2 \; 2{,}5, \text{ wonach } p_2 = \frac{3500 \cdot 4}{2{,}5} \; 5600 \text{ Klg. Zug.}$$

A zieht an der Stange ag, drückt hingegen in Richtung ad.

b) Drehpunkt c, Schnitt der Strebe (1).

$$A x_1 + p_1 \; y_1 = 0, \text{ oder}$$

$$-3500 \cdot 8 = p_1 \; 4{,}1; \; p_1 = -\frac{3500 \cdot 8}{4{,}1} = -6800 \text{ Klg. Druck.}$$

c) Drehpunkt a, Schnitt $m_1 \; n_1$.

$$-P x_1 = p_3 \; y_3, \text{ oder}$$

$$-3000 \cdot 4 = p_3 \; 4{,}3; \; p_3 = 930 \text{ Klg. Druck.}$$

d) Drehpunkt c, Schnitt der Strebe (4).

$$0 = A x_2 - P\,(x_2 - x_1) + p_4 \; y_1, \text{ oder}$$

$$3500 \cdot 8 - 1000 \; (8 - 4) = p_4 \; 4{,}1; \; p_4 = -5800 \text{ Klg. Druck.}$$

e) Drehpunkt a, Schnitt $m_2 n_2$.

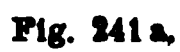
$- P x_1 + p_5 x_2 = 0$, oder

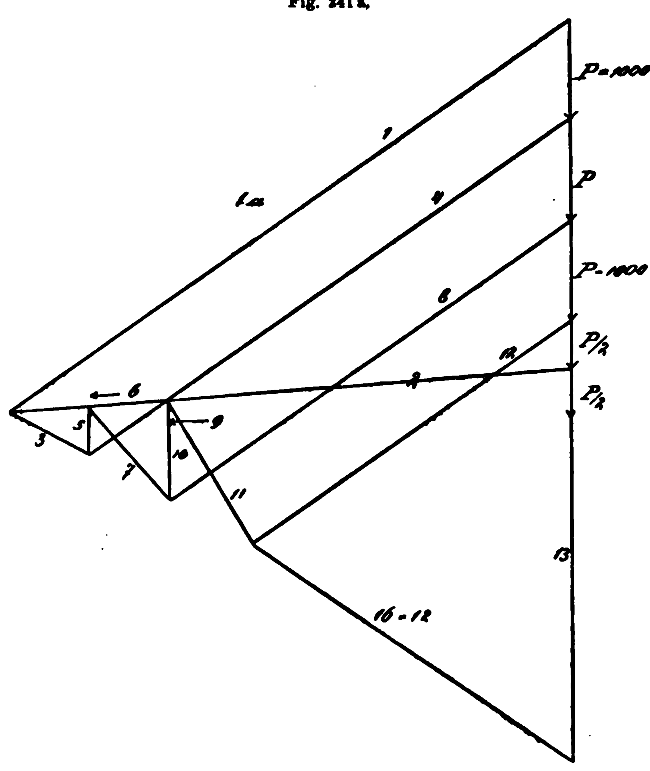
$- 1000 \cdot 4 + p_5 \cdot 8 = 0$, woraus $p_5 = \frac{1000 \cdot 4}{8} = 500$ Klg. Zug.

f) Drehpunkt e, Schnitt durch (8).

$A x_1 - P (x_3 - x_3) - P (x_3 - x_2) + p_8 y_4 = 0$, oder

$0 = 3500 \cdot 12 - 1000 [8 + 4] + p_8 6; p_8 = - 5000$ abg. Druck.


Fig. 241 a.




g) Drehpunkt d, Schnitt durch (6).

$A x_2 - P (x_2 - x_1) = p_6 y_5$, oder

$3500 \cdot 8 - 1000 \cdot (8 - 4) = p_6 4{,}8; p_6 = 5000$ Zug. abg.

h) Drehpunkt a, Schnitt $m_3 n_3$.

$- P x_1 - P x_2 = p_7 y_6$, bezw.

$- 1000 (4 + 8) = p_7 9{,}5; p_7 = - 1260$ Klg. Druck.

i) Drehpunkt a, Schnitt $m_4 n_4$.

$- P x_1 - P x_2 - p_{10} x_3 = 0$.

$1000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 12 \cdot p_{10}; p_{10} = 1000$ Klg. Zug.

k) Drehpunkt f, Schnitt durch (9).

$$A x_3 - P(x_3 - x_1) - P(x_3 - x_2) = p_9 y_{10}$$

$$3500 \cdot 12 - 1000(12 - 4) - 1000(12 - 8) = 7{,}5\ p_9;$$

$$p_9 = 4000 \text{ Klg. Zug.}$$

l) Drehpunkt g, Schnitt durch (12).

$$A\, l/2 - [P(l/2 - x_1) + P(l/2 - x_2) + P(l/2 - x_3)] + p_{12}\, y_7 = 0$$

$$3500 \cdot 16 - 1000[12 + 8 + 4] = -8{,}2 p_{12};\ p_{12} = -3900 \text{ Druck.}$$

m) Drehpunkt a, Schnitt $m_5\ n_5$.

$$p_{11}\, y_8 = -(P x_1 + P x_2 + P x_3) = -1000 \cdot 4 - 1000 \cdot 8 - 1000 \cdot 12.$$

$$p_{11} = -\frac{24\,000}{14{,}2} = -1700 \text{ Klg. Druckkraft.}$$

n) Drehpunkt a, Schnitt $m_6\ n_6$.

$$-P x_1 - P x_2 - P x_3 - p_{15}\, x_4 - p_{14}\, y_9 + p_{13}\, l/2 = 0$$

$$1000(4 + 8 + 12) + 1700 \cdot 13{,}3 + 4000 \cdot 1{,}9 = p_{13} \cdot 16, \text{ woraus}$$

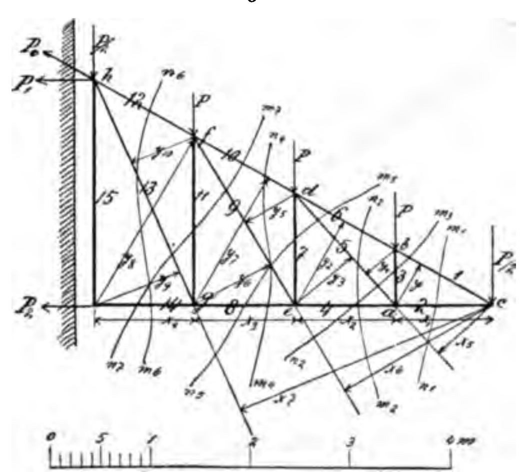
$$p_{13} = 3400 \text{ Klg. Zug.}$$

Wir haben hier $p_{14} = p_9$ und $p_{15} = p_{11}$ gesetzt.

---

8) Wir schliessen Fig. 242 noch einen freihängenden Dachstuhl an, wie er als eiserner Dachstuhl jetzt vielfach auf Bahnhöfen als Perrondachstuhl verwendet wird.

Fig. 242.



Das Dach sei gleichmässig belastet, so dass sich die Einzellasten in den Knotenpunkten, wie in der Figur verzeichnet, verteilen. Die Ausladung sei 4$^m$, die Verteilung der Einzellast ergiebt sich aus der gleichmässigen Verteilung, entsprechend der Fig. 240a, an den Endpunkten

$$P/2 = 500$$

in den mittleren Knotenpunkten $P = 1000$ Klg.

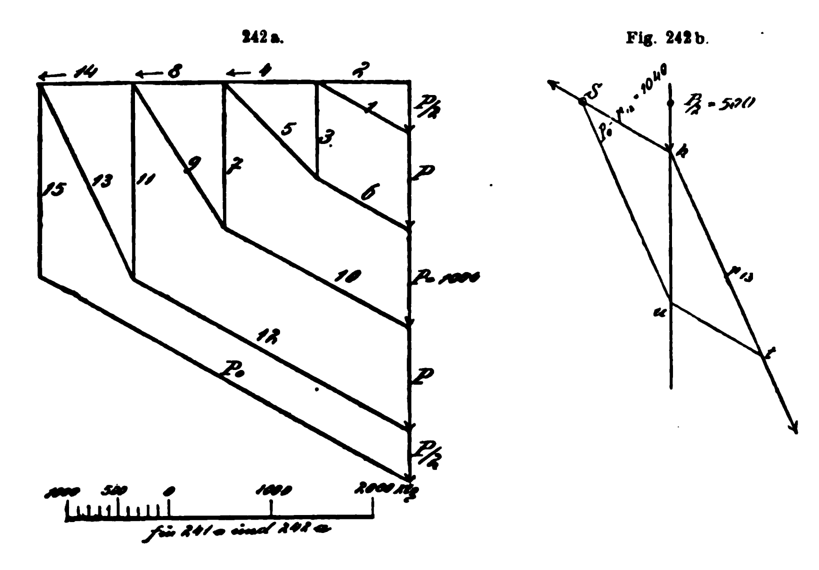
Die senkrechten Streben ab, ed, fg und hi sind Druckstreben, ebenso muss auch ic eine steife Stange sein, hingegen können hg, fe, da und hc durch Ketten ersetzt werden, sind Zugstangen.

Die Bezeichnung der Hebelarme und Drehpunkte ist gleichlautend wie in vorigen Dachstühlen durchgeführt.

a) Drehpunkt a, Schnitt durch (1).

$0 = P/2\, x_1 - p_1\, y_1$, die Kraft in (1) wirkt P/2 entgegen, somit

$500 \cdot 1 = p_1\, 0{,}5;\ p_1 = \frac{500}{0{,}5} = 1000$ Klg. Zugkraft.



242 a. Fig. 242 b.

b) Drehpunkt b, Schnitt durch (2).

$P/2\, x_1 + p_2\, \overline{ab} = 0$

$500 \cdot 1 = -p_2\, 0{,}55;\ p_2 = -\frac{500}{0{,}55} = -900$ Klg. Druck.

c) Drehpunkt d, Schnitt durch (4).

$P/2\,(x_1 + x_2) + P x_2 + p_4\, \overline{ed} = 0$, oder

$500 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 + p_4\, 1{,}1 = 0;\ p_4 = -\frac{2000}{1{,}1} = -1800$ Klg.

d) Drehpunkt b, Schnitt $m_2\ n_2$.

$P/2\, x_2 = y_4\, p_5 + \overline{ab}\, p_4$, oder

$500 \cdot 1 = 0{,}37\ p_5 + 0{,}55 \cdot 1800$, woraus folgt

$p_5 = 1330$ Klg.

e) Drehpunkt e, Schnitt $m_2\ n_2$ durch (6).

$P/2\,(x_1 + x_2) + P x_2 = p_6\, y_2 + p_4 \cdot 0 + p_5\, y_3$, oder

$500 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = p_6\, 0{,}95 + p_5\, 0{,}7 = 0{,}95\, p_6 + 0{,}7 \cdot 1330;$

hieraus findet man $p_6 = 1100$ Klg.

f) Drehpunkt c, Schnitt $m_3\ n_3$.

$P x_2 + p_8 x_2 = p_1 y_2 + p_5 y_3$

$1000 \cdot 1 + p_8 \cdot 1 = 1000 \cdot 0{,}95 + 1330 \cdot 0{,}7$

$p_8 = -880$ Klg.

g) Drehpunkt f, Schnitt durch die Strebe (8).

$P/2\,(x_1 + x_2 + x_3) + P\,(x_2 + x_3) + P x_3 + p_8\,\overline{fy} = 0$

$500 \cdot 3 + 1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 + 1{,}7 \cdot p_8 = 0$; man findet

$p_8 = -2650$.

h) Drehpunkt d, Schnitt $m_4\ n_4$.

$P/2\,(x_1 + x_2) + P x_2 = p_9\, y_5 + p_8\,\overline{ed}$,

$500 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = 0{,}55\, p_9 + 1{,}1 \cdot 2650$; somit

$p_9 = 1670$ Klg.

i) Drehpunkt g, Schnitt $m_4\ n_4$.

$P/2\,(x_1 + x_2 + x_3) + P\,(x_2 + x_3) + P x_3 = p_9\, y_6 + p_{10}\, y_7$

$500 \cdot 3 + 1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = 1670 \cdot 0{,}9 + p_{10}\ 1{,}45$; es wird

$p_{10} = 2080$.

k) Drehpunkt c, Schnitt $m_5\ n_5$.

$P x_1 = p_7\,(x_1 + x_2) + p_5\, x_5 + p_9\, x_6$

$1000 \cdot 1 = p_7 \cdot 2 + 1330 \cdot 0{,}75 + 1670 \cdot 1{,}7$; hieraus

$p_7 = -1400$ Klg.

l) Drehpunkt h, Schnitt 14.

$$P/2\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + P\,(x_2 + x_3 + x_4) + P\,(x_3 + x_4) + P x_4 + p_{14}\,\overline{ih}$$

$500 \cdot 4 + 1000\,(3 + 2 + 1) + 2{,}25 \cdot p_{14} = 0$;

$$p_{14} = -\frac{8000}{2{,}25} = -3560 \text{ Klg.}$$

m) Drehpunkt f, Schnitt $m_6\ n_6$.

$P/2\,(x_1 + x_2 + x_3) + P\,(x_2 + x_3) + P x_3 = p_{13}\, y_{10} + p_{14}\,\overline{fg}$

$500 \cdot 3 + 1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = 0{,}7\, p_{13} + 1{,}7 \cdot 3560$, hiernach

$p_{13} = 2200$ Klg.

n) Drehpunkt i, Schnitt $m_6\ n_6$.

$$P/2\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + P\,(x_2 + x_3 + x_4) + P\,(x_3 + x_4) + P x_4 = p_{13}\, y_9 + p_{12}\, y_8,$$

$$500 \cdot 4 + 1000 \cdot 3 + 1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = 0{,}9\, p_{13} + 2 \cdot p_{12} = 0.9 \cdot 2200 + 2 \cdot p_{12}$$

$p_{12} = 3040$ Klg.

o) Drehpunkt c, Schnitt $m_7\ n_7$; hier kommen die drei Kräfte in

(9), (11) und (13) in Betracht, da die Momente in den andern Null werden.

$P(x_1 + x_2) + Px_1 + p_{11}(x_1 + x_2 + x_3) = p_{13} x_7 + p_9 x_6$
$1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 + p_{11} \cdot 3 = 2200 \; 2 . 7 + 1670 = 1{,}7$
$p_{11} = -2000$ Klg. abg.

Denkt man sich die ganz gleichmässig verteilte Last $4 \cdot P = 4000$ Klg. auf ic liegen, und betrachtet h als Drehpunkt, so wirkten die 4000 Klg. als vereinzelte Last am Schwerpunktshebelarm $x_4 + x_3 = \text{ie}$. Aus der Momentengleichung $P_2 \overline{\text{ih}} + \text{ie} . 4000 = 0$, oder $2{,}25 \cdot P_2 + 2 \cdot 4000 = 0$ findet man dann

$$P_2 = -\frac{8000}{2{,}25} = -3560 \text{ Klg.}$$

Diese Kraft ist natürlich so gross wie die (14), wie $p_{14}$ und muss entgegegengesetzt wie in der Figur angegeben wirken, oder umgekehrt die Mauer muss an dieser Stelle den Druck 3560 Klg. aushalten. Eine horizontale Kraft $P_1$ in h angebracht, hat dieselbe Grösse.

Die in Richtung hc anzubringende Befestigung, durch die Aussenkraft $P_0$ angedeutet, steht in demselben Verhältnis zu $P_1$ wie hc zu ic, so dass

$$P_0 : P_1 = \overline{\text{hc}} : \overline{\text{ic}}, \text{ oder}$$
$$P_0 : 3560 = 4{,}59 : 4, \text{ woraus man findet}$$
$$P_0 = \frac{3560 : 4{,}59}{4} = 4080 \text{ Klg.}$$

Es bleiht uns noch übrig die Kraft in (15) zu bestimmen.

Von den beiden Befestigungen des Dachgerüstes in h genügt es eine in Anwendung zu bringen, und zwar $P_0$. Dieser Kraft entgegen wirkt $p_{12}$. Trägt man sich um h Fig. 242b die Differenzkraft

$$P_0 - p_{12} = 4080 - 3040 = 1040 \text{ Klg. in Richtung sh} \parallel P_0,$$

die Kraft in (13) $p_{13} = \text{ht} = 2200$ Klg. und $P/2 = 500$ Klg. $\parallel$ nh auf, so bilden $\overline{\text{sh}}$ und ht die Resultante $\overline{\text{hu}}$; sie ist aus der Zeichnung entnommen 1500 Klg., addiert man hierzu $P/2 = 500$ Klg., dann ist die Strebe $\overline{\text{hi}}$ auf die Kraft $p_{15} = 1500 + 500 = 2000$ Klg. beansprucht.

**VI.** Gleichgewicht und Kräfteverteilung in senkrechten Gerüstpfeilern.

1) Die Fig. 243 stellt ein Baugerüst als Provisorium oder einen Fachwerkspfeiler für eine Brücke dar, welcher sowohl einem senkrechten Druck als auch einer seitlich wirkenden Kraft Widerstand leisten soll.

Die vier nahezu senkrechten Eckstreben sind in gewissen Entfernungen durch horizontale Balken (1) (3) (5) (7) verbunden und übernehmen den senkrechten Druck. Um eine seitliche Verschiebung zu vermeiden, oder wie schon angedeutet, um einer auf den Pfeiler einwirkenden Seitenkraft Widerstand zu leisten, sind von allen vier Seiten Kreuze eingespannt. Die von rechts nach links wirkende Seitenkraft W übt in (1) einen Druck aus, welcher sich von b nach a fortpflanzt, in a greift die Seitenstrebe,

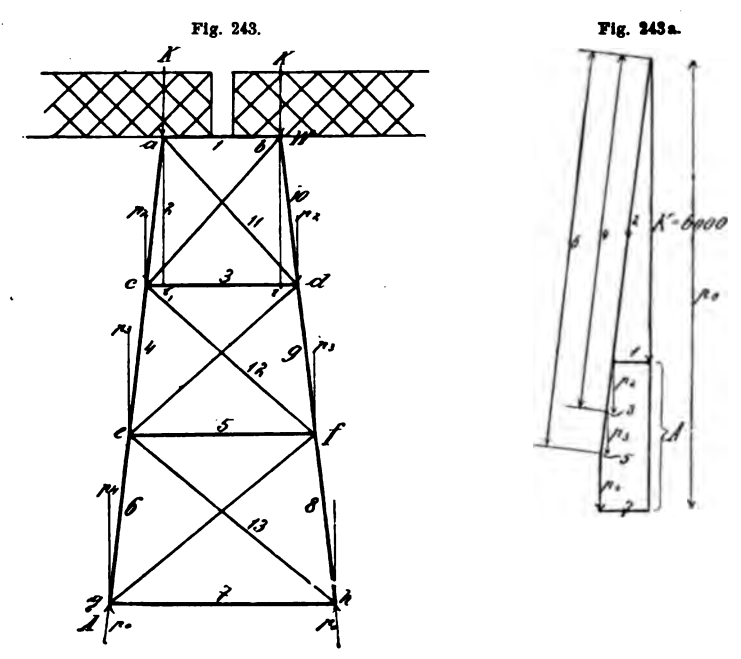



Fig. 243. Fig. 243a.

Zugstange ad = (11) an und überträgt die Seitenkraft nach (3) und so fort von d nach c durch (12) nach (f) bis in die untersten Streben. Die Zugstangen $\overline{\text{cb}}$, ed, gf kommen hierbei ausser Betracht, sie würden wenn (11)(12)(18) nicht vorhanden, zusammengeknickt werden, hingegen kommen sie zur Geltung, sobald eine Seitenkraft in a von links nach rechts wirkt.

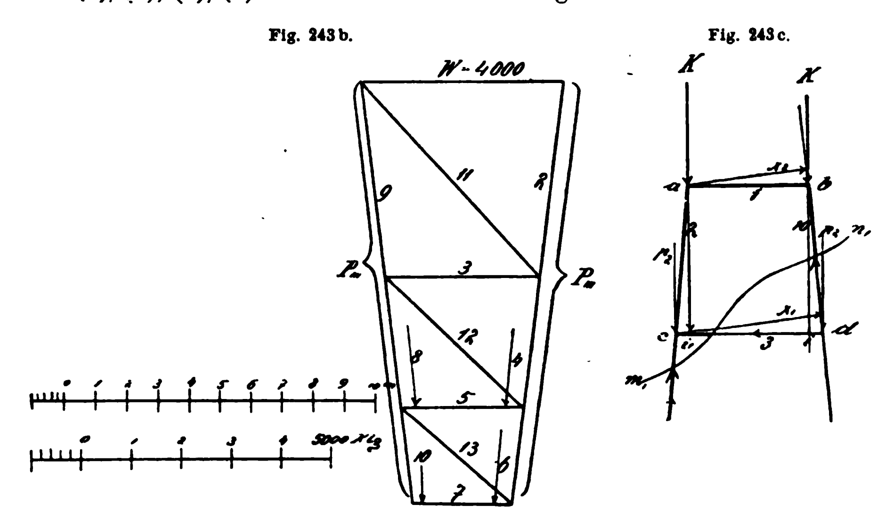
Genau so verhalten sich die Kreuze, welche senkrecht auf die Bildfläche der Zeichnung eingespannt gedacht werden müssen, zu ihren im gleichen Sinn wirkenden Kräften.

Das Gerüst, Fig. 243, diene als Stützpunkt zweier Brückenträger; jede Eckstrebe ag, bh habe einen senkrechten Druck (Eigengewicht und zufällige Last der Brücke) von K = 6000 Klg. auszuhalten; das Eigengewicht des Gerüstes verteile sich so, dass auf jedem Knotenpunkt $p_2 = p_3$

$= p_4 = 1000$ Klg. kommen. Wir wollen vorläufig von einer Seitenkraft absehen und die Kräfte in den Druckstreben (1), (2), (10), (4), (5), (9), (6), (7), (8) bestimmen, von denen, wie leicht zu übersehen $P_2 = P_{10}$, $P_4 = P_9$, $P_6 = P_8$ infolge der symmetrischen Verteilung der äusseren Kräfte sein müssen, wenn wir die Kräfte mit P in den Streben bezeichnen. Die senkrechten Fundamentkräfte sind selbstredend $P_0 = 6000 + p_2 + p_3 + p_4 = 6000 + 3000 = 9000$ Klg.

(1), (3), (5), (7) müssen steife Verbindungsbalken sein.

Fig. 243 b. Fig. 243 c.




a) Wählt man zunächst d als Drehpunkt, so wirkt (s. Fig. 243c) K an id, die Kraft in (1) $P_1$ an ib, folglich ist

$$K \cdot \overline{id} = P_1 \overline{ib},$$

id und ib aus der Zeichnung entnommen, findet man

$$P_1 = \frac{K \overline{id}}{ib} = \frac{6000 \cdot 0{,}56}{5} = 672 \text{ Klg.}$$

b) Drehpunkt c, Schnitt $m_1 n_1$, $x_1 \perp$ bd durch c.

$K ci + K ci_1 = P_{10} x_1$ oder

$6000 (4{,}56 + 0{,}56) = P_{10}\, 5{,}09$, woraus $P_{10} = 6150$ Klg.

c) Drehpunkt a, Schnitt $m_1 n_1$.

$K ii_1 - p_2 ci_1 + P_3 ai_1 = P_{10} x_2$.

Die Werte aus der Zeichnung*) entnommen,

$6000 \cdot 4 - 1000 \cdot 0{,}56 + P_3\, 5 = 6150 \cdot 3{,}98$, somit

$P_3 = 210$ Klg.

*) Wir verwandten eine solche in grösserem Massstab.

d) Drehpunkt c, Schnitt $m_2\, n_2$, Fig. 243d.

$P_9\, x_1 = K ci + K ci_1 + p_2\, cd$, oder

$P_9 \cdot 5{,}08 = 6000 \cdot 4{,}56 + 6000 \cdot 0{,}56 + 1000 \cdot 5{,}12$; hieraus

$P_9 = 7050$ Klg.

e) Drehpunkt a, Schnitt $m_3\, n_3$.

$K \cdot \overline{kk_1} - p_2\, ci_1 - p_3\, ek_1 + p_2\, i_1 d + P_5\, ak_1 = P_9\, x_2$, oder

$6000 \cdot 4 - 1000 \cdot 0{,}56 - 1000 \cdot 1{,}12 + 1000 \cdot 4{,}56 + P_5 \cdot 10 = 7050 \cdot 3{,}98$;

hieraus folgt $P_5 = 120$ Klg.

Fig. 243d.

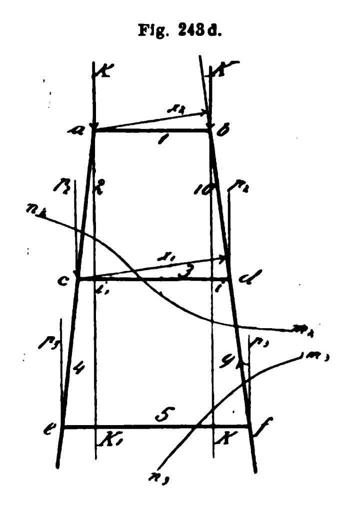
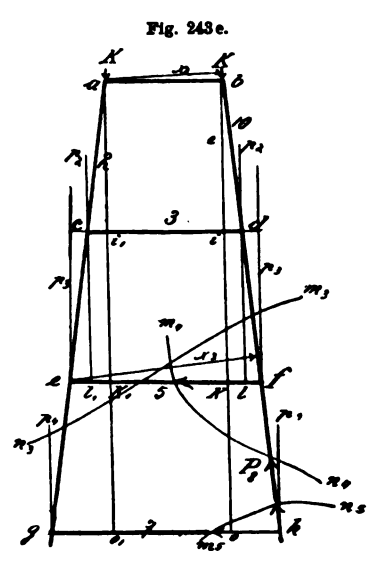


Fig. 243e.



f) Drehpunkt e, Schnitt $m_4\, n_4$, Fig. 243e.

$K ek_1 + K ek + p_2\, el_1 + p_2\, el + p_3\, ef = P_8\, x_3$

$6000 \cdot 1{,}12 + 6000 \cdot 5{,}12 + 1000 \cdot 0{,}56 + 1000 \cdot 5{,}68 + 1000 \cdot 6{,}24$
$= P_8 \cdot 6{,}2.$

Man findet abg. $P_8 = 8000$ Klg.

g) Drehpunkt a, Schnitt $m_5\, n_5$.

$P_0\, go_1 + K\, o_1 o - p_2\, ci_1 - p_3\, ek_1 - p_4\, go_1 + p_2\, i_1 d + p_3\, k_1 f + P_2\, ao_1$
$= P_8\, x_2$

$9000 \cdot 1{,}8 + 6000 \cdot 4 - 1000 \cdot 0{,}56 - 1000 \cdot 1{,}12 - 1000 \cdot 1{,}8$
$+ 1000 \cdot 4{,}56 + 1000 \cdot 5{,}12 + P_7\, 16 = 8000 \cdot 3{,}98.$

Hier kommt die Kraft $P_0$ mit in Betracht, welche auf g einwirkt, weil der Schnitt die Strebe ag nicht mehr erreichen kann, während bei den übrigen Drehungen um a die Schnitte $m_1\, n_1$ und $m_3\, n_3$ durch genannte Strebe führen müssen, eine Kraft bezw. ein Moment unterhalb der

geschnittenen Streben aber nicht mehr mitgerechnet werden kann, denn die Strebe geht durch den Drehpunkt a selbst. Man erhält aus der letzten Gleichung $P_2 = 900$ abger. —

Fig. 243f.

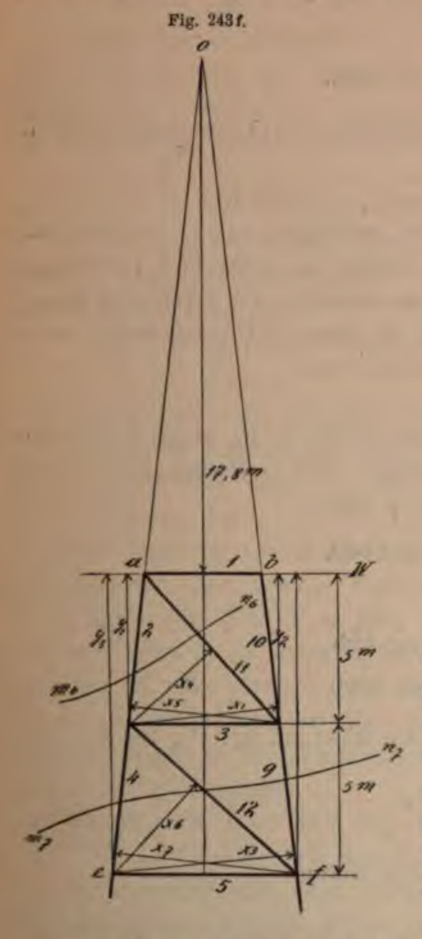
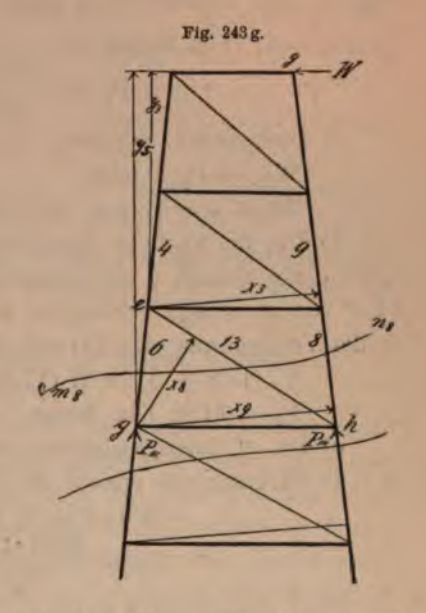


Fig. 243g.



Wir lassen nun W wirken und erhalten eine Reihe von Kräften, welche auch auf die bereits erwähnten Streben einwirken, zu deren Kräften also addiert werden müssen; ausserdem erhalten wir, wie schon angedeutet, in (11), (12) und (18) noch Zugkräfte, welche die diese kreuzenden Zugstangen übernehmen würden, wenn W von rechts nach links wirkt.

Wir haben W = 4000 Klg. angenommen und zwar konzentriert in b wirkend. Die Strebe (10) hat dann nichts auszuhalten, weil die 4000 Klg. durch die Strebe (1) auf den Knotenpunkt a einwirkt, an (11) zieht und zum Teil auf (2) drückt.

a) Es sei c der erste Drehpunkt, Fig. 243f, und wir legen nach $n_6\, m_6$ einen Schnitt, so wirkt die Kraft in (11) an $x_4$, W, also auch $P_1$ an $y_1$; man erhält die Gleichung $W y_1 = P_{11}\, x_4$, die Hebelarme eingesetzt $4000 \cdot 5 = P_{11}\, 3{,}8$, woraus sich $P_{11} = 5260$ ergiebt.

b) Drehpunkt d und die Strebe (2) durchschnitten, erhäft man $W y_2 = P_2 x_5$, die Kraft W würde das Dreieck abd um d gedreht herunter klappen, die widerstrebende Kraft in (2) ist $P_2 = \frac{W y_2}{x_5}$ oder weil $y_2 = y_1 x_5 = x_1$ (Fig. 243d)

$$P_2 = \frac{4000 \cdot 5}{5,1} = 3920.$$

c) Drehpunkt c, Schnitt $m_7$ $n_7$, die Hebelarme in (12) und (4) sind Null.

$W y_1 = P_9 x_1$ oder

$4000 \cdot 5 = P_9\ 5,1$, woraus $P_9 = P_2 = 3920$ Klg.

d) Um die Kraft in (3) zu erhalten, verlängern wir ac und bd und wählen den Schnitt o als Drehpunkt, welcher in senkrechter Entfernung 17,8^m von ab abliegt. Schneidet man das Gerüst bicd durch und bringt in der Verlängerung von (3) eine Kraft an, dann ist Gleichgewicht, wenn

$P_3\ (17,8 + 5) = W\ (17,8)$, woraus man

$P_3 = 3130$ Klg. findet.

e) Bei ef durchgeschnitten und eine Kraft in $P_5$ angebracht, oder in e in Richtung (5) ergiebt die Gleichung, wenn o Drehpunkt

$$W\ 17,8 = P_5\ (17,8 + 10),$$

$$P_5 = \frac{4000 \cdot 17,8}{27,8} = 2560.$$

Ganz gleichlautend ist aus

$$W\ 17,8 = P_7\ (17,8 + 16),$$

$$P_7 = \frac{4000 \cdot 17,5}{33,8} = 2100.$$

f) Drehpunkt e, Schnitt $m_7$ $n_7$. $P_9$ wirkt an $x_3$, $P_{12}$ an $x_6$; der Hebelarm von $P_4$ ist Null.

Die Momentengleichung ist

$W y_3 = P_{12}\ x_6 + P_9\ x_3$, oder

$4000 \cdot 10 = P_{12}\ 4,3 + 3920 \cdot 6,2$, woraus

$P_{12} = 3650$ Klg.

g) Drehpunkt f, Schnitt $m_7$ $n_7$. Bei diesem Schnitt kommt nur die Kraft $P_4$ in (4) in Betracht.

$W y_4 = P_4\ x_7$; es ist $x_7 = x_8 = 6,2^m$, eingesetzt,

$4000 \cdot 10 = P_4\ 6,2$, demnach

$P_4 = 6450$ Klg.

h) Der Schnitt $m_8$ $n_8$ mit der Wahl des Drehpunktes in e führt (s. Fig. 243g) zu der Gleichung

$W y_3 = P_8\ x_3$ und weil $y_3 = y_4$, $x_3 = x_7$ zu dem Resultate $P_8 = P_4 = 6450$ Klg.

i) g als Drehpunkt und bei $m_8 n_8$ durchschnitten, liefert die Momentengleichung

$$P_{13} x_8 + P_8 x_9 = W y_5, \text{ oder}$$

$$P_{13} \cdot 4{,}9 + 6450 \cdot 7{,}7 = 4000 \cdot 16, \text{ wonach } P_{13} = 2900 \text{ Klg. abg.}$$

k) Die Fundamentkraft $P_{,,,}$ in der Verlängernng von (6) findet man, wenn g Drehpunkt, aus $W y_5 = P_{,,,} \overline{gh}$; wenn man $y_5 = 16$, $gh = 7{,}6$ einsetzt, $P_{,,,} = 8400$ Klg., sie ist zugleich $P_6$; denn in g leistet sie gegen (6) unmittelbar Widerstand. — —

2) In Fig. 244 ist R eine Kraft, welche unter einem $\angle \alpha$ zur Horizontalen wirkt; es rühre z. B. R von einer Drahtseilleitung ab her. Solange in ab die Kraft auf beiden Seiten stetig wirkt, hat das Gerüst von der Leitung nur einen senkrechten Druck auszuhalten, der sich aus der Gleichung (s. Seite 58)

$$R^2 = V_1^2 + R^2 - 2 V_1 R \cos(90 - \alpha) \text{ ergiebt, nämlich}$$

$$V_1 = 2 R \sin \alpha.$$

Zu $V_1$ muss aber noch das Eigengewicht des ganzen Gerüstes Q inklusive des der Rolle, Achse, Lager u. s. w. gezählt werden. Der senkrechte Druck wäre dann $V_1 + Q$. Sollte aber der Fall eintreten, dass das Seil reisst, dann wird die Kraft in a oder b Null und es tritt eine einseitige Wirkung von R ein; sagen wir nach links. Das Gerüst muss jedenfalls für einen solchen Fall gesichert sein. Zerlegt man R und P in V, dann wäre jetzt V zu dem obigen Q zu addieren, P hingegen ist eine in Rücksicht zu ziehende Seitenkraft, welche zu dem Winddruck zu addieren ist. Der letztere muss natürlich wieder auf c reduciert werden. Ist $W_1$ der Winddruck auf die ganze Oberfläche im Schwerpunkt S angreifend, dann ist die Windkraft W in c angreifend aus der Gleichung $WH = W_1 h$ zu rechnen.

Es sei z. B. $R = 8000$ Klg., $\alpha = 25°$, dann erhält man

$$V_1 = 2 \cdot R \sin \alpha = 2 \cdot 800 \cdot \sin 25 = 680 \text{ Klg.}$$

Ist $Q = 6000$ Klg., das Eigengewicht des Gerüstes, so hätte dasselbe demnach einen senkrechten Druck von $6000 + 680 = 6680$ Klg. auszuhalten.

Bietet das Gerüst dem Winde 30□$^m$ Fläche dar, dann ist der Winddruck, 200 Klg. pro □$^m$ zu Grunde gelegt,

$$W_1 = 200 \cdot 30 = 6000 \text{ Klg., auf die Höhe H reduciert,}$$

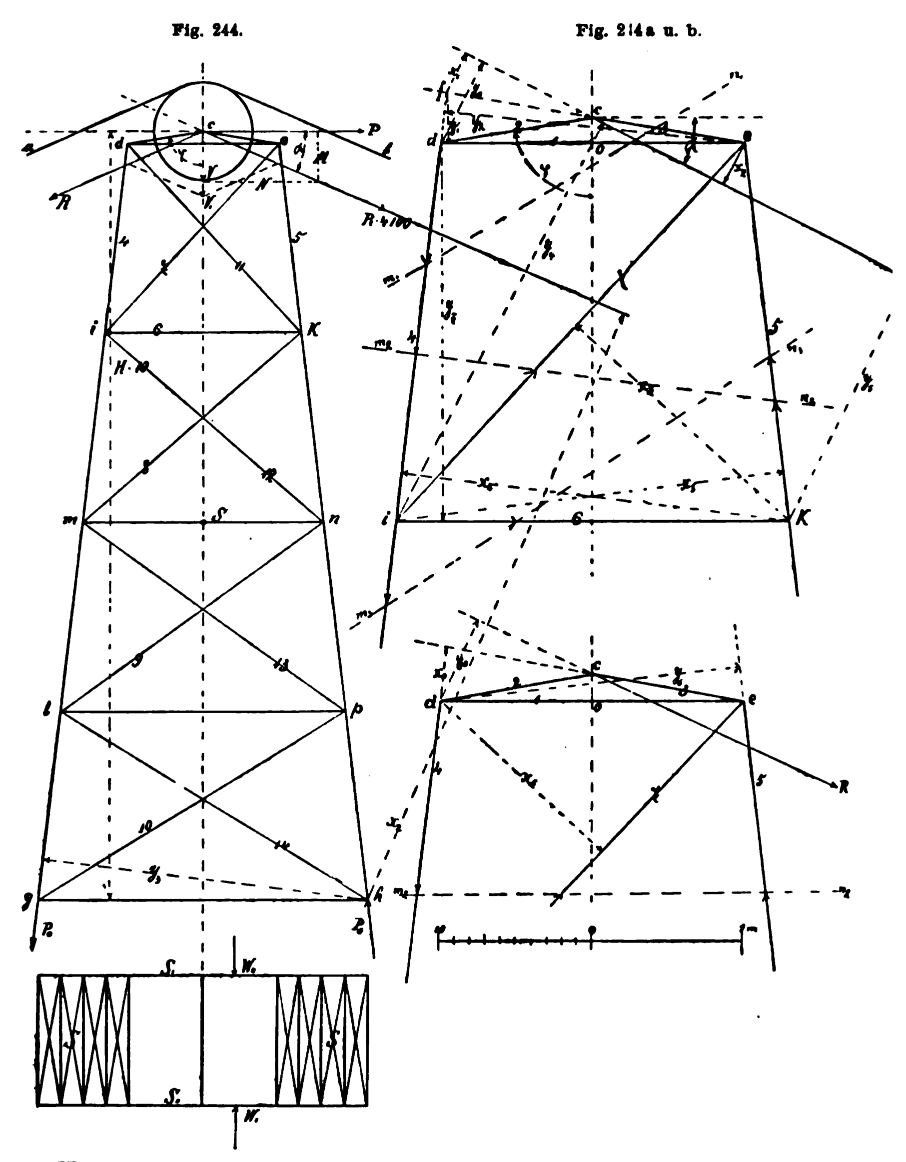
die Schwerpunktshöhe $h = 5^m$ angenommen,

$$W = 6000 \frac{h}{H} = 6000 \frac{5}{10} = 3000 \text{ Klg.}$$

Infolge eines Seilbruches erhält man aber, da die Seilkraft links verschwindet, durch Zerlegung der ersten Seilkraft R,

$$P = R \cos \alpha = 800 \cdot \cos 25 = 725 \text{ Klg. und}$$
$$V = R \sin \alpha = 800 \sin 25 = 340 \text{ Klg.}$$

Fig. 244. Fig. 244 a u. b.



Es würde jetzt die Vertikalkraft, der senkrechte Druck auf das Gerüst sein $V + Q = 6340$ Klg., während der horizontale Zug in c

$W + P = 3725$ Klg. ist.

Das Gerüst wäre also auf 6340 Klg. Seitenkraft und auf obige 6680 Klg. Druckkraft zu berechnen. Bedenkt man nun, dass, wie der Grundriss der Fig. 244 andeutet, das Gerüst aus zwei Schilden S, S,, besteht, so hat jedes 3340 Klg. senkrechten Druck auszuhalten und $\frac{6340}{2} = 3170$ Klg. horizontaler Seitenkraft zu widerstehen. In dem Sinne der Fig. 243 ist dann $K = \frac{1}{2} 3340 = \frac{1}{4} 6680 = 1670$ Klg., $W = 3170$ Klg. Die seitlich eingelegten Kreuze ss, Fig. 244, sollen nicht nur die beiden Schilde zusammenhalten, sondern auch gegen einen Winddruck W, resp. W,, Widerstand leisten; sie sind demzufolge auf eine Kraft im Sinne der Fig. 243f und 243g von obigen $W = 3000$ Klg. zu berechnen, wenn wir annehmen, dass das Gerüst auch hier 30 □ᵐ Windfläche darbietet.

Wir haben nun in Fig. 244 einen andern Weg der Rechnung eingeschlagen. Statt einer Teilung der senkrechten und Seitenkraft, wie in Fig. 243, haben wir die beiden Teilkräfte $3340 = M$ und $3170 = N$ Klg. zu der Resultante $R = \sqrt{3340^2 + 3170^2} = 4100$ Klg. vereinigt, die unter $\alpha = 25°$ in c angreifen (s. Fig. 244a) und in den Streben 1, 2, 3, 4, 5, 6 .... einen Druck in 7, 8, 9, 10 eine Zugkraft äussert. Die letztere überträgt sich auf 11, 12, 13, 14, wenn R von der linken Seite einwirkt.

Der Verfolg der Rechnung ist nun ähnlich dem des vorigen Beispieles; wir haben darum auch abgestanden sie ganz durchzuführen.

a) Verlängert man id und ce, Fig. 244a, bis zum Schnitt in f, betrachtet diesen Punkt als Drehpunkt und schneidet das Gerüst nach $m_1 n_1$, so kommt nur die Strebe $de = 1$ in Betracht, deren Druckkraft $p_1$ sein mag. Die dem Drehpunkt f entsprechende Momentengleichung lautet, wenn $x_1 \perp R$ und $y_1 \perp (1)$ durch f,

$$R \cdot x_1 = p_1 y_1, \text{ oder}$$
$$4100 \cdot 0{,}3 = p_1 \, 0{,}34, \text{ woraus man}$$
$$p_1 = \frac{4100 \cdot 0{,}3}{0{,}34} = 3620 \text{ Klg. findet.}$$

b) Drehpunkt e und derselbe Schnitt $m_1 n_1$ liefert

$$0 = R\, x_2 + p_4\, y_2, \text{ bezw.}$$
$$4100 - 0{,}3 = - p_4\, 1{,}9, \text{ sonach } p_4 = - 647 \text{ Klg.}$$

c) Drehpunkt d und (3) durchschnitten; Fig. 244b.

$$R y_0 = p_3\, x_0, \text{ oder}$$
$$4100 \cdot 0{,}57 = p_3\, 0{,}36, \text{ woraus } p_3 = 6500 \text{ Klg.}$$

Lassen wir zur Kontrolle der Kräfte in (2) und (3) die senkrechte Druckkraft $\frac{6680}{2} = 3340$ in c wirken, so verteilt sich diese in (2) und

(3) gleichmässig. Nach Beispiel IV, S. 64 ist

$$p_2 = p_3 = \frac{3340}{2 \cos \varphi} = \frac{3340}{2 \cdot \cos 79° 15} = 9400 \text{ Klg.},$$

also grösser wie die einseitig wirkende Zugkraft R.

Der $< \varphi$ findet sich aus

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{do}{oc} = \frac{1}{0,18} = 5,555; \; \alpha = 79° 45'.$$

d) Die Kraft in (4) muss so gross wie die in (5) sein, denn wenn R nach links wirkt, so treten die umgekehrten Kräfterichtungen ein.

Wählt man daher i als Drehpunkt und schneidet nach $m_2 n_2$, dann erhält man als Bedingung

$R y_4 = p_5 x_3$, woraus, weil $x_3 = 2,58$, $y_4 = 2,95$

$p_5 = 4700$ Klg.

In der Ausführung wird man da $p_5 > p_4$ die erstere $p_5$ zu Grunde legen.

e) Die Fundamentkraft $P_0$ (s. Fig. 244) ergiebt sich aus

$R x_2 = P_0 y_3$, wobei h Drehpunkt.

$y_3$ und $x_2$ abgemessen, folgt

$$P_0 = \frac{4100 \cdot 8,2}{4,36} = 7700 \text{ Klg.}$$

f) Die Kraft in (7) kann man durch Schnitt $m_2 n_2$ ermitteln, indem man entweder K oder d als Drehpunkt zu Grunde legt.

Drehpunkt K. Momentengleichung Fig. 244a.

$R y_5 + p_7 x_5 - p_4 x_4 = 0$, oder

$4100 \cdot 1,8 + p_7\, 1,95 - 647 \cdot 2,58 = 0$, woraus

$p_7 = 4700$ abg.

Drehpunkt d, Fig. 244b.

$R y_0 - p_5 y_6 - p_7 x_6 = 0$

$4100 \cdot 0,57 - 4700 \cdot 1,96 = p_7\, 1,46$, somit

$p_7 = 4700$ Klg.

g) Drehpunkt d, Schnitt $m_3 n_3$.

$K y_0 - p_5 y_6 - y_7 p_6 = 0$, oder

$4100 \cdot 0,57 - 4700 \cdot 1,96 - p_6\, 2,5 = 0$, demnach

$p_6 = 2750$ Klg. Druckkraft.

**VII.** Gleichgewicht und Kräfteverteilung in einigen verstrebten Brückenträgern, welche frei auf zwei horizontalen Stützen ruhen.

Wir versuchten früher auf S. 104 u. f. die Aufgabe zu lösen, die äusseren Kräfte eines durch sein Eigengewicht oder irgend welche zu-

fällige Last belasteten Balkens durch Aufstellung der Momente und Vertikal- oder Schwerkräfte zu ermitteln, und unterstützten die Rechnung durch eine graphische Darstellung. Wenn nun ein solcher Balken für sich allein nicht mehr ausreichend ist, den nötigen Widerstand zu bieten, dann geben uns die auch schon erwähnten Spreng- und Hängewerke Mittel und Wege an die Hand, um die äusseren Kräfte auf die einzelnen Häng- oder Sprengwerksstreben zu verteilen, so dass der eigentliche Träger mehr oder weniger entlastet ist. Eine solche Verteilung ist nun offenbar um so mehr geboten, je grösser die Entfernung der Stützpunkte ist, welche der Balken „überbrücken“ soll, aber auch je grösser die Last ist, die ein so gelagerter Balken zu tragen hat.*) Die schon betrachteten Dachstühle sind schon solche Brückenbalken von besonderer Form und zu besonderem Zweck, also gleichsam eine Specialität der Brückenträger, ebenso sind die Krahnen einseitige Träger, deren einfachste Form die Fig. 147, 148 enthalten. Die Grundsätze, nach denen wir die verstrebten Brückenträger behandeln können, lassen sich nach dem eben Gesagten auch auf die mehrfach besprochene Momentenmethode zurückführen, wobei uns die Aufstellung der Momente und Vertikalkräfte, wie sie die Seiten 110 u. f. enthalten, nur unterstützen werden.

Nach uns bekannten Grundsätzen veranlassen die äusseren Momente den Balken sich auszubiegen (s. Fig. 121). Besteht ein solcher aus mehreren zusammen gebundenen Stangen, einem Faserbüschel, so werden die oberen durch die Kräfte zusammengedrückt, die untere durch die Ausbiegung verlängert. Die mittleren Schichten haben am wenigsten zu erleiden. Die vertikalen Kräfte suchen den Balken abzuscheren, siehe Fig. 122, 123; sie werden, wie uns bekannt, nach der Mitte des Balkens zu immer kleiner, während die Momente wachsen. Hierin liegen bereits die Grundprinzipien der Strebenzusammensetzung eines Balkens, welcher frei aufliegt.

Ist der Balken auf beiden Seiten eingespannt, so verhält er sich, wie die einseitigen Träger Fig. 147, 148, oder wie die Krahnen; dann werden die unteren Fasern, die untere Strebenreihe gedrückt, die obere gezogen. Eine solche Brücke würde streng genommen aus zwei in der Längsachse sich gegenüberstehenden Krahnen bestehen, deren Ausladungsenden zusammenstossen, oder wie die Forth-Brücke ausgeführt ist, deren Enden wieder eine kleine Brücke tragen können; dann kommt eine Kräfteverteilung zur Geltung, wie sie Fig. 148 enthält; s. Fig. 245.

*) Ausführliches hierüber s. den demnächst erscheinenden Brückenbau d. V.

In dem einen oder anderen Fall ist es nun offenbar leichter einen Balken auszubiegen, als ihn nach der Quere zu zerstören (zerreissen, abscheren), weil eben im ersteren Fall die wirksame Kraft durch einen Hebelarm gleichsam unterstützt wird.

Fig. 245.

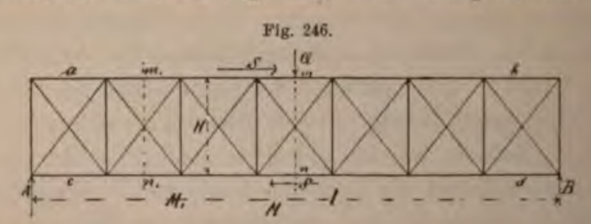


Wir müssen also danach streben an denjenigen Stellen, welche uns ein grösseres Moment ankündigen, namentlich die äussere Faserreihe vor Ausbiegen zu schützen, und diese gegenseitig so zu verstreben, dass die Ausbiegung der äusseren Fasern- oder besser gesagt Strebenreihe sicher übertragen wird, sich sicherer verteilt, und zugleich die Querschnitte dieser Verstrebungen der Vertikalkräfte Widerstand leisten können.

In den senkrechten Gerüsten, Fig. 243, haben wir allerdings in etwas anderer Form schon den Charakter der Momente und Vertikalkräfte vertreten. Den Kräften K dort müssen die Eckstreben widerstehen; damit sie nicht ausgebogen werden, sind sie von Stock zu Stock durch Querverbände gesichert, als Vertikalkraft kann dort die Kraft W angesehen werden, welche nur den Kreuzstrebensystem Widerstand leisten soll.

Es sei Fig. 246 ein Brückenträger in ähnlicher Weise ausgeführt, wie der senkrechte Pfeiler, Fig. 243, frei aufliegend auf A, B. Die

Fig. 246.



äusseren Verstrebungen ab und cd laufen aber parallel (parallele Gürtungen), das Verbandsstrebenwerk (die Wandungen) besteht aus einfachen Kreuzen. Der Träger werde in der Mitte durch eine Kraft Q gedrückt; das Moment in m, im Angriffspunkt von Q sei M, hier nach Gl. 51, S. 109 $M = Ql/4$, wenn l die Spannweite. Schneidet man bei m durch und betrachtet n als Drehpunkt, dann wirkt am Hebelarm H die Kraft S, welche Gleichgewicht herstellt, wenn $A\frac{l}{2} = SH$ oder $\frac{Q}{2}\frac{l}{2} = SH$, d. i.

(98) . . . . . . . . . . $SM = M.$

Die gleiche Formel kommt auch zur Gültigkeit, wenn man bei n durchschneidet und m als Drehpunkt betrachtet.

Das Moment in dem Querschnitt $m_1 n_1$, $M_1$, welches man aus der graphischen Darstellung entnehmen kann (s. Fig. 128) muss Gleichgewicht halten, gleichlautend mit vorstehender Gleichung 98, wenn

$$M_1 = HS_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98a)$$

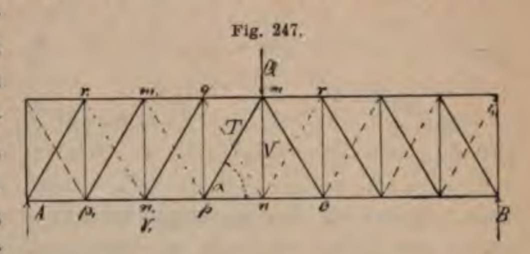
Beide Gleichungen liefern in jedem Querschnitt die Zugkraft S in dem unteren Gürtungsbalken cd, bezw. Druckkraft S in ab, beide Kräfte sind gleich. Aus beiden Gleichungen ist zu entnehmen, dass die Kraft um so schwächer, es wird

$$S = \frac{M}{H}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

je grösser H, je höher der Träger ausgeführt wird. Die Last, welche die Brücke tragen soll, kann hierbei entweder auf der oberen oder unteren Gurtung ruhen.

Während also dem Moment nach den eben aufgestellten Gleichungen die Gürtungsbalken Widerstand leisten, überträgt, wie schon gesagt, das Strebewerk, die Wandung, durch mo, mp, bezw. $m_1 p_1$ ihre Vertikal- oder Scherkräfte auf die untere Gurtung. Diese Streben müssen einem Druck Widerstand leisten, Fig. 247, sie müssen steif sein, während, wenn die Last auf dem unteren Gurtungsbalken ruht, dort angreift, die Stangen mn, $m_1 n_1$ als Zugstangen, die die Vertikalkräfte nach oben übertragen, ausgeführt werden können. Die Zugstange in mn selbst hat nichts auszuhalten, in ihr ist die Kraft Null, die beiden Streben pm und mo übernehmen bereits den Druck; oder mit anderen Worten für l/2 hat hier (s. Fig. 128) das Moment den grössten, V den kleinsten Wert, V = 0.

Fig. 247.



Die Richtung der Streben muss sich hier, wie die Fig. 247 auch angiebt, ändern; es geht hier bei V = 0 die Vertikalkraft vom Positiven ins Negative über, die Streben laufen von nm links nach A, rechts nach B nach den Widerlagern zu. Fig. 70 und 71 sind gleichsam die einfachsten derartigen Brücken (Hängwerke). Die durch qn, $m_1$ p, nr ..... bemerkten Zugstangen dienen zur Vervollkommnung, Versteifung des Trägers, in dem gleichen Sinn, als man die in obigen Krahnen gezeichneten einfachen Felder noch mit Kreuzstreben in der Praxis versehen wird; besonders dann, wenn wie bei Brücken bewegliche Lasten in Betracht kommen, welche einseitige Spannungen hervorrufen.

In Fig. 247a sind die senkrechten als Druck, die schiefen als Zugstreben ausgeführt. Hier wird die Kraft von m durch Druck nach n und von hier durch Zug nach r resp. n übertragen. Auch hier dienen die Nebenstreben als Versteifung des ganzen Systems.

Setzt man beide Systeme zusammen, Fig. 247 und Fig. 247a, wie in Fig. 247b geschehen, dann ist der Träger doppelt tragfähig. Wir haben in dieser Figur auch die Momente von einer Einzellast und von einer gleichmässig verteilten ausgehend (s. d. Fig. 128, 129) und die Vertikalkräftelinien eingetragen. Die sich deckenden Strebespannungen müssen in dem kombinierten Fachwerksträger, Figur 247b, addiert werden.

Fig. 247a.

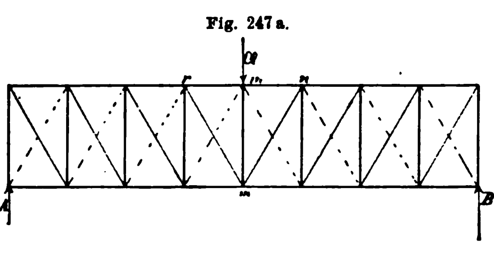
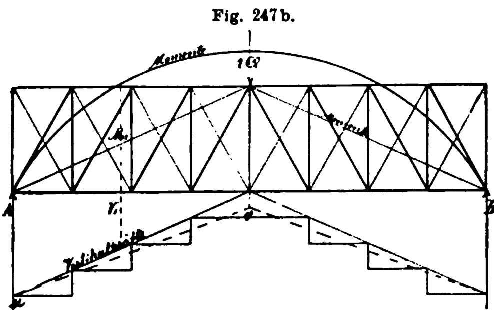


Fig. 247b.



In den praktischen Ausführungen wählt man meist Fig. 247, 247a mit Versteifungszugstangen qn, nr; z. B. der Howe'sche Träger wird aus Holz mit eisernen Zugstangen ausgeführt, die Streben liegen an den Knotenpunkten in Schuhen. Die Zugstangen werden an den Enden oberhalb der Gürtungsbalken mit Schrauben versehen, durch welche der ganze Träger zusammengehalten wird.

Bemerkung. Bei Annahme einer beweglichen Brückenlast wird V in der Mitte (als Hüllkurve) nicht Null, sondern etwa noch 10 % von $V_{max} = A = B$. S. d. Fig. 247b, nv.

Bezeichnet man mit T, Fig. 247, die Kraft in einer der Streben, mit V die an dieser Stelle wirkende Vertikalkraft, dann ist $\frac{V}{T} = \sin\alpha$, woraus man findet

$$(100) \quad \ldots\ldots\ldots \quad T = \frac{V}{\sin\alpha}.$$

Für die senkrechten Streben ist $\alpha = 90°$, sonach

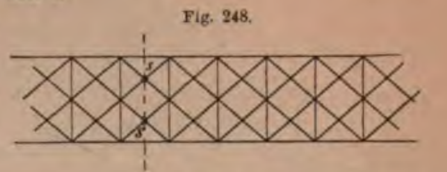
$$(100a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad T = V.$$

Entfallen auf ein Feld mehrere Streben, so dass für diesen Knoten-

punkt, Fig. 248, sich V in mehrere Teile zerlegt, dann ist

$$T = \frac{1}{n} \frac{V}{\sin \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (100b)$$

In Fig. 248 haben wir ein sog. doppeltes System in den Wandungen angenommen, da durch einen Vertikalschnitt zwei Streben geschnitten werden, s und $S_1$.


Fig. 248.

Streng genommen ist der untere Balken, wie bei allen Hängwerken, Fig. 235, 237, 238, 241 ... nur auf Zug beanspruchen, man führt aber ganz besonders dann, wenn die Last unten aufruht (durch Querträger übertragen wird) diesen Haupttragbalken als Druck- oder steifen Balken aus.

**Beispiele.** 1) Es soll eine Brücke als Strassenbrücke von 14$^m$ Spannweite ausgeführt werden. Die Brücke soll 5$^m$ Breite, für zwei Fuhrwerke fahrbar, und zwei Träger erhalten, die Fahrbahn, der Bohlenbelag, ruht auf Querträgern. Das Eigengewicht der Brücke sei*)

$$5 \cdot \frac{1}{7}(1500 + 50 \cdot l) = \frac{5}{7}(1500 + 50 \cdot 14) = 1600 \text{ Klg.}$$

pro laufenden Meter. Bei schwerer Fahrbahn (Schotter, Pflaster) würde man nach 500 bezw. 700 Klg. pro □$^m$ zuzählen. Wir wollen eine Landbrücke voraussetzen und 6000 Klg. Achsenlast des Wagens annehmen, 600 Klg. für ein Gespann. Es können sich zwei vollständige Gespanne auf der Brücke bewegen, vier Achsen à 6000 Klg. = 24 000 Klg. und vier paar Pferde à 600 Klg. = 2400 Klg., in Summa 26 400 Klg. Verteilt man diese Gesamtlasten auf zwei Träger, dann erhält man

$$p = \frac{1600}{2} = 800 \text{ Klg. Eigengewicht pro lauf. Meter}$$

$$k = \frac{26\,400}{2 \cdot 14} = 950 \text{ Klg.} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}$$

zusammen $q = p + k = 1750$ Klg. pro lauf. Meter und Träger.

In Fig. 249 ist die Einteilung dieses Trägers und sind die Belastungskurven aufgetragen.

Das grösste Moment ist nach Gl. 53a, S. 110,

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{1750 \cdot 14^2}{8} = 43\,000 \text{ Klg.}$$

Die grösste Vertikalkraft nach Gl. 52a

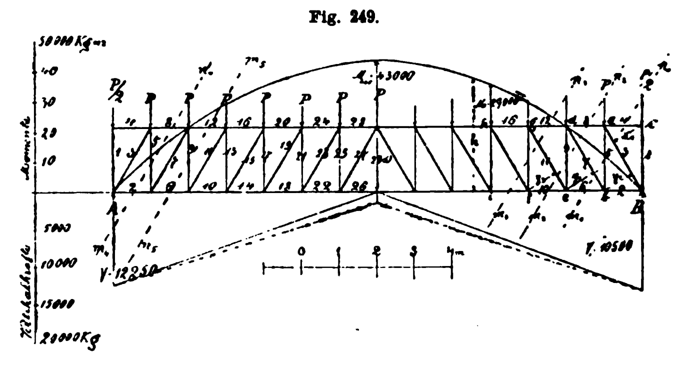
$$V = \frac{ql}{2} = \frac{1750 \cdot 14}{2} = 12250 \text{ Klg.}$$

*) Das Eigengew. einer solchen 7$^m$ br. Brücke von 1$^m$ Sp. ist ca. 1500 + 50 l Klg. pro l. m.

Macht man den Träger 1,7$^{m}$ hoch $\left(\frac{1}{7} \text{ bis } \frac{1}{14}\right)$ und teilt ihn in vierzehn Felder à 1$^{m}$ Länge, dann wird

$$\text{tang } \alpha = \frac{1,7}{1} = 1,7 \text{ und } \alpha = 59^\circ\, 40'.$$

Fig. 249.



Die grösste Vertikalkraft in Gl. 100 eingesetzt, wird der Maximalstrebendruck

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} = \frac{12\,250}{\sin 59^\circ\, 40} = 14\,200 \text{ Klg.}$$

Der Strebendruck im ersten Feld vom Auflager wird aus der Figur entnommen für

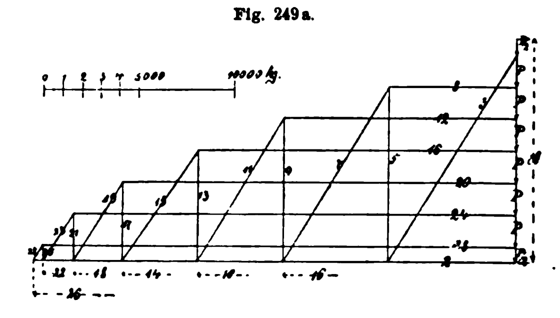
$$V_1 = 10\,500 \text{ Klg.}, \quad T = \frac{10\,500}{0,863} = 12\,200 \text{ Klg.}$$

Die Maximalspannung in den Gürtungsbalken, nach Gl. 99

$$S = \frac{M}{H} = \frac{43\,000}{1,7} = 25\,300 \text{ Klg. abg.*)}$$

*) Die diesbezügliche graphostatische Zeichnung Fig. 249a giebt auch hier

Fig. 249a.



nahezu dieselben Resultate, die Differenzen liegen in den im kleinen Massstab ausgeführten Zeichnungen. S. d. Anwendungen. II. Teil.

Dass Moment $M_1$ im vierten Feld vom Auflager ist $M_1 = 29000$ Klgm. Die Spannung S,

$$S = \frac{29\,000}{1,7} = 17\,000 \text{ Klg.}$$

Bei Konstruktion eines Howe'schen Trägers für dieselbe Brücke mit doppeltem Wandstrebensystem (Fig. 248) würde

$$\text{tang } \alpha = \frac{1,7}{2} = 0,85, \ \alpha = 40^\circ\, 30'.$$

Die Maximaldruckkraft in den Streben ist dann

$$T = \frac{1}{2} \frac{12\,250}{\sin 40^\circ\, 30'} = 9420 \text{ Klg.}$$

Beide Spannungen, die der Gürtung S und die der Wandung verteilt man auf zwei Balken (Fig. 250), so dass auf jeden S = 12 650 Klg., bezw. T = 4710 Klg. Druck, und auf die Hängestange

$$T = \frac{1}{2}\, 12\,250 = 6125 \text{ Klg. Zugkraft kommt.}$$

Fig. 250.

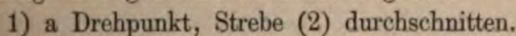


Die Gurtungen und Streben führt man in einer der Maximalstärke durch, die eisernen Zugstangen können nach der Mitte zu schwächer ausgeführt werden. —

Wir wollen schliesslich noch Gelegenheit nehmen, den in Fig. 249 gezeichneten Träger nach der Momentenmethode zu berechnen.

Denkt man sich den Träger gleichmässig mit 1750 Klg. pro lauf. Meter belastet und teilt ihn in vierzehn Teile, so kommen auf jedes Feld P = 1750 Klg., die beiden Auflager sind jedes mit $\frac{P}{2} = 875$ Klg. belastet. Wir wollen also an jedem Knotenpunkt c, a, d . . . eine Kraft P = 1750 angreifen lassen, die Auflager A und B wirken dann mit 12 250 Klg. nach oben; die entsprechenden Momentengleichungen sind dann die folgenden.

1) a Drehpunkt, Strebe (2) durchschnitten.



$$B \cdot \overline{Bb} - \frac{P}{2}\, \overline{ac} = p_2 H, \text{ oder}$$

$$12\,250 \cdot 1 - 875 \cdot 1 = p_2 \cdot 1,7, \text{ woraus } p_2 = 6700 \text{ Klg.}$$

2) Drehpunkt d, Schnitt durch eb.

$$B \cdot \overline{Be} - \frac{P}{2}\, \overline{dc} - P\, \overline{da} = p_6 H, \text{ oder}$$

$$12\,250 \cdot 2 - 875 \cdot 2 - 1750 \cdot 1 = p_6\, 1,7, \ p_6 = 12\,900.$$

3) Drehpunkt g, Schnitt durch ef.

$$B \cdot \overline{Bf} - \frac{P}{2} gc - P \overline{gd} - P \overline{ga} = p_{10} H, \text{ oder}$$

$$12\,250 \cdot 3 - 875 \cdot 3 - 1750 \cdot 1 - 1750 \cdot 2 = p_{10}\, 1{,}7,$$

$$p_{10} = 17\,000.$$

Man sieht hieraus schon, dass die Spannung in der Gurtung nach der Mitte zu immer mehr wachsen muss.

Die Spannung in (4) ist Null, denn B als Drehpunkt zu Grunde gelegt, ist die Momentengleichung

$$B \cdot 0 = p_4 H, \; p_4 = 0.$$

4) Drehpunkt b, Schnitt durch (8), folgt $p_2 = p_8$, denn

$$B\, \overline{bB} - \frac{P}{2} \overline{bB} = p_8 H, \text{ oder}$$

$$p_8 = \frac{1 \cdot 12\,250 - 1 \cdot 875}{1{,}7} = 6700 \text{ Klg.}$$

5) Drehpunkt e, Schnitt durch (12), folgt aus der Gleichung

$$B\, \overline{eB} - \frac{P}{2} \overline{eB} - P\, \overline{ad} = p_{12} H,$$

$$12\,250 \cdot 2 - 875 \cdot 2 - 1750 \cdot 1 = p_{12} \cdot 1{,}7, \text{ hieraus}$$

$$p_{12} = p_6 = 12\,900.$$

6) Drehpunkt f, Schnitt durch (16).

$$B \cdot \overline{fB} - \frac{P}{2} \overline{fB} - P\, \overline{fb} - P \overline{fe} = p_{16} H, \text{ oder}$$

$$12\,250 \cdot 3 - 875 \cdot 3 - 1750 \cdot 2 - 1750 \cdot 1 = p_{16} \cdot 1{,}7$$

$$p_{16} = \frac{28\,875}{1{,}7} = 17\,000 \text{ abg.}$$

Wir erhalten denselben Wert (die Ungenauigkeit der kleinen Zeichnung hierbei vernachlässigt) wie S. 275 für S, wenn $M_1 = 29000$ Klgm.

Man übersieht, dass die Werte der Spannungen in der oberen Gurtung in demselben Verhältnis wachsen müssen nach der Mitte zu wie die in dem unteren Gurtungsbalken.

7) Die Kräfte in (3), (5), (7) ... lassen sich durch Drehung um die diesen gegenüberliegenden Knotenpunkte ermitteln b, e, f, i ... und durch die Schnitte $m_1 n_1$; $m_2 n_2$; $m_3 n_3$ .....

Man findet die bezgl. Gleichungen, wenn man mit $y_1 y_2 y_3$ .... die Hebelarme der Kräfte in (3), (7), (11) ... durch die bezügl. Drehpunkte bezeichnet:

$$B\, \overline{bB} - \frac{P}{2} \overline{bB} - p_4 H = p_3 y_1, \text{ Drehpunkt } b;$$

$$B\,\overline{eB} - \frac{P}{2}\,\overline{eB} - P\,\overline{eb} - p_8 H = p_7 y_2,\ \text{Drehpunkt e;}$$

$$B\,\overline{fB} - \frac{P}{2}\,\overline{fB} - P\,\overline{fb} - P\,\overline{fe} - p_{12} H = p_{11} y_3,\ \text{Drehpunkt f.}$$

Führt man $p_4 = 0$, $p_8$, $p_{12} \ldots$ und $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = 0{,}86^m$ ein, dann erhält man

$$12\,250 \cdot 1 - 875 \cdot 1 = p_3\, 0{,}86,$$
$$12\,250 \cdot 2 - 875 \cdot 2 - 1750 \cdot 1 - 6700 \cdot 1{,}7 = p_7\, 0{,}86,$$
$$12\,250 \cdot 3 - 875 \cdot 3 - 1750 \cdot 2 - 1750 \cdot 1 - 12\,900 \cdot 1{,}7 = p_{11}\, 0{,}86;$$

hieraus findet sich

$$p_3 = 13\,300,\ p_7 = 11\,200,\ p_{11} = 8200.$$

Die Spannungen in den Streben werden immer kleiner, wie man sich durch fortgesetzte Aufstellung der Momentengleichungen leicht überzeugen kann.

8) Die Kräfte endlich in den senkrechten Zugstangen nehmen, wie wir uns durch Aufstellung der betreffenden Momentengleichungen überzeugen werden, auch von den Auflagern nach der Mitte zu ab.

In (1) ist die Kraft, weil in c keine nach links gehende Strebe vorhanden, $p_1 = B - \frac{P}{2} = 12\,250 - 875 = 11\,375$ Klg. Druck. Wählt man B zum Drehpunkt und schneidet der Reihe nach $m_4 n_4$, $m_5 n_5$, $m_6 n_6 \ldots$ durch, so werden die sämtlichen senkrechten Stangen geschnitten, die Kräfte der oberen Gurtungsbalkenschnitte sind bekannt, die der unteren kommen nicht in Betracht, weil sie durch B laufen, die Hebelarme Null sind. Man findet infolge des Schnittes $m_4 n_4$ die Gleichung

$$p_8 H - P\,ac = p_5\,ac,\ \text{oder}$$
$$6700 \cdot 1{,}7 - 1750 \cdot 1 = p_5 \cdot 1,\ \text{woraus}\ p_5 = 9640.$$

Der Schnitt $m_5 n_5$ liefert

$$p_{12} H - P\,cd - P\,ac = p_9\,cd,\ \text{oder}$$
$$12\,900 \cdot 1{,}7 - 1750 \cdot 2 - 1750 \cdot 1 = p_9 \cdot 2,\ \text{woraus}$$
$$p_9 = 8300\ \text{u. s. w.}$$

2) In Fig. 251 sei ein Träger dargestellt ohne senkrechte Verstrebungen. Wir nehmen eine Gesamtbelastung von 7000 Klg. an, welche auf die oberen sieben Knotenpunkten regelmässig verteilt sind, so dass auf den Knotenpunkt 1000 Klg. entfallen. Jedes Auflager drückt mit 3500 Klg. nach oben. Das grösste Moment ist

$$M_{max} = A\,\frac{l}{2} - P_1\, 3s - P_2\, 2 \cdot s - P_1\, s = 3500 \cdot \frac{10{,}5}{2} - 1000 \cdot 6 \cdot 1{,}5$$
$$= 9370\ \text{Klgmeter.}$$

Die Höhe des Trägers sei $H = 2^m$, die Felderlänge $s = 1{,}5^m$.

1) Drehpunkt b; Schnitt durch (1)

$p_1 H = A x_1$, $p_1$ wirkt entgegen der Richtung A; $x_1$ und H eingesetzt,

$p_1 \cdot 2 = 3500 \cdot 0{,}75$, somit $p_1 = 1313$ Klg. Zugkraft.

Fig. 251.

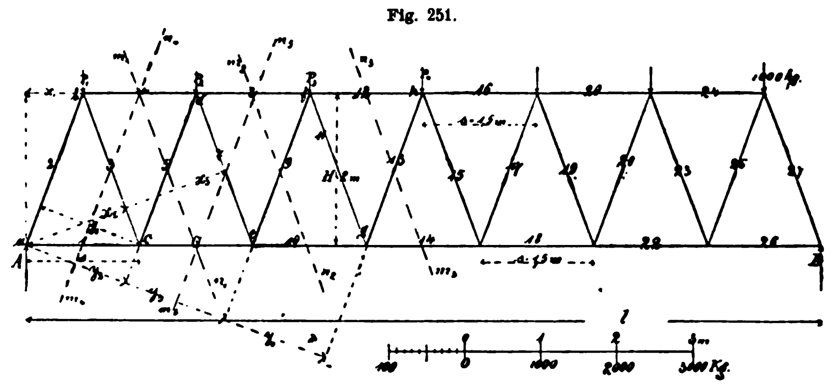


Fig. 251 a.

Die Auflager A und B wirken wieder auf die untere Gurtung ziehend, A nach der linken, B nach der rechten Seite; die unten nach aussen zu laufenden Streben sind Druckstreben, wie in Fig. 249.

2) Drehpunkt d, Schnitt durch (6)

$A(s + x_1) - P_1 s = p_6 H$, oder

$3500\,(1{,}5 + 0{,}75) - 1000 \cdot 1{,}5 = p_6 \cdot 2$, woraus

$p_6 = 3200$ Klg.

3) Drehpunkt f, Schnitt durch (10)

$A(2s + x_1) - P_1\, 2s - P_2\, s = p_{10} H$,

$3500 \cdot 3{,}75 - 1000 \cdot 3 - 1000 \cdot 1{,}5 = p_{10} \cdot 2$, somit

$p_{10} = 4310$ Klg.

4) Drehpunkt h, Schnitt durch (14)

$$A \frac{1}{2} - P_1\, 3s - P_2\, 2s - P_3\, s = p_{14} H, \text{ oder}$$

$$p_{14} = \frac{M_m}{H} = S = \frac{9370}{2} = 4685 \text{ Klg.}$$

5) Die Spannungen in dem oberen Gurtungsbalken wachsen in derselben Weise vom Auflager nach der Mitte. Schneidet man die Balken

(4), (8), (12) ... durch, dann wirken die bzgl. Kräfte $p_4 p_8 p_{12}$ ... in derselben Richtung wie A, folglich ist die obere Gurtung auf Druck beansprucht.

Drehpunkt c; Schnitt durch (4)

$A s - P_1 \frac{s}{2} \cdot = p_4 H$, oder richtiger $A s - P_1 \frac{s}{2} + p_4 H = 0$,

$3500 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 0{,}75 = 2 \cdot p_4$, hieraus folgt

$p_4 = 2250$ Klg. Druck.

6) Drehpunkt e, Schnitt durch (8)

$A \cdot 2 s - P_1 \; 1{,}5 s - P_2 \frac{s}{2} = p_8 H$, in Zahlen

$3500 \cdot 3 - 1000 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 2 \cdot p_8$, woraus

$p_8 = 3750$ Klg.

7) Drehpunkt g, Schnitt durch (12)

$3500 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 = p_{12} H$, man findet

$p_{12} = 4500$ Klg.

8) Drehpunkt c, Schnitt durch (2) wirkt $p_2$ auch in Richtung A, folglich ist

$A s + p_2 y_1 = 0$, bezw.

$3500 \cdot 1{,}5 + 1{,}38 \cdot p_2 = 0$, woraus

$p_2 = 3800$ Klg. Druckkraft.

9) Drehpunkt A, Schnitt $m_1 n_1$.

$P_1 x_1 - p_4 H = p_5 y_2$ oder

$1000 \cdot 0{,}75 - 2 \cdot 2250 = 1{,}38\, p_5$, wonach

$p_5 = 2700$ Klg.

10) Drehpunkt A, Schnitt $m_2 n_2$.

$P_1 x_1 + P_2 (x_1 + s) - p_8 H = p_9 y_3$, oder

$1000 \cdot 0{,}75 + 1000 \cdot (0{,}75 + 1{,}5) - 3750 \cdot 2 = p_9 \, 2 \cdot 1{,}38$; es wird

$p_9 = 1620$ Klg. Druckkraft.

11) Drehpunkt A, Schnitt $m_3 n_3$.

$P_1 x_1 + P_2 (x_1 + s) + P_3 (2 s + x_1) - p_{12} \cdot H = p_{13} y_4$, oder

$1000 \cdot 0{,}75 + 1000 (0{,}75 + 1{,}5) + 1000 (3 + 0{,}75) - 4500 \cdot 2 = p_{13} \, 3 \cdot 1{,}38$.

$p_{13} = 600$ abg.

12) Wählt man wieder A zum Drehpunkt, schneidet aber nach $m_4 n_4$, $m_5 n_5$ ..., um die Kräfte in (3), (7), (1) ... zu erhalten, dann erhält man dieselben Gleichungen wie oben für die symmetrisch liegenden Streben (5), (9), (13) ..., da ferner auch $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ ... sein muss, so folgt hieraus, dass $p_3 = p_5$, $p_7 = p_9$, $p_{11} = p_{13}$ resultieren muss.

Der Schnitt $m_4 n_4$ mit Drehpunkt A liefert

$$P_1 x_1 - p_4 H = p_3 x_2,$$ sonach wie oben

$$p_3 = p_5 = 2700 \text{ Klg.}$$

Der Schnitt $m_5 n_5$ liefert die Momentengleichung

$$P_1 x_1 + P_2 (x_1 + s) + p_8 H = p_7 x_3,$$ hieraus

$$p_7 = p_9 = 1620 \text{ Klg.} \ldots$$

Zwei solche Träger in ähnlicher Weise kombiniert, wie Fig. 247b, erhält man selbstredend wieder einen doppelt tragfähigen Träger ohne senkrechte Verbindungen.

3) Die Trägerform, Fig. 252, unterscheidet sich von den früheren nur durch die obere Gurtung, welche hier gekrümmt ist, während die untere Fahrbahngurtung horizontal bleibt.

Fig. 252.

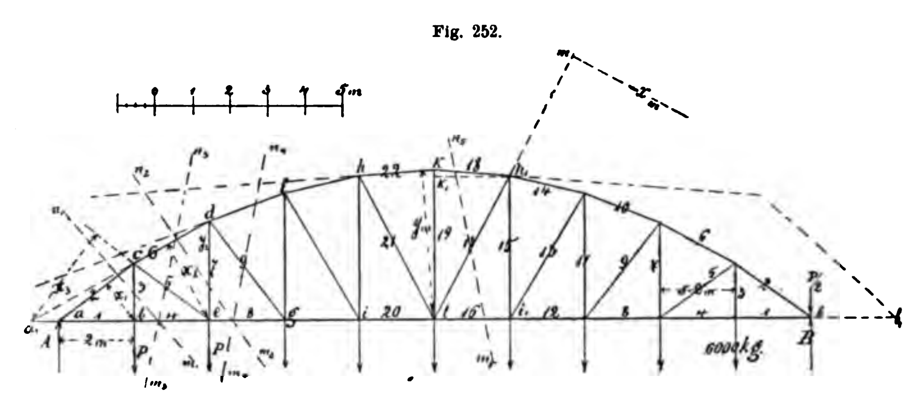
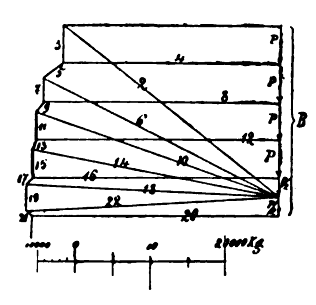


Fig. 252a.



Der Gang der Rechnung ist auch hier derselbe wie bei den vorherigen Brückenträgern.

Die einzelnen Streben in der oberen Gurtung sind Sehnen des Bogens, wir haben hier einen Kreisbogen zu Grunde gelegt. Der Träger habe 20m Spannweite und soll 60 000 Klg., auf zehn Felder verteilt, tragen. Um nahezu einen Anhaltepunkt für eine Eisenbahnbrücke mit einem Geleise zu gewinnen, haben wir eine solche von 20m Spannweite angenommen, welche pro lauf. Meter und Geleise

$$p = 35\,l + 550 = 35 \cdot 20 + 550 = 1250 \text{ Klg.}$$

Eigengewicht hat. Es können auf der Brücke acht Lokomotivachsen à 12 000 Klg. stehen, das sind in Summa 96 000 Klg. zufällige Last.

Hierzu die obigen $20 \cdot 1250 = 25\,000$ Klg., ergiebt sich abg. eine Gesamtlast von 120 000 Klg. Die Brücke möge aus zwei durch Querträger verbundene Hauptträger bestehen, welcher jeder sonach auf

$$\frac{120\,000}{2} = 60\,000 \text{ Klg. Tragkraft}$$

zu berechnen ist. Denken wir uns diese gleichmässig verteilt und nach den vorhandenen Knotenpunkten eingeteilt, dann kommt auf jeden mittleren Knotenpunkt $P = 6000$ Klg., auf die beiden Auflager drücken

$$\frac{P}{2} = 3000 \text{ Klg.},$$

die Auflager wirken also mit $30\,000 - 3000 = 27\,000$ aktivem Druck entgegen.

Die obere Gurtung ist auf Druck, die untere auf Zug beansprucht; die übrigen Elemente sind aus der Zeichnung zu entnehmen, welcher auch ein Massstab beigefügt ist.

1) Drehpunkt b, Schnitt durch (2)

$A \cdot \overline{ab} = p_2 x_1$;

$27\,000 \cdot 2 = p_2\, 1{,}25$, ergiebt sich $p_2 = 43\,000$ Klg.

2) Drehpunkt c, Schnitt durch (1)

$A \cdot ab = p_1 y_1$ oder

$27\,000 \cdot 2 = p_1 \cdot 1{,}5$, sonach $p_1 = \frac{54\,000}{1{,}5} = 36\,000$ Klg.

3) e als Drehpunkt, (6) durchschnitten

$A \cdot \overline{ae} - P\,\overline{be} = p_6 x_2$, $x_2$ aus der Zeichnung abgemessen,

$27\,000 \cdot 4 - 6000 \cdot 2 = p_6\, 2{,}3$, woraus $p_6 = 41\,700$ Klg.

4) Drehpunkt c, Schnitt durch (4), erhält man aus

$A \cdot ab = p_4 y_1$, $p_4 = p_1 = 36\,000$ Klg.

5) Drehpunkt d, Schnitt durch (8)

$A \cdot \overline{ae} = p_8 y_2$,

$27\,000 \cdot 4 = p_8 \cdot 2{,}8$, man findet $p_8 = 38\,600$ Klg.

6) Die grössten Gurtungsspannungen sind wieder in der Mitte vorhanden.

Drehpunkt l und (22) durchschnitten, erhält man

$A \cdot 5\,s - P\,\overline{bl} - P\,\overline{el} - P\,gl - P\,il - p_{22} \cdot y_m$,

$$p_{22} = \frac{27\,000 \cdot 5 \cdot 2 - 6000\,(4s + 3s + 2s + s)}{3{,}9}$$

$$= \frac{27\,000 \cdot 10 - 6000 \cdot 20}{3{,}9} = 40\,000 \text{ abg.}$$

Drehpunkt h und (20) geschnitten, erhält man

$$A \cdot 4s - P \cdot 3s - P \cdot 2s - Ps = p_{20}\,\overline{ih}, \text{ oder}$$

$$p_{20} = \frac{87\,000 \cdot 8 - 6000\,(6 + 4 + 1)}{3{,}8} = 40\,000 \text{ abg.}$$

7) Die Zugstrebe cb übernimmt die Kraft P in b angreifend unmittelbar; denn betrachtet man A als Drehpunkt, und denkt sich durch $m_1 n_1$ einen Schnitt gelegt, dann folgt

$$A \cdot ab = p_3\,ab, \text{ woraus } p_3 = A = 27\,000 \text{ Klg.}$$

8) Die Spannungen in den übrigen senkrechten Stangen findet man durch Verlängerung der Streben cd, df, ... bis zum Schnitt in der Verlängerung der unteren Gurtung. Schneidet man dann so, dass jedesmal die verlängerten Streben (6) und (8) getroffen werden und die zu untersuchende, dann ist die Ermittelung einfach.

Verlängert man cd und eg bis $a_1$, schneidet bei $m_2 n_2$, so findet sich die Momentengleichung

$$A\,\overline{aa_1} - P\,\overline{ba_1} = p_7\,\overline{ea}, \text{ oder}$$

$$27\,000 \cdot 1 - 6000 \cdot 3 = p_7 \cdot 4, \text{ sonach } p_7 = 2200 \text{ Klg.}$$

9) Zur Auffindung der Spannungen in (5), (9) u. s. w. behalten wir dieselben Drehpunkte $a_1$ ... bei, schneiden aber nach den Richtungen $n_3 m_3$, $n_4 m_4$ u. s. w.

Man findet $a_1$ als Drehpunkt angenommen für den Schnitt $m_3 n_3$

$$A\,\overline{aa_1} - P\,\overline{ba_1} = p_5 x_3, \text{ hieraus weil } x_3 = 3{,}1^m$$

$$p_5 = \frac{27\,000 \cdot 1 - 6000 \cdot 3}{3{,}1} = 3000 \text{ Klg. abg.}$$

10) Die Verlängerung der Streben hk bezw. $h_1 k$ trifft die untere Gurtung erst in einem sehr entfernt liegenden Punkt $b_1$. Die Entfernung $lb_1$ lässt sich nun auch durch die ähnlichen Dreiecke $kk_1h_1 - klb_1$ finden, indem

$$kk_1 : k_1h_1 = kl : lb_1, \text{ woraus}$$

$$lb_1 = \frac{\overline{k_1h_1} \cdot \overline{kl}}{kk_1} = \frac{s \cdot \overline{kl}}{lk - i_1h_1} = \frac{2 \cdot 4}{4 - 3{,}8} = 40^m.$$

Die Hebellänge der Strebe (21) bezw. in Fig. 252 der Strebe 17 sei $x_m$, welche Linie senkrecht auf die Verlängerung von $lh_1$ durch $b_1$ gehen muss. Da nun $\triangle\, lh_1 i_1 \sim lmb_1$, so folgt $h_1 i_1 : lh_1 = x_m : lb_1$, somit

$$x_m = \frac{h_1 i_1 \cdot lb_1}{lh_1} = \frac{3{,}8 \cdot 40}{4{,}2} = 36{,}2^m.$$

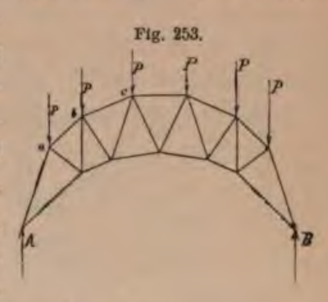
Legt man jetzt den Schnitt $m_5 n_5$, dann ist die Momentengleichung um $b_1$, wenn $B = 30\,000 - P/2 = 27\,000$ Klg. angenommen wird,

$$B\overline{bb_1} - P(bb_1 + s) - P(bb_1 + 2s) - P(bb_1 + 3s)$$
$$- P(bb_1 + bi_1) = p_{17} x_m,$$
$$27\,000 \cdot (40 - 10) - 6000\,[(30 + 2) + (30 + 4) + (30 + 6)$$
$$+ (30 + 8)] = p_{17}\, 36{,}2.$$

Man findet abg. 800 Klg.

4) Der Sichelträger, Figur 253, wird eigentlich nur angewendet als sichelförmiger Dachstuhl für Bahnhöfe und Hallen. Wir haben ihm erst einen Platz hier unter den Trägern eingeräumt, weil seine Kräfteverteilung in den Streben in derselben Weise durchgeführt werden kann, wie die des eben betrachteten Trägers, Fig. 252. Das Eigengewicht und die Last verteilt man wieder auf die Knotenpunkte abc . . . der oberen Gurtung zu 6 P, so dass die Auflager mit je 3P entgegendrücken. Die Rechnung selbst dürfte im Anschluss an die obigen Beispiele keine Schwierigkeiten verursachen.

Fig. 253.




5) Die Parabelträger (parabolischen Brücken), deren obere Gurtung nach einem Parabelbogen gekrümmt ist, haben gegenüber der Kreisbogenkrümmung, wie wir sie Fig. 252 angenommen hatten, besondere Vorteile. Die Spannung in der unteren Gurtung ist bei voller (Maximal-) Belastung konstant in allen Teilen, die gleichen Dimensionen können also in den unteren Strebenteilen angewendet werden in allen Feldern. Die Spannung in der oberen Gurtung ist in allen Feldern nahezu konstant. Es sind bei voller Belastung nur senkrechte Streben erforderlich, welche die Spannungen übertragen, die Spannungen in den schiefen Streben werden Null. Infolge der über die Brücke sich **bewegenden** Last, welche erst nach und nach die ganze Brücke bedeckt, können die Wandstreben nicht entfernt werden, um die nötige Steifigkeit zu erhalten.

Die Figuren 254 und 255 stellen die Trägeransichten solcher Brücken dar.

Fig. 254.

Wir haben die Entfernung AB, die Spannweite zu $10^m$ angenommen, so dass jedes Feld $1^m$ lang ist, und in jedem Knotenpunkt P = 1000 Klg. Belastung vorausgesetzt; die Auflagerreaktionen sind dann A = B = 4500 Klg.

Nimmt man der Reihe nach c, e, g . . . als Drehpunkt, und schneidet die entsprechenden Streben der unteren Gurtung (1), (4), (8) . . ., dann gewinnt man die Momentengleichungen

$$A \cdot \overline{ab} = p_1 \overline{bc}$$
$$A\overline{ad} - P\overline{bd} = p_4 \overline{de}$$
$$A\overline{af} - P\overline{bf} - P\overline{df} = p_8 \overline{fg}.$$

Fig. 245a.

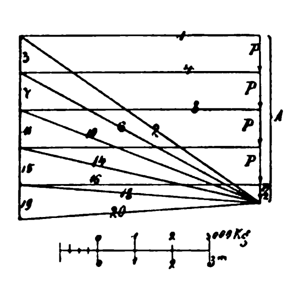
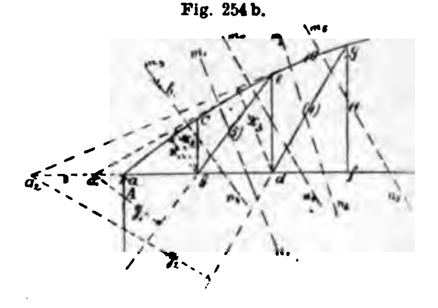


Fig. 254b.



Die Hebelarme, Parabelhöhen, aus der Figur entnommen, folgt, auch für A und P die Werte eingesetzt,

$$4500 \cdot 1 = p_1\, 0{,}7;$$
$$4500 \cdot 2 - 1000 \cdot 1 = p_4\, 1{,}25,$$
$$4500 \cdot 3 - 1000 \cdot 2 - 1000 \cdot 1 = p_8\, 1{,}65.$$

Man findet hieraus abg. $p_1 = p_4 = p_8 = \ldots .$ 6400 Klg.

Die Spannungen in der oberen Gurtung findet man durch die Drehpunkte b, d, f . . ., indem man der Reihe nach die Streben 2, 6, 10 . . . durchschneidet.

b als Drehpunkt mit Schnitt durch (2), wobei $x_1$ senkrecht auf ac (oder besser auf eine Tangente an die Parabel ac) liefert die Gleichung

$A\overline{ab} = p_2\, x_1$, oder $4500 \cdot 1 = p_2 \cdot 0{,}58$, somit $p_2 = 7800$ Klg.

b als Drehpunkt mit Schnitt durch (6), ce nach A zu verlängert und durch b den Hebelarm $x_2$ gezeichnet $\perp$ ce giebt die Gleichung

$A\overline{ab} = p_6\, x_2$, oder $4500 \cdot 1 = p_6 \cdot 0{,}6$, $p_6 = 7200$ Klg.

d als Drehpunkt, (10) durchschnitten und nach A verlängert, $x_3 = 1{,}25$ senkrecht auf diese Verlängerung durch d konstruiert, ergiebt die Gleichung

$$A\,ad = p_{10}\, x_3, \text{ woraus } p_{10} = \frac{4500 \cdot 2}{1{,}25} = 6900 \text{ Klg. u. s. w.}$$

Seite 110 Gl. 53a hatten wir das grösste Moment entwickelt $M = \frac{ql^2}{8}$, und S. 111 auf die Parabel als Belastungskurve hingedeutet, die

man nach Gl. 49 aus einzelnen Punkten konstruieren kann. Nach Gl. 99 ist die Gurtungsspannung $S = \frac{M}{H}$, setzt man M ein, dann folgt $S = \frac{ql^2}{8H}$ für das Maximalmoment der ruhenden Belastung.

Soll nun S eine Konstante ergeben für alle Punkte in der Parabel, also an allen Stellen der Spannweite l, dann muss, damit immer die gleiche Form des Ausdruckes für S erscheint (Parabelgleichung), im Nenner des Bruches, H, das sind die verschiedenen Höhen der Kurve, aus einer parabolischen Kurve zu entnehmen sein; allgemein ausgedrückt, es muss $y = p\,x^2$ (Gleichung der Parabel) sein. Hieraus entspringt die oben erwähnte Eigenschaft der parabolischen Träger, deren untere Gurtung eine konstante Spannung haben.

Fig. 255.

Belastet man einen Teil der Parabel (Fig. 255) mit q Klg. pro lauf. Meter, schneidet bei $c_1$ durch und betrachtet $d_1$ als Drehpunkt, dann ergiebt sich zur Herstellung des Gleichgewichtes um $d_1$, wenn S die betreffende Gurtungsspannung an dieser Stelle

$$q\,x \cdot \frac{x}{2} = Sy, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{q}{2S}\,x^2 = px^2,$$

wenn q und S als konstant angesehen werden, was wir oben vorausgesetzt haben.

In Fig. 254b haben wir die ersten Felder des Trägers in doppelter Grösse aufgezeichnet. Verlängert man die Strebe ce bis zum Schnitt in $a_1$, welcher Punkt als Drehpunkt angesehen werden soll, und legt durch (6), (5) und (4) den Schnitt $m_1\,n_1$, so erhält man die Momentengleichung, wenn $y_1 \perp (5)$,

$$A\,a\,a_1 - P\,a_1\,b = p_5\,y_1,\; a\,a_1 = 0{,}3,\; a_1\,b = 1{,}3 \text{ eingesetzt}$$

folgt die Spannung $p_5 = 0$.

Verlängert man eg bis $a_2$, betrachtet diesen Punkt als Drehpunkt, schneidet nach $m_2\,n_2$, so wird die bezügliche Momentengleichung

$$A\,a\,a_2 - P\,a_2\,b - P\,a_2\,d = y_2\,p_9, \text{ oder}$$

$$4500 \cdot 1{,}2 - 1000 \cdot 2{,}2 - 1000 \cdot 3{,}2 = y_2\,p_9,$$

auch hieraus wird die Nebenspannung $p_9 = 0$.

Wie schon angedeutet, werden die sämtlichen Spannungen in den Diagonalstreben Null und könnten bei einer ruhenden Last entbehrt

werden, da die senkrechten Streben allein schon als Vermittelung der Gurtungsspannungen genügen.

Zur Bestimmung der letzteren sei zunächst a wieder Drehpunkt; für den Schnitt $n_3\ m_3$ wird, weil $p_5 = 0$

$P\overline{ab} = p_3\ ab$, woraus $p_3 = P = 1000$.

Für den Drehpunkt $a_1$ und den Schnitt $m_4\ n_4$, folgt

$A\,aa_1 - P a_1 b - P a_1 d = p_7\ a_1 d$, oder

$4500 \cdot 0{,}3 - 1000 \cdot 1{,}3 - 1000 \cdot 2{,}3 = p_7\ 2{,}3$, somit $p_7 = 1000 = P$, weil die erste Differenz verschwindet.

$a_2$ als Drehpunkt für den Schnitt $m_5\ n_5$ liefert

$A\,aa_2 - P a_2 b - P a_2 d - P a_2 f = p_{11}\ a_2 f$, woraus

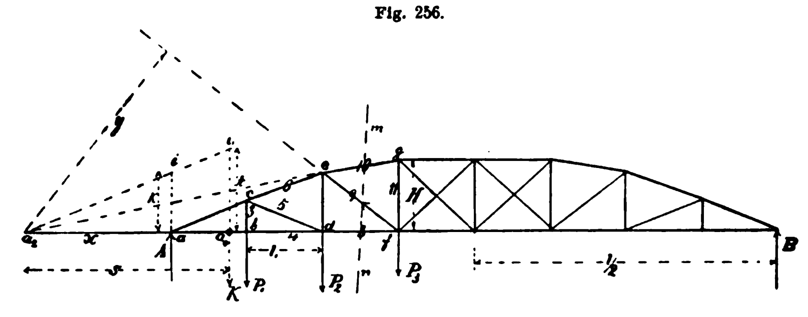
$p_{11} = P = 1000$,

weil wieder die ersten drei Glieder, welche zur Bestimmung von $p_9$ dienten, zu Null werden.

Man findet in der gleichen Weise die Betrachtung weiter geführt $p_{11} = p_{15} = p_{19} = P = 1000$ Klg.

6) Kombiniert man einen Träger mit gekrümmter Obergurtung mit einem Parallelträger, dessen Wandung aus gekreuzten Diagonalstangen (schiefen Streben) besteht, in der Weise, dass zwei Felder des letzteren die Trägermitte ausmachen, dann erhält man den in Fig. 256

Fig. 256.



gezeichneten Schwedlerträger. Die beiden links und rechts sich anschliessenden Trägerteile sind so konstruiert, dass bei beweglicher Last von der einen Seite, in der Eigur von der linken Seite, die Diagonalstangen keine Druckspannung aushalten sollen.

Sind $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ die Knotenpunktsbelastungen aus Eigengewicht und bewegliche Last zusammengesetzt, so muss aus der angenommenen Höhe und gegebenen Spannweite, H cirka $^1/_8$ der Spannweite, die obere Gurtung so bestimmt werden, dass $p_9$ und $p_5$ als Druckspannungen verschwinden. Legt man den Schnitt mn und verlängert eg bis zu $a_2$,

dann lässt sich um diesen Punkt als Drehpunkt die eben erwähnte Bedingung als Momentengleichung aufstellen.

$$Ax - P_1(l_1 + x) - P_2(2l_1 + x) = p_9\, y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Sucht man sich nun die Resultante der linksseitigen Momentensumme der Belastung, so ergiebt sich diese (s. Fig. 84) als Mittelkraft aus

$$sK = P_1(l_1 + x) + P_2(2l_1 + x), \text{ worin } K = P_1 + P_2,$$

nämlich $s = \frac{P_1(l_1 + x) + P_2(2l_1 + x).}{P_1 + P_2}$

Denkt man sich K an s aufgetragen von $a_2$ aus, dann folgt die Bedingung, gleichlautend mit (a)

$$Aa a_2 - Ks = p_9\, y = 0, \text{ oder}$$
$$Ax = Ks, \text{ wonach}$$
$$\frac{K}{Q} = \frac{x}{s}.$$

Um dieses Verhältnis zu erreichen, trägt man sich in a K, und in $a_0$ A auf, verbindet die Endpunkte i und i, und geht nun diese Linie durch $a_2$, dann ist thatsächlich $A : s = K : x$ und de ist die richtig gewählte Trägerhöhe in d, welche $p_9$ zu Null verschwinden lässt. Zur Kontrolle der richtigen Höhe bc in b, damit $p_5 = 0$, verlängert man ed, und ce, letztere bis zum Schnitt der unteren Gurtung und stellt die analoge Momentengleichung wie oben auf, aus der sich eine ähnliche Beziehung ergiebt. Die Berechnung der inneren Spannungen im Träger selbst dürfte dann nach Feststellung der äusseren Gestalt keine besonderen Schwierigkeiten bieten.

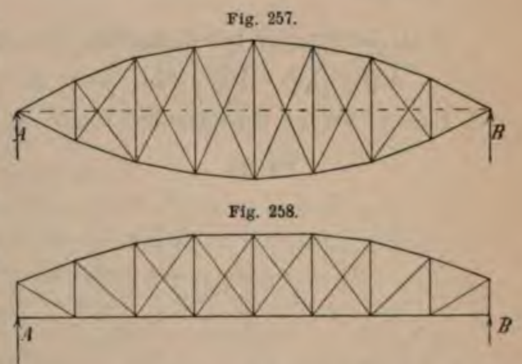


Fig. 257.

Fig. 258.

7) Der Pauli'sche Träger, Figur 257, ist nach der Bedingung ausgeführt, dass bei gleichmässiger voller Belastung die Gurtungen gleiche Spannungen haben sollen.

Die Vertikalstreben sind Druckstreben, und werden in den Feldern gekreuzte Streben als Zugbänder angewendet, um der beweglichen Last von beiden Seiten wirkend, Genüge zu leisten.

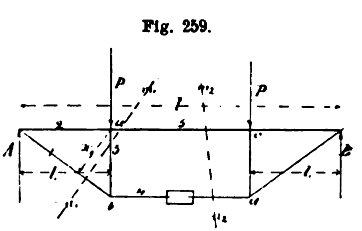
Auf eine eingehende Betrachtung des Pauli'schen Trägers, sowie der sämtlichen verschiedenen Parabelträgerkonstruktionen, Fischbauchträger

Fig. 255, Halbparabelträger Fig. 258 u. a. m., können wir uns an dieser Stelle nicht weiter einlassen.

8) Es ist die Verteilung der inneren Kräfte in den Fig. 259 und Fig. 260 gezeichneten verspannten Balken allgemein aufzustellen.

Die in den Knotenpunkten a und c angreifenden Kräfte seien P; die Auflagerdrucke A = B.

Fig. 259.



Ist a Drehpunkt und schneidet man die Stange (1) durch, dann tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$A l_1 = p_1 x_1, \text{ wenn } p_1 = A \frac{l_1}{x_1},$$

worin $x_1 \perp$ (1) durch a.

Schneidet man die Druckstange (2) unter Beibehaltung desselben Drehpunktes, dann ist die Bedingungsgleichung für die Kraft in (2)

$$A l_1 = p_2 h, \text{ woraus } p_2 = A \frac{l_1}{h}.$$

Der Drehpunkt A und Schnitt $m_1 n_1$ liefert

$$P l_1 = p_5 l_1, \text{ es ist somit } p_3 = P.$$

Schneidet man nach $m_2 n_2$, dann wird c als Drehpunkt angesehen

$$A (l - l_1) - P (l - 2 l_1) = p_4 h, \text{ woraus folgt}$$

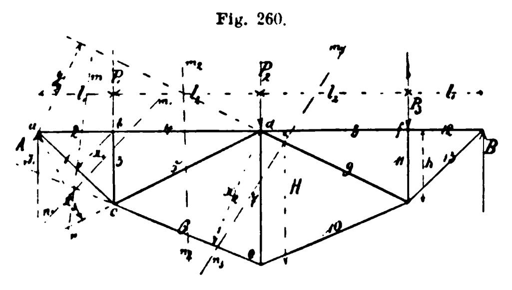
$$p_4 = \frac{A (l - l_1) - P (l - 2 l_1)}{h}.$$

d als Drehpunkt bei demselben Schnitt wird

$$A (l - l_1) - P (l - 2 l_1) = p_5 h, \text{ sonach } p_4 = p_5. -$$

Lassen wir in beistehender Figur in den Knotenpunkten b und d die Kräfte $P_1$ und $P_2$, in f $P_3$ wirken, und bezeichnen wir wieder mit A = B die Auflagergegendrücke, dann erfolgt offenbar eine symmetrische Verteilung der inneren Spannungen und genügt es die der ersten sieben Streben zu ermitteln. Nach den in Fig. 260 eingezeichneten Bezeichnungen der Knotenpunkte bezw. Drehpunkte und Hebelarme findet folgende allgemein gehaltene Kräfteverteilung statt.

Fig. 260.



1) Drehpunkt b; Schnitt durch (1), bezw. (1) und (2), das Moment von (2) ist aber Null,

$$A l_1 = p_1 x_1;\ p_1 = \frac{A l_1}{x_1}.$$

2) Drehpunkt c; Schnitt durch (2),

$$A l_1 + p_2 h = 0,\ p_2 = -\frac{A l_1}{h}.$$

3) Drehpunkt A; Schnitt durch $m_1 n_1$,

$$P_1 l_1 + p_3 l_1 = 0,\ p_3 = -P_1.$$

4) Drehpunkt c; Schnitt durch (4) bezw. $m_2 n_2$,

$$A l_1 + p_4 h = 0,\ p_4 = -\frac{A l_1}{h}.$$

5) Drehpunkt d; Schnitt durch (6) oder $m_2 n_2$,

$$A(l_1 + l_2) - P_1 l_2 = p_6 x_2,\ p_6 = \frac{A(l_1 + l_2) - P_1 l_2}{x_2}.$$

6) Drehpunkt A; Schnitt durch $m_2 n_2$.

$$P_1 l_1 + p_5 x_3 + p_6 y_1 = 0;\ p_5 = -\frac{P_1 l_1 - p_6 y_1}{x_3}.$$

7) Drehpunkt A; Schnitt $m_3 n_3$.

$$P_1 l_1 + P_2 (l_1 + l_2) = p_9 y_2 + p_7 (l_1 + l_2) + p_6 y_1, \text{ woraus}$$

$$p_7 = \frac{P_1 l_1 + P_2 (l_1 + l_2) - p_9 y_2 - p_6 y_1}{l_1 + l_2}. -$$

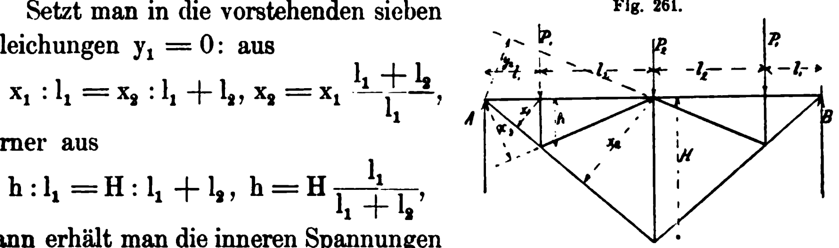


Fig. 261.

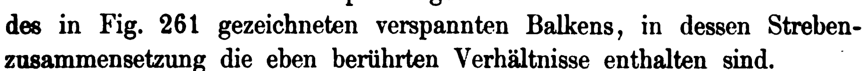
Setzt man in die vorstehenden sieben Gleichungen $y_1 = 0$: aus

$$x_1 : l_1 = x_2 : l_1 + l_2,\ x_2 = x_1 \frac{l_1 + l_2}{l_1},$$

ferner aus

$$h : l_1 = H : l_1 + l_2,\ h = H \frac{l_1}{l_1 + l_2},$$

dann erhält man die inneren Spannungen des in Fig. 261 gezeichneten verspannten Balkens, in dessen Strebenzusammensetzung die eben berührten Verhältnisse enthalten sind.



Man findet nach kurzer Zusammenziehung

$$p_1 = A \frac{l_1}{x_1},$$

$$p_2 = -\frac{A l_1}{H l_1}(l_1 + l_2) = -A \frac{l_1 + l_2}{H},$$

$$p_3 = -P_1$$

$$p_4 = -A \frac{l_1 + l_2}{H},$$

$$p_5 = -\frac{P_1 l_1}{x_3},$$

$$p_6 = \frac{l_1}{x_1}\left(A - P_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2}\right) \text{ und}$$

$$p_7 = \frac{P_1 l_1 + P_2 (l_1 + l_2) - p_1 y_2}{l_1 + l_2}.$$

---

**VIII.** Gleichgewicht in hängenden Ketten.

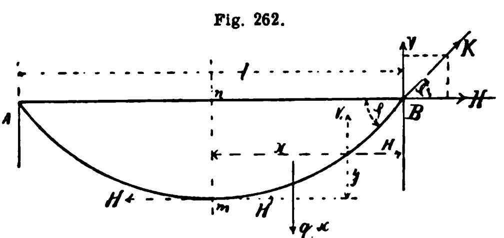


Fig. 262.

In den Punkten A und B befestigt, hängt eine Kette. Die Entfernung zwischen A und B sei gegeben, ebenso sei auch der senkrechte Abstand des tiefsten Punktes m der Kette von der horizontal angenommenen Linie AB bekannt; mn = i; n liegt in der Mitte der Aufhängpunkte.

Schneidet man bei m durch, dann müsste man zwei Kräfte H anbringen, um die Kettenhälften zusammenzuhalten.

Bezeichnet man mit q die Belastung der Kette pro lauf. Meter, so wirkt die halbe Kettenlast $\frac{ql}{2}$ an $\frac{l}{4}$, es tritt Gleichgewicht ein, wenn um B drehbar

(a) . . . . . . . . . . $\frac{ql}{2} \frac{l}{4} = Hi.$

Für eine beliebige Kettenlänge md würde, d als Drehpunkt angenommen sein

(b) . . . . . . . . . $Hy = \frac{qx^2}{2}.$

Dividiert man beide Gleichungen, dann erhält man

(c) . . . . . . . . . . $y = \frac{4i}{l^2} x^2.$

Wir haben schon mehrfach erwähnt, dass wir mit Hülfe dieser Gleichung eine parabolische Kurve konstruieren können, und schliessen wir sonach aus Gleichung c, dass obige Kette sich zwischen A und B in eine Parabel einhängt, der Scheitel derselben liegt in m.

Die Kraft H wirkt durch die Kettenhälfte als Horizontalkraft, sowohl in d als auch in B.

In den beiden Aufhängpunkten muss als Vertikalkraft das halbe

Kettengewicht $V = \frac{ql}{2}$ in jeder Aufhängstelle wirken; in d würden $V = qx$ Klg. als Vertikalkraft wirken.

Die Resultante aus V und H in B, die Zugkraft K sucht die Kette in B abzureissen, sie ist

$$K = \sqrt{V^2 + H^2} \quad \text{. . . . . . . . .} \quad (d)$$

Mit der Horizontalen bildet sie den Winkel $\varphi$, so dass

$$\text{tang } \varphi = \frac{V}{H} \quad \text{. . . . . . . . . .} \quad (c)$$

Aus Gl. (a) findet man die Horizontalkraft

$$H = \frac{ql^2}{8i} \quad \text{. . . . . . . . . .} \quad (101)$$

Setzt man diese und $V = \frac{ql}{2}$ in (d) ein, so erhält man die Kettenzugkraft

$$K = \sqrt{\left(\frac{ql}{2}\right)^2 + \left(\frac{ql^2}{8i}\right)^2} = \frac{ql}{8i}\sqrt{16i^2 + l^2} \quad \text{. . .} \quad (102)$$

Diese Kraft bildet mit der Horizontalen nach (c), V und H eingesetzt den Winkel

$$\text{tang } \varphi = \frac{4i}{l} \quad \text{. . . . . . . . .} \quad (103)$$

Es hängt z. B. eine Kette zwischen den horizontal liegenden Punkten A und B in $l = 6^m$ Entfernung, so, dass $i = 1{,}4^m$ Vertikalabstand. Die Kette selast wiegt $q = 80$ Klg. pro lauf. Meter.

Man findet durch Einsetzen der Zahlen in die letzten Gleichungen

$$H = \frac{ql^2}{8i} = \frac{80 \cdot 6^2}{8{,}44} = 257 \text{ Klg.}$$

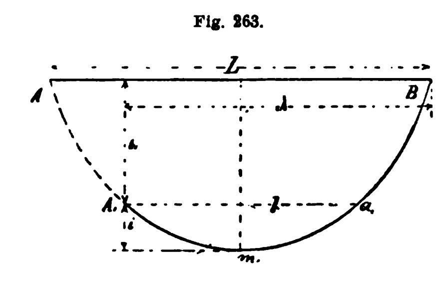
$$V = \frac{ql}{2} = \frac{80 \cdot 6}{2} = 240 \text{ Klg.}$$

$$K = \frac{ql}{8i}\sqrt{16i^2 + l^2} = \frac{80 \cdot 6}{8 \cdot 1{,}4}\sqrt{16 \cdot 1{,}4^2 + 6^2} = 354 \text{ Klg.}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{4i}{l} = \frac{4 \cdot 1{,}4}{6} = 0{,}9\,333, \quad \varphi = 43°.$$

Würde man eine Kette nicht horizontal aufhängen, etwa wie in Fig. 263 angegeben, so dass die horizontale Entfernung $A_1 B = \lambda$, hingegen die vertikalen Entfernungen i und $i_1$ sind, so denken wir uns durch $A_1$ B und dem tiefsten Punkt $m_1$ eine Parabel aufgezeichnet, $A_1\ m_1\ a_1$ ist das Scheitelstück derselben, hingegen $a_1$ B die Verlängerung des einen Astes.

Fig. 263.



Für diese Parabel muss auch die Gl. (i) zur Geltung kommen

$$y = \frac{4i}{l^2} x^2, \text{ wenn } l = A_1 a_1.$$

Bezeichnen wir nun mit L für einen Augenblick die Entfernung AB, so lässt sich in Bezug auf L und $i + i_1$ gleichlautend mit der letzten Gleichung (a) setzen

$$i + i_1 = \frac{4i}{l^2} \left(\frac{L}{1}\right)^2 = \frac{iL^2}{l^2}.$$

Es ist nun $L - \lambda = \frac{L}{2} - \frac{l}{2}$ oder $L = 2\lambda - b$, sonach

$$i + i_1 = \frac{i}{l^2} (2\lambda - l)^2.$$

Hieraus findet sich der horizontale Abstand l vom Aufhängepunkt $A_1$ an gerechnet, halbiert man diesen und trägt im Halbierungspunkt i senkrecht auf, dann ist $m_1$ bestimmt, und man kann nach der schon früher angegebenen Konstruktion die Parabel vom Scheitel aus konstruieren.

Die letzte Gleichung liefert

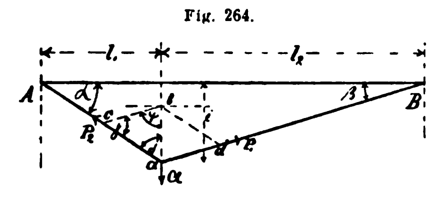
$$(104) \quad \ldots\ldots \quad l = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{i_1}{i}\right)}}.$$

Für $\lambda = 14^m$, $i_1 = 4$ und $i = 1{,}5^m$ würde man erhalten

$$l = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + \frac{i_1}{2}}} = \frac{2 \cdot 14}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{1{,}5}}} = 9{,}6^m.$$

Für $i_1 = 0$ wird natürlich wieder $l = \lambda$.

Fig. 264.



Lassen wir, wie Fig. 264 andeuten soll, das Kettengewicht selbst ausser Acht, hängen aber an irgend einer Stelle in den Entfernungen $l_1$ und $l_2$ von A und B gelegen eine Last Q auf, so wird diese die Kettenstränge Aa und Ba unter den Lastzugswinkeln $\alpha$ und $\beta$ anziehen; die letzteren kann man berechnen aus

$$(f) \quad \ldots\ldots \quad \tan \alpha = \frac{i}{l_1} \text{ und } \tan \beta = \frac{i}{l_2}.$$

Die Kräfte in den Kettensträngen wollen wir mit $P_1$ und $P_2$ bezeichnen; konstruiert man das Parallelogramm abcd, so bildet Q die Resultante dieser Teilkräfte.

Aus den durch das Parallelogramm entstehenden Dreiecken abc und abd kann man leicht die Winkel $\gamma$, $\vartheta$ und $\psi$ abhängig an $\alpha$ und $\beta$ berechnen, sie sind

$$\psi = 90 - \beta,\ \vartheta = 90 - \alpha,\ \gamma = \alpha + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Nach dem Sinussatze verhält sich

$$Q : \sin\gamma = P_1 : \sin\vartheta = P_2 : \sin\varphi.$$

Diese doppelte Proportion ergiebt die Teilkräfte

$$P_1 = Q\,\frac{\sin\vartheta}{\sin\gamma} \text{ und } P_2 = Q\,\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

Setzt man in diese die Beziehungen in (g), so wird

$$P_1 = Q\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\ P_2 = Q\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad . \quad . \quad (105)$$

Hängt die Last Q in der Mitte der Kette, dann wird offenbar $\alpha = \beta$ und Gl. 105 giebt

$$P_1 = P_2 = Q\,\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = Q\,\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{Q}{2\sin a} \quad . \quad (105\,a)$$

Wir hatten bereits S. 63 (Fig. 55) diese Gleichung gefunden, dort haben wir den Winkel bei a mit $\alpha$ bezeichnet, es ist also $\alpha/2$ der Ergänzungswinkel zu dem hier bezeichneten Winkel $\alpha$, weshalb dort der $\cos\alpha/2$ im Nenner erscheint.

Sollen die in 105 aufgestellten Formeln statt von $\alpha$ und $\beta$, abhängig von i, $l_1$ und $l_2$ ausgedrückt werden, so ist es erforderlich, da in (f) in tang. diese Winkel enthalten sind, diese durch die sin. und cos. zu ersetzen.

Bekanntlich ist allgemein

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2\varphi}},\ \sin\varphi = \frac{\tang\varphi}{\sqrt{1+\tang^2\varphi}}.$$

Führt man in diese Beziehungen die Gl. f ein, indem man einmal $\varphi = \alpha$ und dann $\varphi = \beta$ setzt, so findet man

$$\sin\alpha = \frac{i}{l_1\sqrt{1+\left(\frac{i}{l_1}\right)^2}}\ \sin\beta = \frac{i}{l_2\sqrt{1+\left(\frac{i}{l_2}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{l_1}\right)^2}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{l_2}\right)^2}},$$

ferner da $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\left(\frac{i}{l_1}\right)+\left(\frac{i}{l_2}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{i}{l_1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{i}{l_2}\right)^2\right]}}.$$

Nach Gl. 105 zusammengesetzt ergeben sich nun die Zugkräfte $P_1$ und $P_2$, die Formeln entsprechend zusammengezogen

$$(106) \quad \ldots \quad \begin{cases} P_1 = Q\,\dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{l_1}{i}\,\dfrac{\sqrt{l_2^2+i^2}}{l_1+l_2} \\[2ex] P_2 = Q\,\dfrac{l_2}{i}\,\dfrac{\sqrt{l_1^2+i^2}}{l_1+l_2} = Q\,\dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{cases}$$

Wenn die Last Q in der Mitte aufgehängt wird, ist $l_1 = l_2$ geworden, dann sind die Kräfte wie uns bekannt gleich, man findet aus Gl. (106) $l_1 = l_2 = l/2$ eingeführt,

$$(106a) \quad \ldots \quad P_1 = P_2 = Q\,\frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{l^2+4i^2}}{4i}.$$

Hängt z. B. an obiger Kette noch Q = 5000 Klg. Last in der Mitte, dann wäre der Kettenzug K noch zu vermehren um

$$P_1 = P_2 = 500\,\frac{\sqrt{6^2+4\cdot 1{,}4^2}}{4\cdot 1{,}4} = 600 \text{ Klg. abg., da}$$

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2} = \frac{6}{2};\; i = 1{,}4^m.$$

Die Kettenstränge hätten dann einer Gesamtkraft von 600 + 354 = 954 Klg. Widerstand zu leisten.

---

## Die lebendige Kraft als Arbeit.

Eine Arbeitsleistung ist, wie uns bekannt, das Produkt aus Kraft und Weg. Eine Kraft allein kann also keine Arbeit vorstellen, sie wird erst zu einer solchen, wenn sie ihre Wirkung durch eine Bewegung äussert. Wenn wir nun die lebendige Kraft als Arbeit auffassen wollen, so liegt in diesem Ausdruck jedenfalls noch der Begriff der Bewegung, keinenfalls der, der Kraft allein. Dadurch, dass eine Kraft lebendig geworden ist, deutet uns dies an, dass eine Bewegung in die Kraft gekommen ist, infolge der sie erst zur Wirkung, zur Arbeitsleistung gelangen kann. Die Kraft an und für sich war demnach vorhanden, sie wurde aber verhindert, durch einen Widerstand sich zu äussern, erst musste sie diesen überwinden, ehe sie in Thätigkeit, Bewegung gelangen konnte und vor unseren

Augen lebendig wurde, um auf ihrem Weg die ihr vorgeschriebene, gleich gesetzte Arbeit zu leisten. Nehmen wir einen toten Körper, einen Stein, ein Holz, ruhendes Wasser, irgend eine Masse, so wird diese „lebendig" und kann eine Arbeit leisten, sobald wir ihr eine Bewegung erteilen*) durch eine Kraft, hierbei waren wir genötigt einen Teil der Kraft oder auch die ganze erst aufzuwenden, um den ursprünglichen Widerstand, die überhaupt in dem toten Körper ruhende Kraft, das ist die Anziehungskraft der Erde, das Gewicht des Körpers, zu überwinden; denn die Oberfläche der Erde hat den toten Körper verhindert, ihm widerstanden, damit er sich nicht nach dem Mittelpunkt der Erde bewege. Haben wir die tote Masse gehoben, dann erst erteilen wir ihr eine Kraft, werfen sie, oder überlassen sie der Anziehungskraft der Erde durch Fallenlassen, damit eine Arbeit geleistet werde, die in diesem letzteren Fall dem Produkt des Gewichtes mit der Fallhöhe entspricht, auf die Arbeit von sinkenden Gewichten, Wasserläufen haben wir bereits hingedeutet.

Auf die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen Körper z. B. eine Mauer zu kanten, haben wir auch schon S. 175 (Gl. 77) hingewiesen. Wir lassen dort eine Kraft W angreifen, welche den Körper aus dem stabilen in den labilen Gleichgewichtszustand versetzt. Erteilen wir nun irgend einer Masse eine gewisse Geschwindigkeit und zwar in Richtung der angreifenden Kraft W, so können wir es auch dahin bringen, dass der Körper gehoben, bezw. gestürzt wird, wenn nur die Geschwindigkeit gross genug und die Masse schwer genug ist, damit der Stossdruck, wie wir ihn bezeichnen können, kräftig genug wird, die fragliche Arbeit zu verrichten. Die Körpermasse m leistet also infolge der ihr zugeteilten Geschwindigkeit v eine gewisse Arbeit, im letzeren Fall die Umsturzarbeit, die gerade so gross sein muss, wie das Stabilitätsarbeit.

Eine Lokomotive, welche von der inneren Dampfkraft getrieben, einen Berg hinauffährt, eine Steigung zu überwinden hat, wird um die Arbeit, ihr eigenes Gewicht auf die Höhe des Berges zu heben, und die Reibungswiderstände unterwegs zu überwinden, an Kraft verlieren müssen, also auch an Geschwindigkeit hatte sie erst die Geschwindigkeit $v_1$, so wird sie oben angelangt, nur noch $v_2^m$ Geschwindigkeit haben, $v_2$ wird Null, wenn die ganze Kraft aufgezehrt werden würde, die Maschine still stünde; vorausgesetzt, dass auch kein neuer Dampf erzeugt wird.

Es fragt sich nun, in welches Verhältnis tritt die Masse zur Geschwindigkeit, um die Arbeitsleistung, also die lebendige Kraft des eigentlich toten Körpers auszudrücken?

*) Siehe S. 45.

Nehmen wir als Triebkraft die Anziehungskraft der Erde an, welche auf einem Körper, dessen Gewicht G, einwirkt. Der Körper fällt frei herab und leistet die Arbeit Gh, wenn h die Fallhöhe. Unten angelangt hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$, die ihm die Anziehungskraft der Erde erteilt hat. h durch v ausgedrückt, ist dann $h = \frac{v^2}{2\,g}$ und die Arbeitsleistung $G\,h = G\,\frac{v^2}{2\,g}$. Diese Gleichung lässt sich auch schreiben $G\,h = \frac{G}{g}\,\frac{v^2}{2}$. g ist aber nichts weiter als die Masse des Körpers $m = \frac{G}{g}$, somit ist die in Frage stehende Abhängigkeit der Masse und ihrer Geschwindigkeit um eine Arbeit zu leisten,

$$(107) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{A = G\,h = m\,\frac{v^2}{2}}.$$

Man nennt nun thatsächlich das Produkt der Masse mit dem halben Quadrat der Geschwindigkeit, die lebendige Kraft.

Im Sinne der Gl. 33, nach welcher $G\,h = P\,s$, ist dann auch

$$(107\,a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A = P\,s = m\,\frac{v^2}{2}.$$

Diese Gleichung sagt auch aus, dass es gleich ist, ob eine Kraft P längs dem Weg s wirkt oder ob eine der Kraft entsprechende Masse sich mit $v^m$ Geschwindigkeit bewegt.

Hat die obige Lokomotive die Masse m, dann wäre ihre lebendige Kraft bei der Geschwindigkeit $v_1$ $m\,\frac{v_1^2}{2}$, die bei der Geschwindigkeit $v_2$, $m\,\frac{v_2^2}{2}$; die Differenz beider Arbeitsleistungen $m\,\frac{v_1^2}{2} - m\,\frac{v_2^2}{2}$ ist aber die wirklich geleistete Arbeit $A = A_1 - A_2 = m\,\frac{v_1^2}{2} - m\,\frac{v_2^2}{2}$, welche wenn $v_2 = 0$, wieder $A = \frac{m\,v_1^2}{2}$ ist. —

In den zu Anfang aufgestellten Gleichungen der Bewegungslehre, Gl. 2 und 3, nannten wir die Anfangs- und Endgeschwindigkeit c und v. Eliminieren wir die Zeit t, indem wir aus Gl. 2 $t = \frac{2\,s}{v + c}$ in (3) einsetzen, es folgt dann

$$\pm p = \frac{v - c}{2\,s}\,(v + c) = \frac{v^2 - c^2}{2\,s} \quad \text{oder}$$

$$\pm s = \frac{v^2 - c^2}{2\,p}.$$

Es stellt diese Gleichung den Weg dar, welchen ein Körper bei beschleunigter oder verzögerter Bewegung zurücklegt, wenn p und die Anfangs- und Endgeschwindigkeit bekannt sind. Multipliciert man auf beiten Seiten mit K, so stellt offenbar $\pm$ Ks, wenn wir uns unter K eine Kraft vorstellen, eine Arbeit dar. Man erhält dann $\pm \mathrm{Ks} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{v}^2 - \mathrm{c}^2}{2\mathrm{p}}$; oder durch Auflösung

$$\pm \mathrm{Ks} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{p}}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} - \frac{\mathrm{c}^2}{2}\right).$$

Erwägen wir, dass $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{p}}$, Kraft durch Beschleunigung (s. S. 20, Gl. 12) die Masse m bedeutet, so können wir die letzte Gleichung auch schreiben

$$\pm \mathrm{A} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{v}^2}{2} - \mathrm{m}\frac{\mathrm{c}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

Auch hierin finden wir das Gesetz bestätigt, dass eine Arbeitsleistung sich als Differenz zweier lebendigen Kräfte auffassen lässt. In dem positiven Zeichen liegt ein Arbeitsgewinn, im negativen ein Verlust an Arbeit. Der oben erwähnte fallende Körper repräsentiert einen Gewinn an Arbeit, denn im Augenblick des Fallens war seine (Anfangs-)Geschwindigkeit $\mathrm{c} = 0$, und er erreichte durch das Fallen von der Höhe h, durch Zurücklegung des Fallweges $\mathrm{s} = \mathrm{h}$ die Geschwindigkeit v. Die als Beispiel angeführte Lokomotive hat an Arbeit verloren, sie musste sie abgeben, um ihr Gewicht zu heben und die Widerstände bei Zurücklegung ihres Weges zu überwinden. Setzt man in Gl. 108, $\mathrm{m} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{g}}$, so erhält man

$$\pm \mathbf{A} = \frac{\mathbf{G}}{2\mathbf{g}}(\mathbf{v}^2 - \mathbf{c}^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(108a)}$$

Hat die Lokomotive G = 15 000 Klg. Gewicht und beträgt die Steigung, welche sie auf beispielsweise 600$^{\mathrm{m}}$ Weglänge überwinden muss 2‰, also im ganzen $\frac{600 \cdot 2}{1000} = 1{,}2^{\mathrm{m}}$, so ist die Arbeit, allein um das Gewicht auf diese Höhe zu heben 15 000 · 1,2 = 18 000 Klgmeter. Hatte nun die Maschine $\mathrm{c} = 7^{\mathrm{m}}$ Anfangsgeschwindigkeit und verliert sie 3$^{\mathrm{m}}$ an Geschwindigkeit, so ist $\mathrm{v} = 4^{\mathrm{m}}$; demnach, wenn $\mathrm{A}_g$ die Gewichts- und $\mathrm{A}_w$ die Widerstandsarbeit, die geleistete Arbeit:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_g + \mathrm{A}_w = \frac{\mathrm{G}}{2\mathrm{g}}(\mathrm{v}^2 - \mathrm{c}^2) = \frac{15\,000}{2 \cdot 9 \cdot 81}(4^2 - 7^2) = -\ 25\,245 \text{ Klg.}$$

Diese ist negativ, weil die Dampfkraft ihre Arbeit abgeben musste. Setzt man nun $\mathrm{A}_g = 18\,000$ Klgmeter ein, dann folgt die Widerstands-

arbeit während des Weges

$$A_w = 25\,245 - 18\,000 = 7245 \text{ Klgmeter.}$$

Um obigen Weg von $s = 600^m$ zurückzulegen bei $c = 7$ und $v = 4^m$ ist nach Gl. 2 eine Zeit $t = \frac{2\,s}{v + c} = \frac{2 \cdot 600}{4 + 7} = 110$ Sek. erforderlich. Jede Sekunde müssen somit $\frac{7245}{110} = 66$ Klgmeter für die Widerstandsarbeit aufgewendet werden; das sind $N = \frac{66}{75}$ abg. 9/10 PS; während nach Gl. 34b die ganze Arbeit $N = \frac{25\,245}{110 \cdot 75} = 3$ PS erfordert, die alle Sekunden thätig sein müssen. —

Der Rhein fliesst stellenweise mit $v = 3^m$ Geschwindigkeit. Es soll ein Stromrad ausgeführt werden zum Betriebe einer schwimmenden Mühle (Schiffsmühle). Die Arbeitsleistung des Wassers ist, wenn m die Wassermasse,

$$A = m\,\frac{v^2}{2} = m\,\frac{3^2}{2} = 4{,}5 \cdot m \text{ Klgm.}$$

Die Leistungsfähigkeit eines Wasserlaufes ist nach Beispiel 5, S. 50

$$N = \frac{1000\;Qh}{75}\ \text{PS}.$$

Die Mühle erfordert zum Betrieb $N = 12$ PS, dann folgt für Qh aus vorstehender Gleichung

$$Qh = \frac{75\,N}{1000} = \frac{75 \cdot 12}{1000} = 0{,}9 \text{ Klgmeter}$$

Arbeit für das Wasser. Setzt man diese zu benötigende Arbeit der zur Verfügung stehenden $4{,}5\,m = 4{,}5\,\frac{Q}{g}$ Klgmeter gleich, da die Masse des Wassers $m = \frac{Q}{g} = \frac{Q}{9{,}81}$, so erhält man $0{,}9 = 4{,}5\,\frac{Q}{9{,}81}$ und hieraus das für die 12 PS nötige Betriebswasser

$$Q = \frac{0{,}9 \cdot 9{,}81}{4{,}5} = 2 \text{ cubm. pro Sek.}$$

Das der Geschwindigkeit $v = 3^m$ entsprechende Gefälle ist

$$h = \frac{v^2}{2\,g} = \frac{3^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}46^m.$$

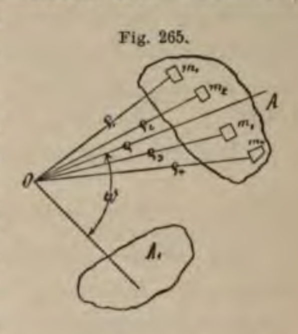
Diese Daten geben hinreichende Anhaltepunkte zur weiteren Berechnung des Rades selbst. —

Die Gleichungen 107 und 108 gelten für eine in gerader Linie fortschreitende Bewegung. Wir wollen in Folgendem versuchen, die lebendige

Kraft, also die Arbeit von solchen Körpern auszudrücken, welche sich um eine Achse drehen.

Es sei, Fig. 265, O eine Achse, um welche sich der Körper A dreht, in einer Sek. gelangt er nach $A_1$. Die der Achse näher liegenden Körperteile haben eine kleinere Geschwindigkeit als die entfernt sich drehenden; zerlegen wir darum den Körper in möglichst viel einzelne Teile. Wir haben diese einzelnen Massenelemente mit $m_1 m_2 m_3 m_4$ . . . bezeichnet, ihre Entfernungen von der Drehungsachse sind $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ . . . ., jedes dieser Elemente hat eine andere Geschwindigkeit $v_1 v_2 v_3$ . . . ., nur die in gleichen Entfernungen von der Achse gelagert sind, haben dieselbe Geschwindigkeit. Wie wir nun schon früher Gl. 33a, S. 45 auf die Arbeitsteilung hinwiesen, müssen wir dieses Prinzip auch hier in Anwendung bringen, um die lebendigen Kräfte der einzelnen Massenelemente aufstellen zu können, diese sind, da der Körper in einer Sekunde nach $A_1$ gelangt,

Fig. 265.



$$m_1 \frac{v_1^2}{2}; \; m_2 \frac{v_2^2}{2}, \; m_3 \frac{v_3^2}{2}, \; m_4 \frac{v_4^2}{2} \; \ldots\ldots$$

Die lebendige Kraft oder die Arbeit des ganzen Körpers ist dann die Summe dieser einzelnen Leistungen, nämlich

$$A = m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} + m_3 \frac{v_3^2}{2} + m_4 \frac{v_4^2}{2} + \ldots\ldots \quad . \quad (a)$$

Jede einzelne in dieser Summe vorkommende Geschwindigkeit lässt sich aber durch den ihr zugehörenden Radius ausdrücken, wenn man bedenkt, dass der Körper $A_1$ also auch alle seine Elemente in einer gewissen Zeit, welche den Umfangsgeschwindigkeiten der Elemente entspricht, einen gewissen Bogenweg $AA_1$ zurückgelegt hat. Sämtliche Elemente müssen hierbei sich um einen gewissen Winkel w gedreht haben. Nach Gesetzen der Geometrie ist bekanntlich die Bogenlänge das Produkt aus dem Radius und dem Winkel im Bogen gemessen, so dass

$$v_1 = \rho_1 w, \; v_2 = \rho_2 w, \; v_3 = \rho_3 w, \; v_4 = \rho_4 w \ldots\ldots \quad . \quad . \quad (b)$$

Man nennt w die Winkelgeschwindigkeit und es ist allgemein

$$\left. \begin{array}{l} w = \dfrac{v}{\rho} = \dfrac{\text{Bogengeschwindigkeit}}{\text{Radius}} \text{ oder} \\ v = w\rho \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad \mathbf{(109)}$$

Führt man in (a) diese in (b) ausgedrückte Werte ein, dann erhält man

$$A = m_1 \frac{\rho_1^2 w^2}{2} + m_2 \frac{\rho_2^2 w^2}{2} + m_2 \frac{\rho_3^2 w^2}{2} + \ldots \text{ oder}$$

$$A = \frac{w^2}{2} (m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 + \ldots).$$

Den in der Klammer stehenden Ausdruck, die Summe der Produkte der Massenteilchen mit dem Quadrat ihrer Entfernungen von der Drehungsachse, nennt man wieder „Moment" und zwar nennt man ihn das „Trägheitsmoment" und bezeichnet dasselbe mit J:

(110) . . $\mathbf{J = m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 + \ldots = \Sigma m \rho^2}$.

Die Arbeitsleistung eines sich drehenden Körpers ist somit

(111) . . . . . . . . $\mathbf{A = \frac{w^2}{2} J}$.

Sie ist also nicht der Masse des Körpers, wie bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung, proportional, sondern dem Trägheitsmoment, dem „Beharrungsvermögen" (infolge der Trägheit), und dem halben Quadrat der Winkelgeschwindigkeit; während die geradlinig sich bewegende Masse dem halben Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, mit der sich der Körper fortbewegt.

Besteht der sich drehende Körper aus einer Fläche oder einer Linie, so ist in Gl. 110 die Flächen- oder Linieneinheit einzuführen für das Massenelement m. —

Ein sich drehendes Rad in „Schwung" gebracht, wird so lange in der Drehung „verharren" bis die Masse oder das Schwunggewicht des Rades, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, während seiner Drehung sein ganzes Arbeitsmoment an die Zapfen oder Achsenreibung abgegeben hat; die geleistete Arbeit ist hier Reibungsarbeit. Würde man um die Achse, oder um ein Rad auf der Achse einen Faden schlingen, an welchem ein Gewicht hängt, so kann eventuell das sich drehende Rad noch bis zum Stillstand eine gewisse Arbeit Ph ausser der Reibungsarbeit leisten, sofern nach Erteilung einer gewissen Geschwindigkeit die Triebkraft abgestellt wird.

Beobachtet man während der Drehung eines Körpers einen Umfangspunkt, so lässt sich leicht ermitteln, um welchen Winkel $w^0$ sich der Körper in einer Sekunde gedreht hat; das diesem Winkel entsprechende Bogenmass $\widehat{w}$, die Winkelgeschwindigkeit, folgt dann aus der Proportion

$$w^0 : 360 = \widehat{w} : 2\pi\rho,$$

woraus für den Halbmesser $\rho = 1$,

(112) . . . . . . . . $\widehat{w} = \frac{2\pi w^0}{360}$,

bezw. wenn die Winkelgeschwindigkeit bekannt, das dieser entsprechende Gradmass

$$w^0 = \frac{360\,\widehat{w}}{2\,\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112\,a)$$

Zur Erleichterung der Umrechnungen haben wir im Anhang auch für die letzten Formeln eine Tabelle angeschlossen.

**Beispiele. I.** Die Winkeldrehung in einer Sekunde sei $w = 30°$, dann ist die zugehörige Winkelgeschwindigkeit für den Radius $= 1$

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot 30}{360} = 0{,}523.$$

Die Bogenlänge bei $30°$ ist, wenn der Kreisradius $1000^{mm}$, $w = 513^{mm}$, der Sinus d. i. die halbe Sehnenlänge 0,5 bezw. $500^{mm}$, die Tangentenlänge $577^{mm}$.

**II.** Dreht sich ein Körper in einer Sekunde $1\frac{1}{2}$ mal herum, dann ist $w^0 = 360 + 180 = 540^0$, sonach seine Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot 540}{360} = 3 \cdot \pi = 9{,}42.$$

Ist die Entfernung des Punktes vom Drehpunkt $\rho = 1{,}2^m$, so würde $w = 1{,}2 \cdot 9{,}42 = 11{,}3^m$.

**III.** Die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes sei 48, so entspricht diese einem Drehungswinkel von

$$w^0 = \frac{360 \cdot 48}{2\,\pi} = 2751{,}6° = 2751°\,36';$$

der Körper hat sich in der Sekunde $\frac{2751{,}6}{360} = 7\frac{2}{3}$ mal herumgedreht. —

**IV.** Der Winkelgeschwindigkeit für $\rho = 1$, $w = 1{,}2317$ kommt die sekundliche Drehung um $70°$ zu. —

Will man die Winkelgeschwindigkeit statt von der Umfangsgeschwindigkeit v von der Anzahl der Umdrehungen in der Minute abhängig darstellen, so verwenden wir für v die Gl. 5a, S. 6

$$v = \frac{2\,\rho\,\pi\,n}{60} = \frac{\rho\,\pi\,n}{30} \text{ und setzen}$$

$$v = w\rho = \frac{\rho\,\pi\,n}{30}, \text{ woraus man findet}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\mathbf{w}} &= \frac{\pi}{\mathbf{30}}\,\mathbf{n} \text{ oder} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{30}}{\pi}\,\widehat{\mathbf{w}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{113})$$

**V.** Dreht sich ein Körper in der Minute $n = 14^1/_3$ mal herum, so ist seine Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{\pi}{30} \cdot 14^1/_3 = 1,5;$$

der zugehörige Winkel ist (lt. Tab.) 86°, um welche sich derselbe Körper alle Sek. dreht. —

**VI.** Einer Winkelgeschwindigkeit $w = 48$ kommen gleich die minutlichen Umgänge

$$n = \frac{30}{\pi} 48 = 458^1/_3,$$

cirka, wie oben schon angegeben

$$\frac{458^1/_3}{60} = 7^2/_3 \text{ in der Sekunde. —}$$

**VII.** Zu dem Winkel $w° = 200° \, 50' \, 50''$ gehört die Bogenlänge oder die Winkelgeschwindigkeit: (s. Tabellen.)

$$w = 3,4907 + 0,0145 + 0,0002 = 3,5054,$$

und die minutlichen Umdrehungen

$$n = \frac{30}{\pi} w = \frac{30}{\pi} 3,5054 = 33 \text{ abg. —}$$

Der Hauptfaktor bei Beurteilung der Leistungsfähigkeit von sich drehenden Körpern ist aber das Trägheitsmoment, weil dasselbe die Dimensionen des Körpers enthält, auf die man zurückschliessen will, wenn die Umdrehungen oder die Winkelgeschwindigkeit und die zu leistende Arbeit gegeben ist. Die Leistungsfähigkeit wird nun offenbar grösser oder kleiner, wenn sich die Elemente mehr oder weniger von der Drehungsachse entfernen oder sich dieser nähern. Das Trägheitsmoment, somit die Leistung bei unveränderter Geschwindigkeit, wird hiernach am kleinsten, wenn die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Man nennt das Trägheitsmoment äquatorial, wenn die Drehungsachse in der Hauptebene (Bildebene) des Körpers oder der Fläche liegt,

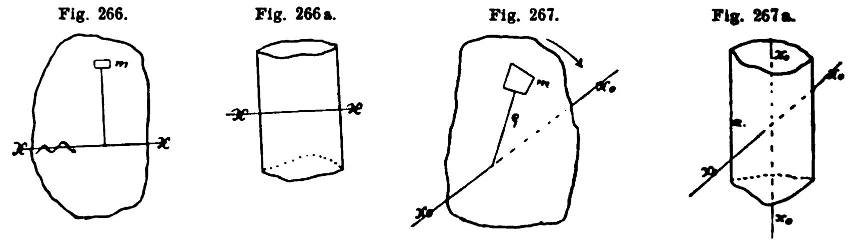
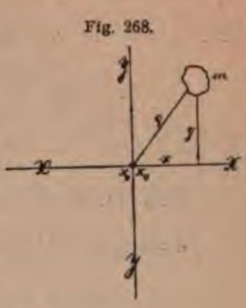



Fig. 266, hingegen polar, wenn der Körper oder die Fläche sich um eine auf obige Fläche senkrecht stehende Achse dreht, Fig. 267.

Beide Trägheitsmomente stehen in folgendem Zusammenhang. Es sei xx die äquatoriale und $x_0 x_0$ die polare Drehungsachse, zeichnen wir die letztere nicht wie Fig. 267 in isometrischer, sondern in normaler Projection, Fig. 268, so steht die Drehungsachse $x_0 x_0$ senkrecht auf der Bildfläche, es ist dann wie in Gl. 110: $J = \Sigma m \rho^2$.

Fig. 268.



Sind nun xx und yy zwei in die Bildfläche fallende, also äquatoriale Achsen, welche senkrecht aufeinander stehen und durch 0 gehen, so bilden die Drehungsradien Hypothenusen von rechtwinkeligen Dreiecken, welche für jedes Element durch Senkrechte auf die Drehungsachsen gefunden werden können (Koordinaten) und es ist für die Elemente

$$\rho_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2,\ \rho_2{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2,\ \rho_3{}^2 = x_3{}^2 + y_3{}^2 \ldots.$$

Setzt man diese Beziehungen in Gl. 110 ein, so erhält man

$$J = m_1 (x_1{}^2 + y_2{}^2) + m_2 (x_2{}^2 + y_2{}^2) + m_3 (x_3{}^2 + y_3{}^2) + \ldots$$

oder aufgelöst und geordnet,

$$J = [m_1 x_1{}^2 + m_2 x_2{}^2 + m_3 x_3{}^2 + \ldots.] + [m_1 y_1{}^2 + m_2 y_2{}^2 + m_3 y_3{}^2 + \ldots].$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke sind aber wieder Trägheitsmomente,

$$\left.\begin{aligned} J_x &= m_1 x_1{}^2 + m_2 x_2{}^2 + m_3 x_3{}^2 + \ldots = \Sigma m x^2 \\ J_y &= m_1 y_2{}^2 + m_2 y_2{}^2 + m_3 y_3{}^2 + \ldots = \Sigma m y^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (110a)$$

$J_x$ als äquatoriales Trägheitsmoment bezieht sich auf die Achse XX, $J_y$ auf die Äquatorachse YY. Bezeichnet man das polare Trägheitsmoment mit $J_p$, dann ist

$$\mathbf{J_p = J_x + J_y}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

das polare Trägheitsmoment ist die Summe zweier äquatorialen, die in einer Ebene senkrecht auf der Polarachse stehend, liegen. —

Wir wollen nun in folgendem zunächst einige Trägheitsmomente von Flächen und Körpern berechnen.

**Beispiele. I.** Trägheitsmoment eines Rechteckes, welches sich um die Basisachse dreht.

Fig. 269.



Das Rechteck, Fig. 269, habe eine Höhe h und die Breite b, die Drehungsachse ist XX. Die einzelnen Massen- hier die gewichtslosen Flächenelemente sind $f_1 f_2 f_3$, parallel zur Achse liegende Flächenstreifen von gleicher Höhe; sind n solche vorhanden, dann hat jeder Streifen die Höhe

$\frac{h}{n}$ in irgend einem Massstab ausgedrückt. Die Flächen sind

$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = b\frac{h}{n};$$

ihre Abstände von der Drehungsachse

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{h}{n},\ x_2 = \frac{h}{n} + \frac{1}{2}\frac{h}{n} = \frac{3}{2}\frac{h}{n},\ x_3 = 2\frac{h}{n} + \frac{1}{2}\frac{h}{n} = \frac{5}{2}\frac{h}{n},\ x_4 = \frac{7}{2}\frac{h}{n}\ \ldots .$$

Das Trägheitsmoment nach Gl. 110

$$J = f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + \ldots = b\frac{h}{n}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots\right], \text{ oder}$$

$$J = \frac{bh^3}{4n^3}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots).$$

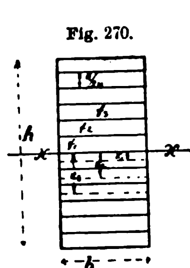
Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist aber (s. Bemerk. S. 91)

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1), \text{ sonach}$$

$$J = \frac{bh^3}{4n^3}\frac{n}{3}(4n^2 - 1) = bh^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}\right).$$

Lässt man n zu $\infty$ anwachsen, dann ist $\frac{1}{12n^2} = 0$ und $J = \frac{bh^3}{3}$.

Fig. 270.



Verlegen wir die Drehungsachse in den Schwerpunkt des Rechtecks, Fig. 270, und teilen jede Hälfte in n Teile, dann sind die Streifenhöhen $\frac{h}{2n}$ und die Entfernungen von der Achse

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{h}{2n},\ x_2 = \frac{3}{2}\frac{h}{2n},\ x_3 = \frac{5}{2}\frac{h}{2n}\ \ldots\ldots$$

Da sich beide Hälften um die Achse drehen, so ist das ganze Trägheitsmoment

$$J = 2\frac{bh}{2n}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{h}{2n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{h}{2n}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\frac{h}{2n}\right)^2 + \ldots\right] \text{ oder}$$

$$J = \frac{bh^3}{16n^3}(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots [2n-1]^2),$$

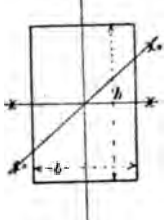
man findet obige Reihensumme eingesetzt,

$$J = \frac{bh^3}{48n^2}(4n^2 - 1) = \frac{bh^3}{48}\left(4 - \frac{1}{n^2}\right), \text{ wenn } n = \infty$$

$$J = \frac{1}{12}bh^3.$$

Um nach Gl. 114 das polare Trägheitsmoment zu berechnen, berücksichtigen wir, dass, Fig. 271, die beiden äquatorialen Trägheitheitsmomente, bezogen auf die Schwerpunktsachsen, XX und YY sind

Fig. 271.



$$J_x = \frac{1}{12} bh^3 \text{ und } J_y = \frac{1}{12} hb^3,$$

somit das Polarträgheitsmoment

$$J_p = J_x + J_y = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3) = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2).$$

**II.** Trägheitsmoment eines Quadrates.

Setzen wir in die Formeln für das Rechteck $b = h$, so erhalten wir

$J = \frac{1}{3} h^4$ für das äquat. Trägheitsmoment um eine Seitenachse,

$J = \frac{1}{12} h^4$ für das äquat. Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse und

$J_p = \frac{1}{6} h^4$ für das polare Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse.

**III.** Trägheitsmoment einer prismatischen Stange, deren Querschnitt f, Länge l, welche senkrecht um eine horizontale Basisachse XX, Fig. 272, dreht. Die Stange wiege $\gamma$ Klg. pro Volumeneinheit; das ganze Gewicht der Stange ist dann $G = \gamma f l$.

Fig. 272.

Wir teilen die Stange wieder in n gleiche Teile, die einzelnen Massenelemente werden dann gleich gross und gleich schwer,

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = \frac{1}{n}\frac{G}{g} = \frac{1}{n}\frac{\gamma f l}{g}.$$

Die Entfernungen derselben von der Drehachse sind

$$\rho_1 = \frac{l}{2n}, \quad \rho_2 = \frac{3}{2}\frac{l}{n}, \quad \rho_3 = \frac{5}{2}\frac{l}{n} \ldots.$$

Das Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{n}\frac{G}{g}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \ldots) = \frac{G}{ng}\left[\left(\frac{l}{2n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{l}{n}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\frac{l}{n}\right)^2 + \ldots\right],$$

$$J = \frac{G}{4gn^3}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 \ldots).$$

Führt man wieder obige Reihe ein, so reduciert sich J zu

$J = \frac{Gl^2}{g}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}\right)$, lässt man n unendlich gross werden, dann folgt endlich

$$J = \frac{1}{3}\frac{G}{g} l^2 = \frac{1}{3}\frac{\gamma f l^3}{g} = \frac{1}{3}\frac{\gamma}{g} V l^2 = \frac{1}{3} m l^2,$$

wenn V das Volumen und m die Masse der Stange.

Eine eiserne Stange von $100^{mm}$ Durchmesser wiegt pro lauf. Meter 61 Klg. Ist die Stange $l = 2^m$ lang, dann ist ihr Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{3}\frac{2 \cdot 61}{9{,}81} \cdot 2^2 = 17 \text{ abg.}$$

Dreht sich diese Stange in der Minute n = 20 mal von irgend einer Kraft getrieben, so ist zunächst die Winkelgeschwindigkeit nach Gl. 113

$$w = \frac{\pi}{30} n = \frac{3{,}14}{30} \cdot 20 = 2{,}1,$$

demnach nach Gl. 111 die Arbeitsleistung in der Sek.

$$A = \frac{w^2}{2} J = \frac{2{,}1^2}{2} 17 = 37 \text{ Klgmeter oder } N = \frac{37}{75} = \frac{1}{2} \text{ PS}. —$$

---

Setzt man aus Gl. 113 $w = \frac{\pi}{30n}$ in Gl. 111 ein, dann erhält man A abhängig vom Trägheitsmoment und den minutlichen Umgängen

$$(115) \quad \mathbf{A = \left(\frac{\pi}{30} n\right)^2 \frac{J}{2} = 0{,}005\,483\, J n^2 \text{ Klgmeter},}$$

$$\mathbf{\text{abg. } A = \frac{1}{180} J n^2 \text{ Klgmeter.}}$$

Da diese Arbeit in Meter und w in Sek., so folgt die Leistung in PS

$$(116) \quad \mathbf{N = \frac{A}{75} = \frac{0{,}005\,483\, J n^2}{75} = 0{,}00\,007\,312\, J n^2,}$$

$$\mathbf{\text{abg. } \frac{J n^2}{13500} \text{ PS},}$$

wenn ein Körper dessen Trägheitsmoment J sich in einer Minute n mal dreht.

Die Arbeitsleistung wächst natürlich mit dem Quadrat der Umdrehungen; eine Stange, welche n = 50 Umdrehungen pro Minute macht und N = 2 PS leisten soll, oder soviel Betriebskraft erfordert, braucht das Trägheitsmoment abg.:

$$J = \frac{13\,500\, N}{n^2} = \frac{2 \cdot 13\,500}{50^2} = 11 \text{ in Metermass,}$$

also bei $l = 2^m$ Länge

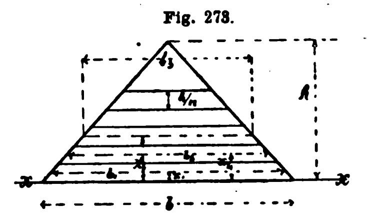
Das Gewicht

$$G = \frac{3\,J \cdot g}{l^2} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 9{,}81}{4} = 83 \text{ Klg.}$$

abgesehen von allen Widerständen.

---

**IV.** Trägheitsmoment eines Dreiecks.


Fig. 278.

Es soll das Trägheitsmoment eines Dreiecks, dessen Basis b und Höhe h, gesucht werden, wenn sich das Dreieck um die Basisachse XX dreht.

Teilt man wieder die Höhe h in n gleich hohe Teile, deren Breiten $b_1\,b_2\,b_3\,\ldots$ sein mögen, so sind die Flächenelemente

$$f_1 = b_1 \frac{h}{n},\quad f_2 = b_2 \frac{h}{n},\quad f_3 = b_3 \frac{h}{n} \ldots.$$

Die Abstände dieser von XX sind wieder

$$x_1 = \frac{h}{2\,n},\quad x_2 = \frac{3}{2}\frac{h}{n},\quad x_3 = \frac{5}{2}\frac{h}{n} \ldots.$$

Die verschiedenen Breiten lassen sich abhängig von b durch folgende Proportionen darstellen:

$$b_1 : h - x_1 = b : h$$
$$b_2 : h - x_2 = b : h$$
$$b_3 : h - x_3 = b : h$$
$$\vdots$$

Setzt man in diese $x_1\,x_2\,x_3 \ldots.$ ein und entwickelt die Breiten, so gelangt man zu

$$b_1 = \frac{b}{h}(h - x_1) = \frac{b}{h}\left(h - \frac{h}{2\,n}\right) = \frac{b}{2n}(2n - 1),$$

$$b_2 = \frac{b}{h}(h - x_2) = \frac{b}{h}\left(h - \frac{3}{2}\frac{h}{n}\right) = \frac{b}{2n}(2n - 3),$$

$$b_3 = \frac{b}{2n}(2n - 5),\quad b_4 = \frac{b}{2n}(2n - 7) \ldots..$$

Die Summe der Flächenelemente und die Quadrate ihrer Entfernungen von der Drehungsachse im Sinne der Gl. 110 geordnet, ist hiernach

$$J = \frac{h}{n}\left[\frac{b}{2\,n}(2n - 1)\left(\frac{h}{2n}\right)^2 + \frac{b}{2n}(2n - 3)\left(\frac{3}{2}\frac{h}{n}\right)^2 + \frac{b}{2n}(2n - 5)\left(\frac{5}{2}\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots\right],$$

$$J = \frac{bh^3}{8n^4}[(2n-1) + (2n-3)3^2 + (2n-5)5^2 + \ldots.],$$

die Klammern aufgelöst und geordnet

$$J = \frac{bh^3}{8n^4}[2n(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots) - (1 + 3^3 + 5^3 + \cdot -)].$$

Setzt man die schon mehrfach erwähnten Reihensummen ein, so erhält man

$$J = \frac{bh^3}{8n^4}\left[2n\frac{n}{3}(4n^2-1) - n^2(2n^2-1)\right] = \frac{bh^3}{24n^2}(2n^2+1)$$

$$= \frac{bh^3}{24}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

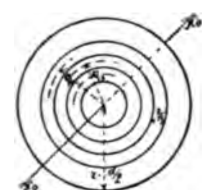
das Resultat wird um so genauer je grösser n, wenn $n = \infty$, dann wird schliesslich

$$J = \frac{bh^3}{12}.$$

**V. Trägheitsmoment eines Kreises.**

a) Das polare Trägheitsmoment. Fig. 274.

Fig. 274.



Wir teilen den Kreis in n konzentrische gleich breite Kreisringe; ist r der Kreishalbmesser, so ist die Breite eines jeden Ringes $\frac{r}{n}$, die Abstände von der Achse $X_0 X_0$ sind

$$\rho_1 = \frac{r}{2n},\ \rho_2 = \frac{3}{2}\frac{r}{n},\ \rho_3 = \frac{5}{2}\frac{r}{n} \ldots.$$

Die Flächen der Ringe ergeben sich aus deren mittleren Längen $2\rho_1\pi$, $2\rho_2\pi$, $2\rho_3\pi$ .... und den Breiten,

$$f_1 = 2\rho_1\pi\frac{r}{n} = \frac{\pi r^2}{n^2},$$

$$f_2 = 2\rho_2\pi\frac{r}{n} = \frac{3\pi r^2}{n^2},$$

$$f_3 = \frac{5\pi r^2}{n^2},\ f_4 = \frac{7\pi r^2}{n^2} \ldots.$$

Das Trägheitsmoment ist nach Gl. 110

$$J_p = \Sigma f\rho^2 = f_1\rho_1^2 + f_2\rho_2^2 + \ldots = \pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{r}{2n}\right)^2$$

$$+ 3\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{3r}{2n}\right)^2 + 5\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{5r}{2n}\right)^2 + \ldots$$

$$J_p = \pi\frac{r^4}{4n^4}(1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots).$$

Führt man die Reihe $1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots = n^2(2n^2 - 1)$ ein, so ergiebt sich

$$J_p = \frac{\pi}{4} r^4 \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ und wenn } n = \infty,$$

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} \text{ oder } r = \frac{d}{2} \text{ gesetzt, wenn d der Durchmesser,}$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4.$$

b) Das äquatoriale Trägheitsmoment.

Beachtet man, dass nach Gl. 114 $J_p = J_x + J_y$ und die beiden äquatorialen Trägheitsmomente im Kreis, ebenso wie beim Quadrat gleich sind, dann folgt

$$J_p = 2 J_x, \text{ woraus } J_x = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

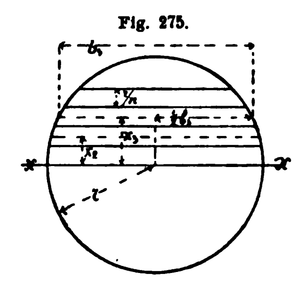


Fig. 275.

Will man das äquatoriale Trägheitsmoment durch Zerlegung des Kreises in Flächenstreifen entwickeln, dann seien, Fig. 275, XX die Achse, $\frac{r}{n}$ die Höhe eines Streifens, $b_1 b_1 b_3 \ldots$ die verschiedenen Breiten,

$x_1 = \frac{r}{2n}$, $x_2 = \frac{3}{2}\frac{r}{n}$, $x_3 = \frac{5}{2}\frac{r}{n} \ldots$ die Entfernungen der Flächenelemente von der Achse.

Die einzelnen Breiten ergeben sich aus rechtwinkeligen Dreiecken, von denen wir das der Breite $b_3$ eingezeichnet haben; die diesen Breiten bezüglichen Beziehungen sind

$$\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + x_1^2 = r^2, \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + x_2^2 = r^2, \left(\frac{b_3}{2}\right)^2 + x_3^2 = r^2 \ldots\ldots$$

Diese Gleichungen liefern $x_1 x_2 \ldots$ eingesetzt,

$$b_1 = 2\sqrt{r^2 - x_1^2} = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2n}\right)^2} = \frac{r}{n}\sqrt{4n^2 - 1},$$

$$b_2 = \frac{r}{n}\sqrt{4n^2 - 3^2}, \; b_3 = \frac{r}{n}\sqrt{4n^2 - 5^2} \ldots$$

Für das Trägheitsmoment des Halbkreises erhält man jetzt

$$J = \frac{r}{n} b_1 x_1^2 + \frac{r}{n} b_2 x_2^2 + \frac{r}{n} b_3 x_3^2 + \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$J = \frac{r}{n}\frac{r}{n}\sqrt{4n^2 - 1}\left(\frac{r}{2n}\right)^2 + \frac{r}{n}\frac{r}{n}\sqrt{4n^2 - 3^2}\left(\frac{3r}{2n}\right)^2 + \ldots \text{ oder}$$

(a) $$J = \frac{r^4}{4n^4}\left(\sqrt{4n^2-1} + 3^2\sqrt{4n^2-3^2} + 5^2\sqrt{4n^2-5^2} + \ldots\right).$$

Das des ganzen Kreises ist doppelt so gross

(b) $$J = \frac{r^4}{2n^4}\left(\sqrt{4n^2-1} + 3^2\sqrt{4n^2-3^2} + 5^2\sqrt{4n^2-5^2} + \ldots\right).$$

Setzt man dieses dem oben gefundenen $\frac{\pi}{4} r^4$ gleich, so müsste sein

$$\pi = \frac{2}{n^4}\left(\sqrt{4n^2-1} + 3^2\sqrt{4n^2-3^2} + 5^2\sqrt{4n^2-5^2} + 7^2\sqrt{4n^2-7^2} + \ldots\right) = 3{,}1\,415\,926\ldots$$

Thatsächlich erhält man auch, je mehr Glieder man in Rechnung zieht, das Kreisumfangsverhältnis $\pi$; setzt man $n = 10$, so wird für zehn Glieder

$$\pi = \frac{2}{10\,000}(19{,}98 + 177{,}96 + 484{,}12 + 918{,}02 + 1446{,}71 + 2021{,}10 + 2568{,}58 + 2976{,}48 + 3044{,}82 + 2254{,}44) = 3{,}182.$$

Je mehr Glieder man in den Gleichungen a und b berücksichtigt um so näher wird das äquatoriale Trägheitsmoment eines Halbkreises

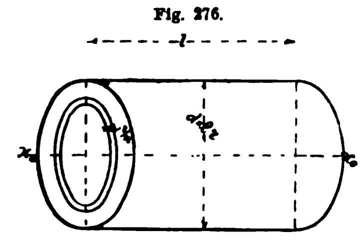
$$J = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128},$$

das des Vollkreises wie oben

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi r^4}{4}.$$

**VI.** Trägheitsmoment eines Cylinders, welcher sich um die Längsschwerpunktsachse dreht, Polarachse.

Fig. 276.



Es sei $r = \frac{d}{2}$ der Halbmesser, l die Länge des Cylinders, $X_0X_0$, Fig. 276, die Achse.

Wir teilen den Cylinder ein in konzentrische Röhrenelemente, deren Abstände von $X_0X_0$ wie in Fig. 274

$$\rho_1 = \frac{r}{2n},\ \rho_2 = \frac{3r}{2n},\ \rho_3 = \frac{5r}{2n}\ldots,$$

deren Stärken $\frac{r}{n}$ und Längen l; der Cylinder wiege $\gamma$ Klg. pro Kbm.

Die einzelnen Körperelemente sind als Volumina betrachtet

$$v_1 = 2\rho_1\pi\frac{r}{n}l,\ v_2 = 2\rho_2\pi\frac{r}{n}l,\ v_3 = 2\rho_3\pi\frac{lr}{n}\ldots$$

Die Radien eingeführt

$$v_1 = \frac{r^2}{n^2}\pi l,\ v_2 = 3\frac{r^2}{n^2}\pi l,\ v_3 = 5\frac{r^2}{n^2}\pi l \dots$$

Die einzelnen sich drehenden Massenelemente sind folglich

$$m_1 = \frac{\gamma}{g}v_1,\ m_2\frac{\gamma}{g}v_2,\ m_3 = \frac{\gamma}{g}v_3 \dots,$$

endlich das Trägheitsmoment

$$J = \Sigma m\rho^2 = \frac{\gamma}{g}\frac{r^2}{n^2}\pi l\left(\frac{r}{2n}\right)^2 + \frac{\gamma}{g}3\frac{r^2}{n^2}\pi l\left(3\frac{r}{2n}\right)^2$$
$$+\frac{\gamma}{g}5\frac{r^2}{n^2}\pi l\left(5\frac{r}{2n}\right)^2 + \dots$$

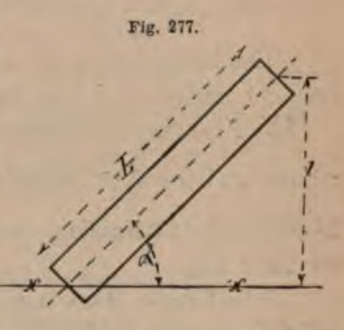
Nach entsprechender Zusammenziehung findet man

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{r^4}{4n^4}\pi l(1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots) = \frac{\gamma}{g}l\frac{\pi}{2}r^4 \text{ oder}$$

$$J = \frac{\gamma}{g}l\frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\gamma}{g}l\frac{\pi}{32}d^4 = \frac{V\gamma}{g}\frac{r^2}{2} = \frac{V\gamma}{g}\frac{d^2}{8} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}$$
$$= \frac{G}{g}\frac{d^2}{8} = m\frac{r^2}{2},$$

wenn V das Volumen des Cylinders und G das Gewicht, oder m die Masse ist.

**VII.** Trägheitsmoment einer unter einem Winkel sich drehenden Stange von prismatischer Form.


Fig. 277.

Setzen wir in die Formeln für das Trägheitsmoment einer normal um eine Achse sich drehenden Stange, Beisp. 3, S. 309, $l = L \sin\alpha$, dann erhalten wir das Trägheitsmoment einer unter einem Winkel sich drehenden Stange.

$$J = \frac{1}{3}m L^2 \sin^2\alpha = \frac{1}{3}\frac{G}{g}L^2 \sin^2\alpha.$$

Die Leistungsfähigkeit wird um so geringer, je kleiner $< \alpha$.

**VIII.** Trägheitsmoment eines um seine Schwerpunktsachse sich drehenden prismatischen Körpers, dessen Länge l und Querschnitt f, Fig. 278. Stellen wir einen Vergleich dieser Drehung mit der in Fig. 272 an, so stehen offenbar beide zu einander in demselben Verhältnis, wie die Rechtecksdrehung der Figur 269 und 270.


Fig. 278.

Setzen wir in den Summationsausdruck des Beisp. 3 für $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$ und für G, $\frac{1}{2}$ G und beziehen die Drehung auf beide Stangenhälften, so wird

$$J = 2\frac{G}{2ng}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\frac{1}{2n}\right)^2 + \ldots\right],$$

hieraus findet man gleichlautend mit Fig. 269

$$J = \frac{1}{12}\frac{G}{g}l^2 = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}\frac{\gamma}{g}fl^3,$$

wenn der Körper $\gamma$ Klg. pro Kubikmeter wiegt, oder G das Gewicht und m die Masse ist.

Lassen wir z. B. die in Fig. 272 bemerkte Stange wenn G = 122 Klg. Gewicht, $l = 2^m$ Länge, $110^{mm}$ Durchmesser um ihre äquatoriale Schwerpunktsachse sich drehen, dann ist ihr Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{12}\frac{G}{g}l^2 = \frac{1}{12}\frac{122}{9{,}81}2^2 = 4{,}1;$$

die Leistungsfähigkeit ist nur den vierten Teil so gross, als die bei der Drehung um die in Figur 272 gezeichnete Achse, wir fanden dort J = 17.

Lassen wir diese Stange (Cylinder) um eine Polarachse sich drehen, Fig. 276, dann wird in Metermass

$$J = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2} = \frac{G}{g}\frac{d^2}{8} = \frac{122}{9{,}81}\overline{0{,}1^2} = 0{,}02 \text{ abg.}$$

Hier kommt nicht die achsiale, sondern die radiale Ausdehnung in Betracht und diese ist im Verhältnis klein zur Länge des Cylinders. —

**IX.** Eine eiserne Scheibe, scheibenförmiger Cylinder von $d = 2^m$ Durchmesser und $b = 0{,}1^m$ Stärke hat ein Volumen von $V = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot b = \frac{\pi}{4} 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}314$ Kubikm., und wiegt $G = 1000 \cdot \sigma V = 1000 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}314 = 2360$ Klg.

Rotiert diese Masse um ihre polare Schwerpunksachse, dann ist ihr Trägheitsmoment S. 315

$$J = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2} = \frac{2360}{9 \cdot 81}\frac{1^2}{2} = 118.$$

Bei n = 50 Umdrehungen in der Minute kann sie, abgesehen von Nebenhindernissen, leisten oder fordert zum Betrieb, nach Gl. 115 bezw. 116,

$$N = \frac{J \cdot n^2}{135\,000} = \frac{118 \cdot \overline{50^2}}{135\,000} = 2{,}2 \text{ PS}.$$

Verwandelt man obiges Volumen V = 0,314 Kubikm. in einen

Cylinder von $l = 2^m$ Länge, so wird dessen Durchmesser $\mathfrak{D}$ aus

$$V = \frac{\pi \mathfrak{D}^2}{4} \cdot 2,\ \mathfrak{D} = \sqrt{\frac{0{,}314 \cdot 2}{3{,}14}} = 0{,}45^m.$$

Dreht sich dieser um seine äquatoriale Schwerpunktsachse, dann wird das Trägheitsmoment nach S. 315, Fig. 278

$$J = \frac{1}{12} \frac{G}{g} l^2 = \frac{1}{12} \frac{2360}{9 \cdot 81} 2^2 = 79,$$

die Arbeit in $\mathscr{PS}$ abg.,

$$N = \frac{J n^2}{135\,000} = \frac{79 \cdot 50^2}{135\,000} = 1{,}5\ \mathscr{PS}.$$

Lässt man diesen Cylinder um seine Polorachse sich drehen, wieder mit $n = 50$ Umdrehungen in der Minute, so ist,

$$J = \frac{G}{g} \frac{\mathfrak{D}^2}{8} = \frac{2360}{9 \cdot 81} \frac{\overline{0{,}45}^2}{8} = 5{,}9 \text{ und}$$

$$N = \frac{5{,}9 \cdot 50^2}{135\,000} = 0{,}11\ \mathscr{PS}.$$

Ein solcher Cylinder kann im letzteren Fall leicht von einem Menschen in Umdrehung gehalten werden.*) — —

Statt, wie oben, die ganze sich drehende Masse des Körpers in ihre Elemente zu zerlegen und die lebendige Kraft jedes einzelnen Momentes zu einer Summe zu vereinigen, können wir uns auch die ganze Masse des Körpers $\Sigma m$ in Gl. 110, die Trägheitsmasse, welche man mit einem Buchstaben bezeichnen kann,

$$\mu = \Sigma m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

in einem Punkt vereinigt denken, die Entfernung dieser idealen Masse von der Drehungsachse ergiebt sich aus Gl. 110

$$J = (\Sigma m)\, \rho^2 = \mu \rho^2, \text{ sie ist}$$

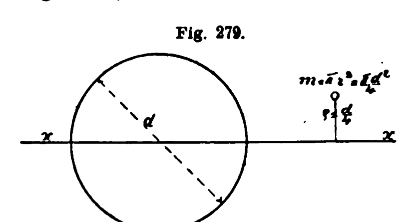
$$\rho = \sqrt{\frac{J}{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (118)$$

Man nennt $\rho$ in diesem Fall den Trägheitshalbmesser.**)

*) Betrachtet man ein tanzendes Paar als Vollcylinder von $0{,}5^m$ Durchmesser und $G = 2 \,.\, 70 = 140$ Klg. Gewicht, dann ist das Trägheitsmoment bei einer Umdrehung $J = \frac{G}{g} \frac{d^2}{8} = \frac{2 \,.\, 70}{9 \,.\, 81} \frac{\overline{0{,}5}^2}{8} = 0{,}45$. Dreht sich das Paar in einer Minute $n = 100$mal, so ist die Arbeitsleistung $N = \frac{J \,.\, n^2}{135000} = \frac{0{,}45 \,.\, 10000}{135000} = \frac{1}{30}\ \mathscr{PS}$. Das Drehen des Menschen um eine Vertikalachse ist, abgesehen von der Fussbodenreibung, leichter als das Gehen. 120 tanzende Paare würden hiernach bei jeder Umdrehung die Arbeit leisten, die ein kleiner Mahlgang erfordert.

**) S. Bemerkung w. u.

**X.** Die Flächenmasse eines Kreises, um diesen Ausdruck zu gebrauchen $\frac{\pi d^2}{4} = r^2\pi$, dessen äquatoriales Trägheitsmoment $J = \frac{\pi}{64} d^4$ in einem Punkt vereinigt, leistet dasselbe, wie der sich um xx drehende Kreis, Fig. 279, wenn sie in der Entfernung des Trägheitshalbmessers



$$\rho = \sqrt{\frac{J}{\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{1}{4} d$$

für die Drehung verwertet wird.

Der Trägheitshalbmesser eines Rechtecks ist

$$\rho = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} b h^3}{b h}} = 0{,}29\ h,$$

wenn sich das Rechteck um seine Äquatorialschwerpunktsachse dreht.

Der Trägheitshalbmesser eines Kreises, der sich um seine Polarachse dreht, ist

$$\rho = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{32} d^4}{\frac{\pi}{4} d^2}} = 0{,}35\ d.$$

Der Trägheitshalbmesser ist hier grösser als bei der äquatorialen Kreisdrehung.

Wir fanden als Trägheitsmoment eines sich um die Basisachse drehenden Dreiecks $J = \frac{1}{12} b h^3$, der diesem Dreieck entsprechende Trägheitshalbmesser ist

$$\rho = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{2} b h}} = h \sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}4\ h.$$

Obgleich bei gleichen Hauptdimensionen b und h das Dreieck halb so gross wie das Rechteck, so muss aber doch, wenn das Dreieck um die Basis und das Rechteck um die Schwerpunktsachse sich dreht, die Dreiecksfläche in einer verhältnismässig geringeren Entfernung von der Drehachse konzentriert werden, als die doppelte Rechtecksmasse.

Der Trägheitshalbmesser der obigen eisernen Scheibe von $d = 2^m$

Durchmesser und $b = 0{,}1^m$ Breite ist auch wie beim Kreis

$$\rho = \sqrt{\frac{\frac{G}{g}\,\frac{d^2}{8}}{\frac{G}{g}}} = d\sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}35 \text{ d.}$$

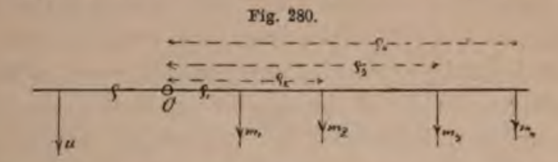
Wir erhalten dieselbe Leistungsfähigkeit, wenn wir das Scheibengewicht $G = 2360$ Klg. auf einen Punkt in der Entfernung

$$\rho = 0{,}35 \cdot 2 = 0{,}7^m$$

von der Drehungsachse konzentrieren würden. — —

Drehen sich, Fig. 280, mehrere Massen an einer gewichtslos gedachten Stange befestigt um den Drehpunkt O, so tritt Gleichgewicht

Fig. 280.



ein, wenn die Arbeitsleistungen, also die lebendigen Kräfte nach dem Momentengesetz sich ausgleichen, wenn

$$\mu \rho^2 = m_1\,\rho_1^2 + m_2\,\rho_2^2 + m_3\,\rho_3^2 + \ldots = \Sigma m \rho^2 = J,$$

woraus, weil eben die rechte Seite der Gleichung das Trägheitsmoment darstellt, wieder folgt

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{\mu}},$$

$\mu$ kann hierbei nur die Summe der Massen sein.

Dreht das obige Gewicht $G = 2360$ an $0{,}7^m$ Halbmesser der Scheibe an derselben Achse entgegen, so tritt Gleichgewicht ein, findet keine Drehung statt.

Vergleicht man, Figur 281, zwei sich drehende Massen in ihren Leistungen miteinander, so tritt Gleichgewicht ein, wenn

Fig. 281.

$$M_1\,\rho_1^2 = M_2\,\rho_2^2.$$

Zwei sich drehende Massen, wenn sie eine gemeinschaftliche Drehungsachse haben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Achse

$$M_1 : M_2 = \rho_2^2 : \rho_1^2 \quad \ldots \ldots \ldots (119)$$

Da nun die Halbmesser den Umfangsgeschwindigkeiten proportional sind, bei gleichmässiger Drehung, so folgt auch

$$M_1 : M_2 = V_2^2 : v_1^2 \quad \ldots \ldots \ldots (119a)$$

bezw. wenn $G_1$ und $G_2$ die Gewichte sind,

(119b) . . . . . . $G_1/g : G_2/g = V_2^2 : v_1^2$.

Soll die obige Masse von 2360 Klg. Gewicht statt in 0,7ᵐ Entfernung in 1ᵐ Entfernung wirken, dann ist ihre Leistungsfähigkeit natürlich grösser; um das Gleiche zu leisten kann sie als drehende Masse kleiner sein, natürlich nur

$$M_1 = \frac{M_2 \rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{2360 \cdot 0{,}7^2}{1} = 1156 \text{ Klg. betragen.} —$$

Wir wollen nun noch zu erörtern versuchen, wie sich zwei Trägheitsmomente desselben Körpers oder derselben Fläche zu der Körpermasse, oder zur Fläche verhalten, wenn die Trägheitsmomente sich auf verschiedene parallel zu einander gelagerten Achsen beziehen.

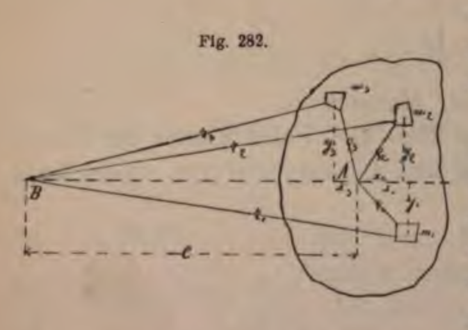
Offenbar wird das Trägheitsmoment, wie übrigens schon angedeutet, also auch die Leistung eines sich drehenden Körpers grösser, je weiter hinweg die Massen von der Drehungsachse lagern; ist uns nun das Trägheitsmoment auf eine beliebige Achse bekannt J, dann ist das auf eine dem Schwerpunkt des Körpers näher liegende Achse bezogen, $J_1$, kleiner, umgekehrt wird $J_1$ grösser, wenn die parallel gelagerte Drehungsachse entfernter angebracht wird.

Allgemein ist hiernach

$$J_1 = J \pm S,$$

worin S jedenfalls von der Entfernung der beiden Achsen abhängen muss.

Fig. 282.



Die Masse M in der beistehenden Figur dreht sich um die Schwerpunktsachse A; $m_1$ $m_2$ . . . sind die einzelnen Elemente, welche in den Entfernungen $\rho_1$ $\rho_2$ $\rho_3$ . . . von A sich bewegen, sie entwickeln das Trägheitsmoment

(a) . . . $J = m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 + \ldots = \Sigma m \rho^2$.

Dreht sich die Masse M um die Achse B, so ist dann das Trägheitsmoment, wenn $r_1$ $r_2$ $r_3$ . . . die Entfernungen der einzelnen Massen von B,

(b) . . . $J_1 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots = \Sigma m r^2$.

Verbindet man die beiden Achsen, deren Entfernung e sein möge, und ersetzt jede der Hypothenusen $\rho_1$ $\rho_2$ . . . durch ihre beiden Katheden (Koordinaten) $x_1$ $y_1$, $x_2$ $y_2$, $x_3$ $y_3$ . . ., dann kann man folgende Beziehungen

zwischen $r_1$ $\rho_1$ x und y aufstellen:

$$r_1^2 = (e + x_1)^2 + y_1^2 = e^2 + x_1^2 + 2\,ex_1 + y_1^2$$
$$r_2^2 = (e + x_2)^2 + y_2^2 = e^2 + x_2^2 + 2\,ex_2 + y_2^2$$
$$r_3^2 = (e + x_3)^2 + y_3^2 = e^2 + x_3^2 + 2\,ex_3 + y_3^2$$
$$\vdots$$

in diesen Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 = \rho_2^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 = \rho_3^2$$
$$\vdots$$

eingesetzt, erhält man

$$r_1^2 = e^2 + \rho_1^2 + 2\,ex_1$$
$$r_2^2 = e^2 + \rho_2^2 + 2\,ex_2$$
$$r_3^2 = e^2 + \rho_3^2 + 2\,ex_3.$$
$$\vdots$$

Das Trägheitsmoment $J_1$ lässt sich jetzt schreiben (Gl. b), wenn man allgemein $r^2 = e^2 + \rho^2 + 2\,ex$ setzt

$$J_1 = \Sigma me^2 + \Sigma m\rho^2 + \Sigma m\,2\,ex, \text{ oder,}$$

weil nach Gl. a $\Sigma m\rho^2 = J$,

$$J_1 = J + \Sigma me^2 + \Sigma m\,2\,ex \quad \text{. . . . . . . . . (c)}$$

e ist konstant und $\Sigma m$ ist die ganze Masse M, welche sich dreht, ferner stellt $\Sigma m\,2\,ex$ die algebraische Summe der sämtlichen Produkte der Massenelemente mit den Abschnitten x von A als Schwerpunkt dar,

$$\Sigma m\,2\,ex = 2\,e\,(m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + m_3\,x_3 + m_4\,x_4 \sim).$$

Diese Summe ist aber Null, da die einzelnen Produkte paarweise rechts und links vom Schwerpunkt sich gleich sein müssen,

$$m_2\,x_2 = -\,m_3\,x_3 \ldots\ldots -, \text{ sonach folgt}$$

$$J_1 = J + Me^2 \quad \text{. . . . . . . . . (d)}$$

Das Trägheitsmoment wird von J nach $J_1$ verlegt grösser um $S = Me^2$, umgekehrt würde, wenn die neue Achse sich dem Schwerpunkt der Masse nähert, $J_1$ kleiner werden müssen, wie leicht einzusehen ist; allgemein ist also

$$\mathbf{J_1 = J \pm Me^2}, \quad \text{. . . . . . . . (120)}$$

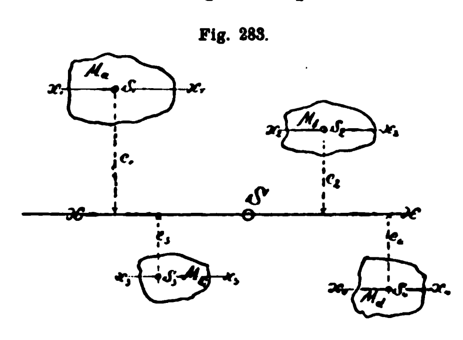
worin M die sich drehende Masse, e die Entfernung der beiden parallel zu einander liegenden Achsen.

Man nennt solche Trägheitsmomente **Reduktions-** oder **reducierte Trägheitsmomente.**

Wir haben, Fig. 283, ein System verschiedener Massen (Flächen) $M_a$ $M_b$ $M_c$ . . ., deren Schwerpunkte $S_1$ $S_2$ $S_3$ . . . sein mögen, und die den

gemeinschaftlichen Schwerpunkt S haben, vor uns. Legen wir durch sämtliche Schwerpunkte parallele Achsen und bezeichnen mit $e_1$ $e_2$ $e_3$ ... die Entfernungen der einzelnen Massenachsen von der Hauptschwerpunktsachse xx, mit $J_a J_b J_c$.. die Trägheitsmomente der einzelnen Massen $M_a$ $M_b$ $M_c$ ..., dann lässt sich jede einzelne, wenn sie statt um ihre Schwerpunktsachse um die Hauptschwerpunktsachse sich drehen soll, reducieren nach den bezw. Formeln

Fig. 283.



$$J_a + M_a e_1^2, \quad J_b + M_b e_2^2, \quad J_c + M_c e_3^2 \ldots$$

Die Reduktion der sämtlichen Massen auf xx als Drehungsachse ist sonach

(121) . $\mathbf{J_1 = J_a + M_a e_1^2 + J_b + M_b e_2^2 + M_c e_3^2 + J_c + \ldots}$

oder

(121a) . . . . . . . $J_1 = \Sigma J + \Sigma M e^2$.

Würden die Schwerpunkte der sämtlichen Massen in die Hauptschwerpunktsachse fallen, dann wären $e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = 0$, sonach

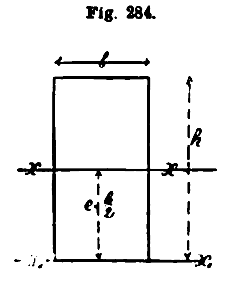
(122) . . . . $J_1 = J_a + J_b + J_c + \ldots = \Sigma J$;

der Körper oder die Fläche ist dann offenbar symmetrisch.

## Reducierte Trägheitsmomente.

**XI.** Anwendung auf das Rechteck und parallelpipetische Körper.

Fig. 284.



Das äquatoriale Trägheitsmoment eines Rechteckes bezogen auf die Schwerpunktsachse ist, Fig. 284,

$$J = 1/12\, bh^3.$$

Will man eine Reduktion auf die Basisachse vornehmen, dann hat man in Gl. 120 $M = bh$, $e = \frac{h}{2}$ zu setzen und erhält

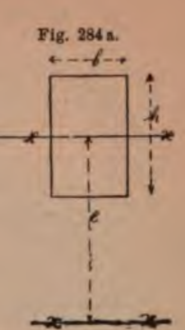
$$J_1 = J + bh \frac{h^2}{4} = \frac{1}{12} bh^3 + \frac{bh^3}{4} = \frac{1}{3} bh^3$$

wie uns schon aus Beispiel 1, S. 307 bekannt.

Das Trägheitsmoment einer prismatischen Stange, Fig. 272, ist au die Achse XX bezogen $J = \frac{1}{3} ml^2$; reduciert auf die Schwerpunktsdreh-

achse folgt (wie S. 315, Fig. 278)

$$J_1 = J - me^2 = \frac{1}{3} ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2.$$

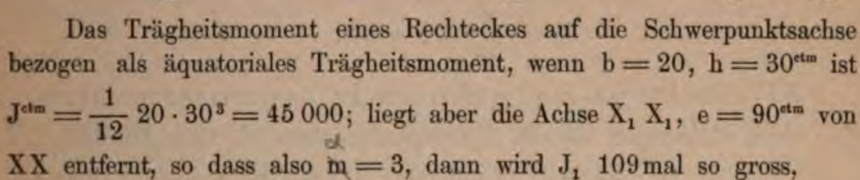

Fig. 284a.

Fällt die Achse $X_1 X_1$ ausserhalb der Figur wie in Fig. 284a angedeutet, dann ist

$$J_1 = J + bhe^2 = \frac{1}{12} bh^3 + bhe^2$$

und wenn $e = \alpha h$ folgt, $\alpha$ eine beliebige Zahl, $\alpha = \frac{e}{h}$

$$J_1 = \frac{1}{12} bh^3 = bh(\alpha h)^2 = bh^3\left(\frac{1}{12} + \alpha^2\right).$$



Das Trägheitsmoment eines Rechteckes auf die Schwerpunktsachse bezogen als äquatoriales Trägheitsmoment, wenn $b = 20$, $h = 30^{ctm}$ ist $J^{ctm} = \frac{1}{12} 20 \cdot 30^3 = 45\,000$; liegt aber die Achse $X_1 X_1$, $e = 90^{ctm}$ von XX entfernt, so dass also $m = 3$, dann wird $J_1$ 109 mal so gross,

$$J_1^{ctm} = 20 \cdot 30^3\left(\frac{1}{12} + 3^2\right) = 109 \cdot 45\,000 = 4\,905\,000.$$

Die Masse $bh = 30 \cdot 20$ auf einen Punkt reduciert müsste am Trägheitshalbmesser $\rho = \sqrt{\frac{J}{bh}} = \sqrt{\frac{4\,905\,000}{20 \cdot 30}} = 90{,}4^{ctm}$ angebracht werden, um im letzteren Fall dasselbe zu leisten.

**XII.** Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf die Schwerpunktsachse.

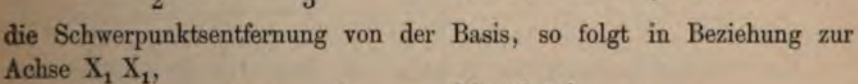
Fig. 285.

Wir fanden, Fig. 273, das Trägheitsmoment J auf die Basisachse XX bezogen

$$J = \frac{1}{12} bh^3,$$

ist nun in Gl. 120

$$M = \frac{1}{2} bh, \quad e = \frac{h}{3}$$



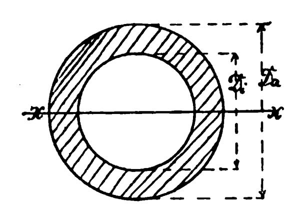
die Schwerpunktsentfernung von der Basis, so folgt in Beziehung zur Achse $X_1 X_1$,

$$J_1 = J - Me^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} bh^3.$$

## Trägheitsmomente symmetrischer Flächen.

**XIII.** Kreisring.

Das äquatoriale Trägheitsmoment auf die Schwerpunktsachse bezogen


Fig. 286.

ist für den Vollkreis, Fig. 286,

$$J_a = \frac{\pi}{64} D_a^4,$$

für den inneren Kreis

$$J_b = \frac{\pi}{64} D_i^4,$$

somit für den Ring nach Gl. 122

$$J_1 = J_a - J_b = \frac{\pi}{64} (D_a^4 - D_i^4).$$

Das polare Trägheitsmoment

$$J_p^1 = \frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4).$$

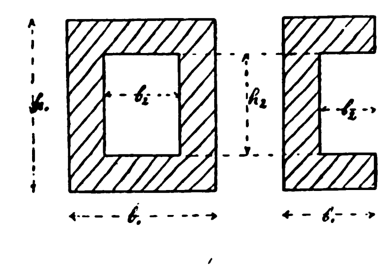
**XIV. Rechtecks- und quadratische Zusammensetzungen.** Hier ist bezogen auf die Schwerpunktsachse, Gl. 122, Fig. 287

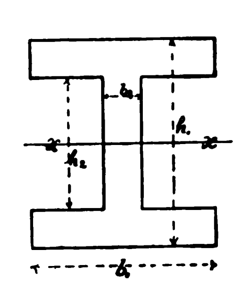
$$J_1 = J_a - J_b$$

$J_a$ in beiden Fällen $\frac{1}{12} b_1 h_1^3$ und

$$J_b = \frac{1}{12} b_2 h_2^3, \text{ folglich}$$

$$J_1 = \frac{1}{12} (b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3).$$


Fig. 287.


Fig. 288.

Das Trägheitsmoment der beistehenden Doppel-T-Form lässt sich als Differenzquerschnitt $b_1 h_1 - (b_1 - b_2) h_2$ oder Summenquerschnitt $b_2 h_2 + b_1 (h_1 - h_2)$ auffassen, sonach ist das Trägheitsmoment bezogen auf die Schwerpunktsachse XX

$$J = \frac{1}{12} [b_1 h_1^3 - (b_1 - b_2) h_2^3] = \frac{1}{12} [b_2 h_2^3 + b_1 (h_1^3 - h_2^3)].$$

Das Trägheitsmoment des doppelt U-Eisens bezogen auf XX ist Fig. 289

$$J = \frac{1}{12}\,[b_1 h_2^3 + (b_1 - b_2)(h_1^3 - h_2^3)]$$
$$= \frac{1}{12}\,[b_2 h_2^3 + (b_1 - b_2)\,h_1^3].$$

Fig. 289.

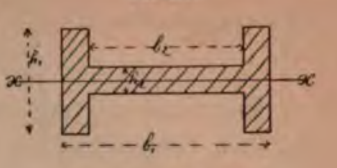
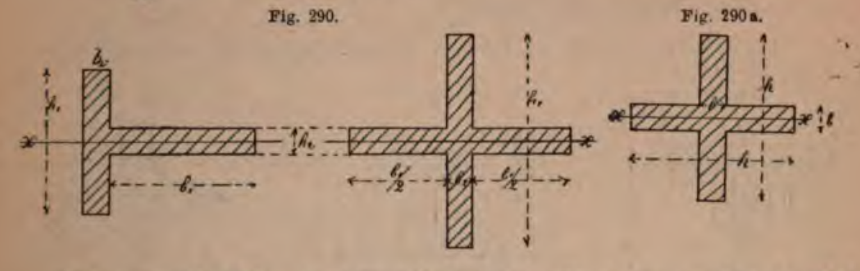


Fig. 290. Fig. 290a.



Der liegende Tförmige Querschnitt*) um die Schwerpunktachse XX drehend, lässt sich mit dem kreuzförmigen zusammenfassen, Fig. 290,

$$J = \frac{1}{12}\,[b_1 h_2^3 + b_2 h_1^3].$$

Mit der Bezeichnung, Fig. 290a, ist auch

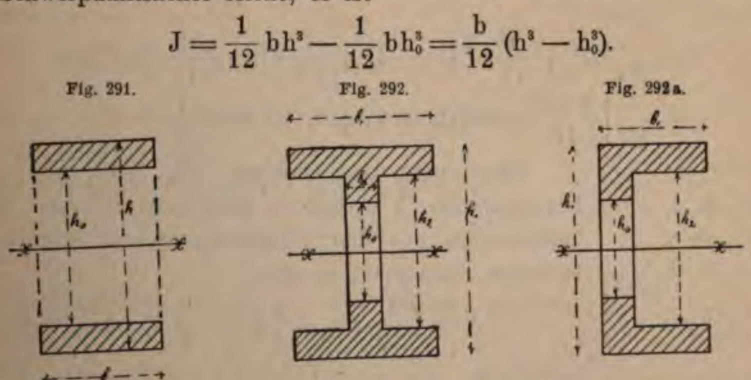
$$J = \frac{1}{12}\,[h b^3 + b h^3 - b^4].$$

Hier musste das Trägheitsmoment des inneren Quadrates, da es zu viel gerechnet wurde, wieder in Abzug gebracht werden.

Man findet auch das Trägheitsmoment des Querschnitts, Fig. 291, für die Schwerpunktsachse leicht; es ist

$$J = \frac{1}{12}\,b h^3 - \frac{1}{12}\,b h_0^3 = \frac{b}{12}\,(h^3 - h_0^3).$$

Fig. 291. Fig. 292. Fig. 292a.



*) Wir werden in der Anwendung der Mechanik auf Festigkeitslehre nochmals auf die Trägheitsmomente zurückkommen, und benötigen dort eine Reihe solcher für besondere Querschnittsformen, die wir an dieser Stelle bereits zusammenfassen wollen.

Das Trägheitsmoment der Trägerquerschnitte, Fig. 292, ist auf die Schwerpunktsachse bezogen,

$$J = \frac{1}{12}\left[b_1 h_1^3 - (b_1 - b_2)\, h_2^3 - b_3 h_0^3\right].$$

Man findet das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Querschnitts, Fig. 293, bezogen auf die XX-Achse durch successive Subtraktion der Rechtecksträgheitsmomente, nämlich

$$J = \frac{1}{12}\left[b_1 h_1^3 - (b_1 - b_2)\, h_2^3 - (b_2 - b_3)\, h_3^3 - (b_3 - b_4)\, h_4^3\right].$$

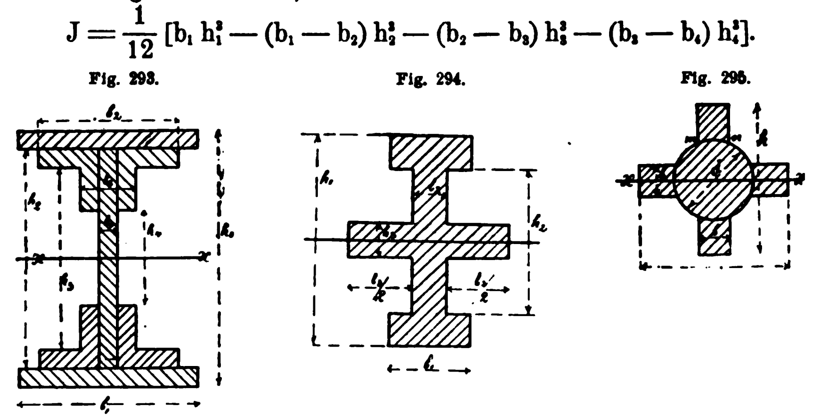


Fig. 293. Fig. 294. Fig. 295.

Das Trägheitsmoment der Fläche, Fig. 294, für die Schwerpunktsachse XX ist, wie leicht zu übersehen

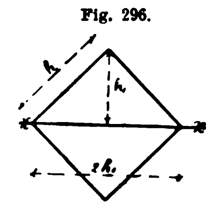
$$J = \frac{1}{12}\left[b_1 h_1^3 - (b_1 - b_2)\, h_2^3 + b_3 h_3^3\right].$$

Das Trägheitsmoment des obigen sternförmigen Querschnittes setzt sich, abgesehen von den kleinen Segmenten mn in der folgenden Weise zusammen; es ist

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 + \frac{1}{12} b^3 (h - d) + \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{12} b d^3 \quad \text{oder}$$

$$J = \frac{1}{12}\left[\frac{3\pi d^4}{16} + b^3 (h - d) + b (h^3 - d^3)\right].$$

Fig. 296.



Lässt man das Quadrat, Fig. 296, um seine Diagonalachse XX drehen, dann setzt sich das Trägheitsmoment aus den Trägheitsmomenten der beiden Dreiecke zusammen, so dass

$$J = \left(\frac{1}{12}\, 2\, h_1 h_1^3\right) 2 = \frac{1}{3} h_1^4 \quad \text{oder, weil}$$

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt{2}}, \text{ findet man}$$

$$J = \frac{1}{12} h^4.$$

Das Trägheitsmoment der beistehenden Fig. 297 ist

$$J = \frac{1}{12}(h_1^4 - h_2^4).$$

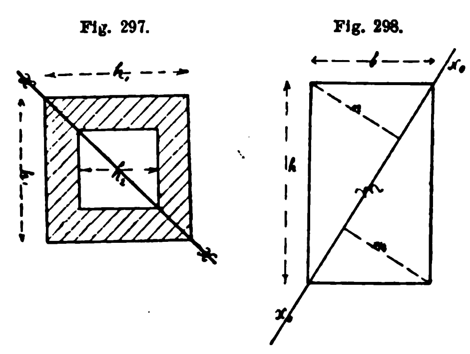


Fig. 297. Fig. 298.

Bemerkung. Soll, Fig. 298, das Trägheitsmoment eines Rechteckes auf eine Diagonale als Achse bezogen werden, so erhält man

$$J_0 = 2 \cdot \frac{1}{12} m n^3;$$

es ist aber $m = \sqrt{b^2 + h^2}$ und verhält sich $n : b = h : m$, woraus

$$n = \frac{bh}{m} = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + h^2}},$$

somit ist eingesetzt

$$J_0 = 1/6 \sqrt{b^2 + h^2} \frac{b^3 h^3}{\sqrt{(b^2 + h^2)^3}} = 1/6 \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}.$$

Wenn $b = h$, erhält man wieder wie oben $J = \frac{1}{12} h^4$.

## Trägheitsmomente von teilweise unsymmetrisch zur Drehachse liegenden Flächen.

### XV. Trägheitsmoment eines Halbkreises, Fig. 299.

Es soll das äquatoriale Trägheitsmoment eines Halbkreises

$$J = \frac{1}{2} \frac{r^4 \pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{64} d^4$$

nach der Schwerpunktsachse $X_1 X_1$ des Halbkreises verlegt werden.

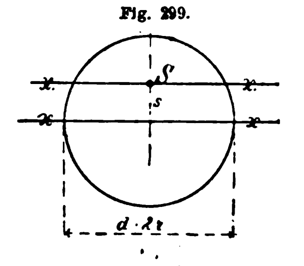


Fig. 299.

Der Schwerpunktsabstand s ist Beisp. 16, S. 97

$$s = 4/3 \frac{r}{\pi} = 2/3 \frac{d}{\pi}.$$

Das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} \frac{r^4 \pi}{4}$ wird kleiner, nämlich

$$J_1 = J - \frac{1}{2} r^2 \pi \left(4/3 \frac{r}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{r^4 \pi}{4} - \frac{1}{2} r^2 \pi \left(4/3 \frac{r}{\pi}\right)^2 \text{ oder}$$

$$J_1 = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \cdot \pi}\right) = 0{,}11\, r^4 = 0{,}007\, d^4.$$

**XVI.** Flächenträgheitsmoment des Tförmigen Querschnitts.

Wir werden später erkennen, dass wir das Trägheitsmoment des in Fig. 300—300c gezeichneten Querschnitts, bezogen auf seine Schwer-

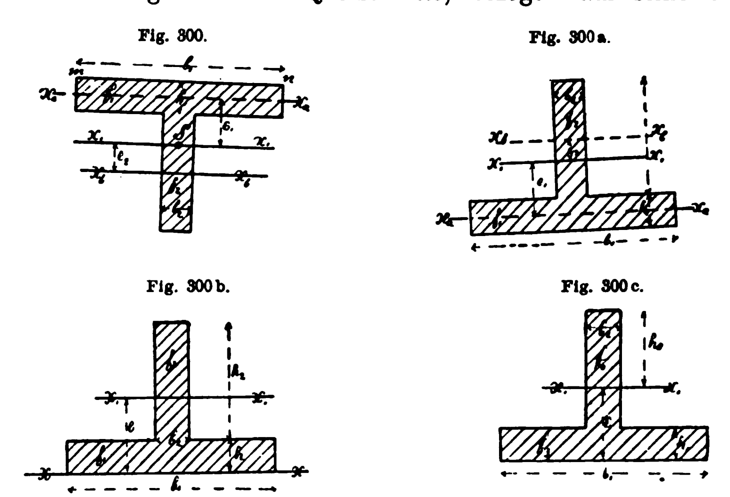


Fig. 300. Fig. 300a. Fig. 300b. Fig. 300c.

punktsachse $x_1$ $x_1$ benötigen. Die Lage des Schwerpunktes S finden wir nach den S. 82 aufgestellten Gleichungen, sind $f_1$ und $f_2$ die beiden Flächen, so ist in Bezug auf die Drehungsachse mn (Fig. 300) wenn man mit s = e die Schwerpunktsentfernung bezeichnet,

$$\text{(a)} \quad \ldots \quad (f_1 + f_2)\, e = f_1 \frac{h_1}{2} + f_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right).$$

Die Flächen $f_1$ und $f_2$ sind

$$\text{(b)} \quad \ldots\ldots \quad f_1 = b_1\, h_1 \text{ und } f_2 = b_2\, h_2,$$

so dass der Schwerpunktsabstand von mn

$$\text{(c)} \quad e = \frac{\frac{1}{2}\, b_1\, h_1^2 + b_2\, h_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right)}{b_1\, h_1 + b_2\, h_2} = \frac{1}{2}\, \frac{b_1\, h_1^2 + b_2\, h_2\, (h_2 + 2\, h_1}{b_1\, h_1 + b_2\, h_2}.$$

Sind $X_a X_a$ und $X_b X_b$ die Schwerpunktsachsen der Flächen $f_1$ $f_2$ selbst und $e_1$ $e_2$ deren Entfernungen von $X_1$ $X_1$, so ist nach Gl. 121 in Bezug auf Fig. 300 und 300a

$$J_1 = J_a + f_1\, e_1^2 + J_b + f_2\, e_2^2 \text{ oder weil}$$

$$J_a = \frac{1}{12}\, b_1\, h_1^3 \text{ und } J_b = \frac{1}{12}\, b_2\, h_2^3, \text{ so folgt}$$

$$\text{(d)} \quad \ldots \quad J_1 = \frac{1}{12}\, (b_1\, h_1^3 + b_2\, h_2^3) + b_1\, h_1\, e_1^2 + b_2\, h_2\, e_2^2.$$

Berechnet man sich erst, Fig. 300b, das Trägheitsmoment auf die

Drehachse mn bezw. XX, es sei J, dann findet sich das auf die Schwerpunktsachse $X_1 X_1$ nach Gl. 120

$$J_1 = J - (f_1 + f_2)\, e^2.$$

Da nun

$$J = \frac{1}{3} b_2 (h_1 + h_2)^3 + \frac{1}{3} (b_1 - b_2) h_1^3, \text{ so folgt auch}$$

$$J_1 = \frac{1}{3} [b_2 (h_1 + h_2)^3 + (b_1 - b_2) h_1^3] - (b_1 h_1 + b_2 h_2) e^2 \quad . \quad (e)$$

Endlich erhält man dasselbe Resultat, wenn man Fig. 300c das Trägheitsmoment $J_0$ der Fläche $f_0 = b_2 h_0$ oberhalb der Schwerpunktsachse $X_1 X_1$ und das Trägheitsmoment $J_u$ der untern Fläche

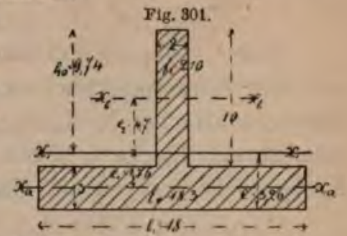
$f_3 = b_2 (e - h_1) + b_1 h_1 = b_1 e - (e - h_1)(b_1 - b_2)$ addiert.

Man erhält

$$J = J_0 + J_u = \frac{1}{3} h_0^3 b_2 + \frac{1}{3} [b_1 e^3 - (b_1 - b_2)(e - h_1)^3] \quad . \quad (f)$$

Von diesen scheint die Reduktion nach Gl. 120 bezw. Gl. e die geringsten Zahlenrechnungen zu liefern; auf Gl. (f) werden wir in den Anwendungen später noch besonders zurückkommen.

In Fig. 301 ist ein Querschnitt in bestimmten Zahlen, Dimensionen, in Centimetern, gegeben, es soll das Trägheitsmoment bezogen auf die Schwerpunktsachse berechnet werden.


Fig. 301.

Die Schwerpunktsentfernung ist nach Gl. (c)

$$e = \frac{1}{2} \frac{18 \cdot 3^2 + 2 \cdot 10\,(10 + 2 \cdot 3)}{18 \cdot 3 + 10 \cdot 2} = 3{,}26.$$

Das fragliche Trägheitsmoment ist nach den drei Gl. d, e, f:

$$J_1^{ctm} = \frac{1}{12} (18 \cdot 3^3 + 2 \cdot 10^3) + 18 \cdot 3 \cdot 1{,}76^2 + 2 \cdot 10 \cdot 4{,}74^2 = 823$$

$$J_1^{ctm} = \frac{1}{3} [2 \cdot (10 + 3)^3 + (18 - 2) \cdot 3^3] - (20 + 54) \cdot 3{,}26^2 = 823$$

$$J_1^{ctm} = \frac{1}{3} [2 \cdot \overline{9{,}74^3} + 18 \cdot 3{,}26^3 - (18 - 2)(3{,}26 - 3)^3] = 823.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerpunktsachse des umstehenden Querschnittes, Fig. 302, ist nach Gl. (c) und (e), wenn die Schwerpunktsentfernung

$$e = \frac{1}{2} \frac{10 \cdot 2^2 + 2 \cdot 20\,(20 + 2 \cdot 2)}{2 \cdot 20 + 2 \cdot 10} = 8{,}33.$$

$$J_1^{ctm} = \frac{1}{3}[2(20+2)^3 + (10-2)2^3] - (2\cdot 10 + 2\cdot 20)\overline{8{,}33^2} = 2957.$$

Fig. 302.

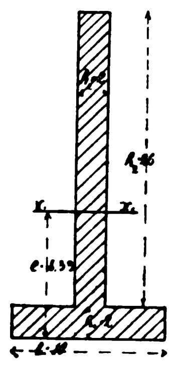
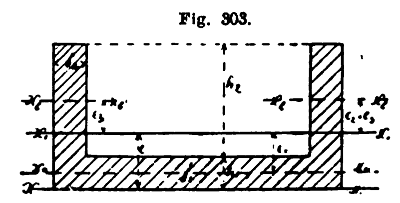


Fig. 303.



**XVII.** Trägheitsmoment des Uförmigen Querschnitts, Fig. 303.

Der Schwerpunkt des beistehenden Uförmigen Querschnitts hat den Abstand e von der Achse XX, er findet sich, wenn $f_2 = f_3$ die beiden oberen, $f_1$ die untere Fläche aus der Gleichung,

$$(f_1 + 2 f_2) e = f_1 \frac{h_1}{2} + 2 f_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right),$$

setzt man $f_1 = b_1 h_1$, $f_2 = b_2 h_2$ ein, so erhält man

$$\text{(a)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad e = \frac{1}{2} \frac{b_1 h_1^2 + 2 h_2 b_2 (h_2 + 2 h_1)}{b_1 h_1 + 2 b_2 h_2}$$

Sind $J_c = J_b$ die Trägheitsmomente der Flächen $f_2$ und $f_3$, bezogen auf ihre Schwerpunktsachsen $X_b X_b$, deren Abstände $e_2 = e_3$ von der Schwerpunktsachse $X_1 X_1$ der ganzen Figur sind, ist $J_a$ das Trägheitsmoment der Fläche $f_1$ deren Abstand $e_1$ der beiden Achsen $X_a X_a$ und $X_1 X_1$, so ist bezogen auf die Schwerpunktsachse $X_1 X_1$

$$J_1 = J_a + f_1 e_1^2 + 2 J_b + 2 f_2 e_2^2 = J_a + 2 J_b + f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2;$$

es ist $J_a = \frac{1}{12} b_1 h_1^3$, $J_b = \frac{1}{12} b_2 h_2^3$, somit folgt

$$\text{(b)} \quad . \; . \quad J_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + \frac{1}{6} b_2 h_2^3 + b_1 h_1 e_1^2 + 2 h_2 b_2 e_2^2 .$$

Bezieht man das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts

$$F = f_1 + f_2$$

zunächst auf die untere Achse XX, und nennt dies J, reduciert die Gesamtfläche, so wird nach Gl. 120 das Trägheitsmoment auf $X_1 X_1$ bezogen

$$J_1 = J - F e^2 = J - (f_1 + 2 f_2) e^2 \text{ oder da}$$

$$J = \frac{1}{3}[(b_1 - 2 b_2) h_1^3 + 2 b_2 (h_2 + h_1)^3], \text{ findet sich}$$

$$\text{(c)} \quad J_1 = \frac{1}{3}[(b_1 - 2 b_2) h_1^3 + 2 b_2 (h_1 + h_2)^3] - (b_1 h_1 + 2 h_2 b_2) e^2$$

Fig. 304.

In der beistehenden Figur sind die Flächen

$$f_1 = 4 \cdot 12 = 48 \;\square^{ctm}$$
$$f_2 = 3 \cdot 8 = 24 \;\square^{ctm}.$$

Der Schwerpunktsabstand ist

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{12 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8 \cdot 3\,(8 + 2 \cdot 4)}{12 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 8} = 5^{ctm}.$$

Das Trägheitsmoment auf die Schwerpunktsachse bezogen nach vorstehender Gl. (b)

$$J_1 = \frac{1}{12}\,12 \cdot 4^3 + {}^1\!/_6\; 3 \cdot 8^3 + 12 \cdot 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3^2 = 1184;$$

nach Gl. (a)

$$J_1 = \frac{1}{3}\,[(12 - 2 \cdot 3) \cdot 4^3 + 2 \cdot 3\,(4 + 8)^3] - (12 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 3)\,5^2 = 1184.$$

**XVIII.** Trägheitsmoment des unsymmetrischen doppelt Tförmigen Querschnitts.

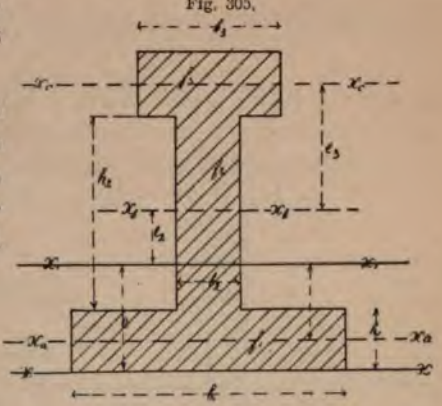


Fig. 305.

Teilt man die beistehende Fläche, Fig. 305, in die Elemente $f_1\, f_2\, f_3$, deren Flächen $f_1 = b_1 h_1$, $f_2 = b_2 h_2$, $f_3 = b_3\, h_3$, deren Schwerpunktsträgheitsmomente auf ihre bezgl. Achsen $X_a X_a$, $X_b X_b$, $X_c X_c$ sind

$$J_a = \frac{1}{12}\, b_1\, h_1^3,\quad J_b = \frac{1}{12}\, b_2\, h_2^3,$$
$$J_c = \frac{1}{12}\, b_3\, h_3^3,$$

so müssen nach Gl. 121 zu diesen letzteren wieder die Produkte $f_1 e_1^2$, $f_2 e_2^2$, $f_3 e_3^2$ gezählt werden, wenn jede Fläche auf die Achse $X_1 X_1$ des Schwerpunktes der ganzen Fläche in Bezug auf ihr Trägheitsmoment bezogen werden soll, weil die Trägheitsmomente auf die entferntere Achse wachsen. Es resultiert dann

$$J_1 = \frac{1}{12}\,(b_1\, h_1^3 + b_2\, h_2^3 + b_3\, h_3^3) + b_1\, h_1\, e_2^2 + b_2\, h_2\, e_1^2 + b_3\, h_3\, e_3^2. \quad \text{(a)}$$

Der Schwerpunktsabstand von XX aus gerechnet als Schwerpunktsdrehachse ist aus

$$e\,(f_1 + f_2 + f_3) = f_1\,\frac{h_1}{2} + f_2\left(\frac{h_2}{2} + h_1\right) + f_3\left(\frac{h_3}{2} + h_2 + h_1\right)$$

$f_1\, f_2\, f_3$ eingesetzt,

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{b_1\, h_1^2 + b_2\, h_2\,(h_2 + 2\, h_1) + b_3\, h_3\,[h_3 + 2\,(h_2 + h_1)]}{b_1\, h_1 + b_2\, h_2 + b_3\, h_3}. \quad \text{(b)}$$

Berechnet man erst das Trägheitsmoment auf die **Basisachse** XX

$$J = \frac{1}{3} b_1 (h_1 + h_2 + h_3)^3 - \frac{1}{3} (b_1 - b_3)(h_2 + h_3)^3 - \frac{1}{3} (b_3 - b_2) h_3^3$$

und reduciert dann auf die Schwerpunktsachse $X_1 X_1$, so muss das Produkt

$$F e^2 = (f_1 + f_2 + f_3) e^2$$

in Abzug kommen, es wird

$$J_1 = J - F e^2, \text{ oder}$$

$$J_1 = \frac{1}{3} [b_1 (h_1 + h_2 + h_3)^3 - (b_1 - b_3)(h_2 + h_3)^3 - (b_3 - b_2) h_3^3]$$

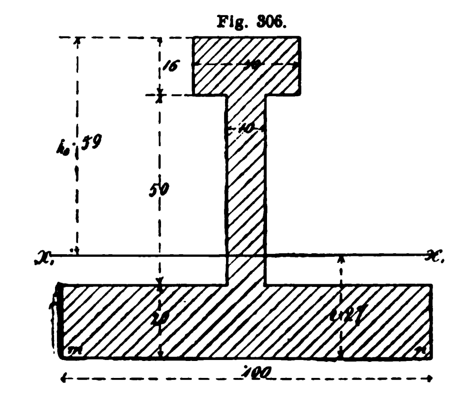
$$(c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad - (b_1 h_1 + b_2 h_2 + h_3 b_3) e^2.$$

Bezeichnet man endlich mit $J_0$ das Trägheitsmoment des oberen Teiles von der Höhe $h_0$, mit $J_u$ das des unteren Teiles unterhalb der Schwerpunktsachse, so ist auch auf die Achse $X_1 X_1$ bezogen

$$J_1 = J_0 + J_u \text{ oder}$$

$$(d) \; J_1 = \frac{1}{3} [b_3 h_0^3 - (b_3 - b_2)(h_0 - h_3)^3] + \frac{1}{3} [b_1 e^3 - (b_1 - b_2)(e - h_1)^3].$$

Fig. 306.




In allen drei Fällen erhält man dasselbe Resultat.

Auf mn bezogen ist Fig. 306 der Schwerpunktsabstand,

da $f_1 = 20 \cdot 100 = 2000 \, \square^{mm}$

$f_2 = 50 \cdot 10 = 500 \, \square^{mm}$

$f_3 = 16 \cdot 30 = 480 \, \square^{mm}$

$$e = \frac{100 \cdot 20 \cdot \frac{20}{2} + 50 \cdot 10 \cdot \left(\frac{50}{2} + 20\right) + 30 \cdot 16 \left(\frac{16}{2} + 50 + 20\right)}{2000 + 500 + 480}$$

$= 27^{mm}$ abg.

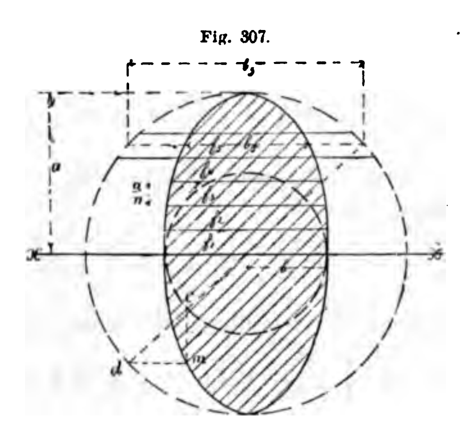
Das Trägheitsmoment auf $X_1 X_1$ bezogen nach (d), da

$$h_0 = 86 - 27 = 59^{mm},$$

$$J_1^{mm} = \frac{1}{3} [30 \cdot 59^3 - (30 - 10)(59 - 16)^3] + \frac{1}{3} [100 \cdot 27^3 - (100 - 10)$$

$$(27 - 20)^3] = \frac{1}{3} 4571230 + \frac{1}{3} 1999170 = 2190133.$$

**XIX. Trägheitsmoment des elliptischen Querschnitts.**


Fig. 307.

Es dreht sich eine elliptische Fläche, Fig. 307, um ihre Schwerpunktsachse XX. Die Halbmesser der beiden Kreise, aus denen wir uns die Ellipse gezeichnet denken wollen, seien a und b, der Punkt m der Ellipse wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man dm parallel der horizontalen, cm parallel der vertikalen Achse bis zum Schnitt m zeichnet.

Zerlegt man die Ellipse in n horizontale Streifen von gleicher Höhe $\frac{a}{n}$, so erhalten diese verschiedene Breiten $b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5 \ldots$ Sind nun $b_1^1\ b_2^1\ b_3^1 \ldots$ die entsprechenden Kreisbreiten des äusseren Kreises, wie aus der Figur zu ersehen, so muss zwischen den korrespondierenden Kreis- und Ellipsenstreifen folgendes Verhältnis gelten:

Für jeden Streifen gilt

$$\frac{b_x}{2} : \frac{b_x^1}{2} = b : a, \text{ so dass}$$

$$b_x = b_x^1 \frac{b^1}{a} \text{ oder es werden}$$

$$b_1 = b_1^1 \frac{b}{a},\ b_2 = b_2^1 \frac{b}{a},\ b_3 = b_3^1 \frac{b}{a} \ldots\ldots$$

Da nun wieder die Entfernungen der Streifen von der Drehungsachse

$$x_1 = \frac{a}{2n},\ x_2 = \frac{3}{2}\frac{a}{n},\ x_3 = \frac{5a}{2n} \ldots, \text{ so wird dies in}$$

$$J = f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + \ldots = \Sigma f x^2 \text{ eingesetzt,}$$

$$J = \frac{a}{n} b_1 \left(\frac{a}{2n}\right)^2 + \frac{a}{n} b_2 \left(\frac{3a}{2n}\right)^2 + \frac{a}{n} b_3 \left(\frac{5a}{2n}\right)^2 + \ldots \text{ oder}$$

$$J = \frac{a^3}{4n^3}(b_1 + 3^2 b_2 + 5^2 b_3 + 7^2 b_4 + \ldots),$$

ezw. die Breite eingeführt,

$$J = \frac{a^3}{4n^3}\left(b_1^1 \frac{b}{a} + 3^2 b_2^1 \frac{b}{a} + 5^2 b_3^1 \frac{b}{a} + \ldots\right), \text{ das ist auch}$$

$$J = \frac{a^2 b}{4n^3}(b_1^1 + 3^2 b_2^1 + 5^2 b_3^1 + \ldots).$$

Wir haben aber bereits S. 313 bei Entwickelung des äquatorialen Trägheitsmomentes des Kreises gefunden

$$b_1^1 = \frac{a}{n}\sqrt{4\,n^2 - 1},\; b_2^1 = \frac{a}{n}\sqrt{4\,n^2 - 3^2},\; b_3^1 = \frac{a}{n}\sqrt{4\,n^2 - 5^2}\ldots,$$

es wird alsdann für beide Ellipsenflächen oberhalb und unterhalb der Achse

$$J = 2\,\frac{a^2\,b}{4\,n^3}\,\frac{a}{n}\,(\sqrt{4\,n^2 - 1} + 3^2\sqrt{4\,n^2 - 3^2} + 5^2\sqrt{4\,n^2 - 5^2}\ldots),$$

oder, wenn man diese Gleichung auch schreibt

$$J = \left[\frac{a^4}{2\,n^4}(\sqrt{4\,n^2 - 1} + 3^2\sqrt{4\,n^2 - 3^2} + \ldots)\right]\frac{b}{a}.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist um nichts weiter als das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreises für den Halbmesser a, nämlich s. S. 313 $\frac{a^4\,\pi}{4}$, das der Ellipse ist sonach

$$J = \frac{a^4\pi}{4}\,\frac{b}{a} = \frac{a^3\pi b}{4},$$ das der Halbellipse

$$J = \frac{a^3\pi b}{8}.$$

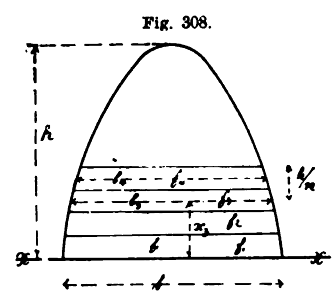


Fig. 308.

**XX.** Beistehend sei eine Parabel dargestellt; es soll das Trägheitsmoment derselben bestimmt werden, vorausgesetzt, dass sie sich um die Achse XX dreht.

Nach dem schon mehrfach erwähnten Bildungsgesetz der Parabel ist, wenn p eine Konstante (Parameter),

$$\frac{b}{2} = \sqrt{ph} \text{ oder } b = 2\sqrt{ph},$$

sonach für jeden Flächenstreifen, in welche wir die Parabel uns geteilt denken

$$b_1 = 2\sqrt{p\,(h - x_1)},\; b_2 = 2\sqrt{p\,(h - x_2)},\; b_3 = 2\sqrt{p\,(h - x_3)}\ldots$$

Die Höhe der n gleichbreiten Streifen ist $\frac{h}{n}$, sonach

$$x_1 = \frac{h}{2\,n},\; x_2 = \frac{3\,h}{2\,n},\; x_3 = \frac{5\,h}{2\,n}\ldots$$

Das Trägheitsmoment wird dann

$$J = f_1\,x_1^2 + f_2\,x_2^2 + f_3\,x_3^2 + \ldots,$$

durch Einsetzen der betreffenden Werte

$$J = \frac{h}{n} 2\sqrt{p(h - x_1)} \cdot x_1^2 + \frac{h}{n} 2\sqrt{p(h - x_2)} \cdot x_2^2 + \ldots, \text{ oder}$$

$$J = \frac{h}{n} 2\sqrt{ph}\left[\left(\frac{h}{2n}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} + \left(\frac{3h}{2n}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{3}{2n}} + \left(\frac{5h}{2n}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{5}{2n}} \ldots\right],$$

man erhält nach der nötigen Reduktion und mit Rücksicht darauf, dass

$$2\sqrt{ph} = b,$$

$$J = \frac{bh^3}{\sqrt{32n^7}}\left[\sqrt{2n-1} + 3^2\sqrt{2n-3} + 5^2\sqrt{2n-5} + \ldots\right].$$

Je mehr Glieder (Streifen) man annimmt, um so näher erhält man

$$J = \frac{1}{6} bh^3.$$

Vergleicht man mit diesem die analogen Trägheitsmomente der Ellipse, des Rechtecks, des Dreiecks, so übersieht man, dass J

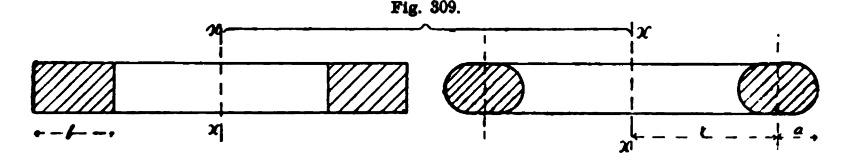
für das

| Dreieck, | Parabel, | Ellipse, | Rechteck |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{12} bh^3$ | $\frac{1}{6} bh^3$ | $\frac{\pi}{16} bh^3 = \frac{1}{5} bh^3$ abg. | $\frac{1}{3} bh^3$. |

**XXI.** In folgendem sind noch einige Trägheitsmomente zusammengestellt, die sich zum Teil mit Zuhülfenahme der höheren Mathematik ergeben.

Voll- und Halbkugel: $J = \frac{2}{5} r^2 m$, wenn m die Masse und r Halbmesser.

Fig. 309.



Ring mit rechteckigem Querschnitt

$$J = m\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Ring mit elliptischem Querschnitt

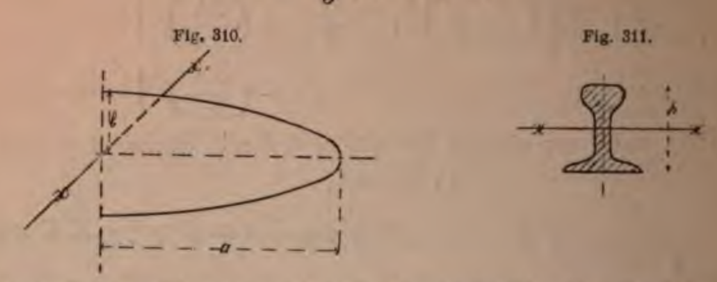
$$J = m\left(r^2 + \frac{3}{4} a^2\right).$$

Kugelabschnitt, dessen Höhe h, Kugelradius r, um seine Symmetrieachse

$$J = \frac{2}{3} mh\left(r - \frac{5}{12} h + \frac{1}{90} \frac{h^2}{r - h/3}\right).$$

Halber Balancier von parab. Längenprofil, Fig. 310,

$$J = \frac{m}{5}(8/7\, a^2 + b^2).$$


Fig. 310. Fig. 311.

Eisenbahnschienenquerschnitt. XX Schwerpunktsachse.

1) Wenn $h = 13{,}08^{ctm}$ $J^{ctm} = 919$.

2) Wenn $h = 11{,}80^{ctm}$ $J^{ctm} = 691{,}59$.

3) Wenn $h = 10{,}46^{ctm}$ $J^{ctm} = 470{,}26$.

Bemerkung: Wir werden bei der Anwendung der Mechanik besonders auf Festigkeitslehre nochmals auf Vorstehendes zurückgreifen müssen. —

Andeutungsweise sei hier noch die später näher zu besprechende Anwendung der lebendigen Kraft drehender Körper auf Schwungräder*) hier nur kurz erwähnt.

Alle Mechanismen, welche mit hin- und hergehenden Massen arbeiten, bedürfen einer Regulierungsmasse, welche im Augenblick der grössten Geschwindigkeit so viel Arbeit in sich aufnimmt, dass sie imstande ist, während die Massen ihre Geschwindigkeit ändern, also vom Hin- zum Hergang übergehen, in welchem Augenblick (toter Punkt) die Geschwindigkeit der Massen Null sein muss, — die aufgespeicherte Arbeit wieder abgeben kann, damit in der Bewegung kein Aufenthalt eintritt.

Die treibende, motorische Kraft verrichtet eine Arbeit A, ihr entgegen wirken die zu überwindenden Widerstände a, geleistet wird sonach die Arbeit

(a) . . . . . . . . . . $A_0 = A - a$,

welche das Schwungrad zu übernehmen hat, um sie wieder abzugeben.

Die treibende Kraft kann aber ihre Arbeit nicht „konstant“ abgeben, wegen der besonderen Konstruktion des Kurbelmechanismus, der die hin-

*) Bei der Lokomotive wendet man, da man kein Schwungrad anbringen kann, konzentrierte Schwungmassen an, welche an den Armen der Triebräder befestigt werden und also gleichbedeutend mit einer Trägheitsmasse am Trägheitshalbmesser sind.

und hergehenden Massen in drehende verwandeln soll; die Arbeit des Schwungrades stellt sich demnach als Differenzarbeit dar; analog der Gl. 108 und 111 ist,

$$A_0 = J \frac{w_1^2}{2} - J \frac{w_2^2}{2} \quad \text{. . . . . . .} \quad (111a)$$

wenn J das Trägheitsmoment und $w_1$ $w_2$ zwei Winkelgeschwindigkeiten in einem Zeitinterwall während der Bewegung sind.

Vorstehende Gleichung kann man auch schreiben

$$A_1 = J \frac{w_1 + w_2}{2} (w_1 - w_2).$$

$\frac{w_1 + w_2}{2}$ ist eine mittlere Winkelgeschwindigkeit, die wir mit $w_0$ bezeichnen wollen, so dass

$$A_0 = J\, w_0 (w_1 - w_2) \quad \text{. . . . . . . .} \quad (b)$$

Nennen wir nun das Verhältnis der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten $w_1 - w_2$ zu $w_0$, i, den Gleichförmigkeitsgrad,

$$i = \frac{w_0}{w_1 - w_2} \quad \text{. . . . . . . .} \quad (123)$$

so kann man Gl. (b) schreiben, da $w_1 - w_2 = \frac{w_0}{i}$.

$$A_0 = J \frac{w_0^2}{i} \quad \text{. . . . . . . . . . .} \quad (c)$$

Das Trägheitsmoment enthält das Gewicht, also auch die Dimensionen, die Winkelgeschwindigkeit $w_0$ kann man in die Umdrehungen nach Gl. 113 umsetzen, in $A_0 = A - a$ ist endlich die Kraft, Moment- oder Pferdestärke enthalten, sonach giebt Gl. (c) den nötigen Aufschluss, aus derselben folgt

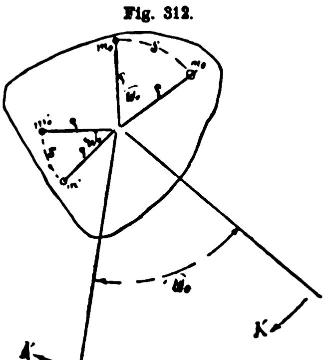
$$J = \frac{A_0\, i}{w_0^2} \quad \text{. . . . . . . . . .} \quad (d)$$

Je grösser i, um so schwerer muss das Schwungrad werden; i wird aber gross, wenn $w_1 - w_2$ klein, d. h. wenn bei veränderlicher Kraft, die Trägheitsmassen des Schwungrades infolge ihres grösseren Gewichtes, sich nicht während ihrer Drehung (ihrer Winkelgeschwindigkeit) beeinflussen lassen. Ist $w_1 - w_2$ gross, d. h. ist ein grosser Ungleichförmigkeitsgrad zulässig, so wird i klein, das Schwungrad kann leicht werden.

---

Wir gingen bei Besprechung der Grundbegriffe von Kraft und Masse von dem Satze aus, dass wenn auf eine Masse eine Kraft einwirkt, diese bei andauernder Kraftwirkung in eine beschleunigte Bewegung gerät.

Die Beschleunigung bei fortschreitender Bewegung fanden wir $p = \frac{K}{m}$,


Fig. 312.

wenn K die Kraft und m die Masse.

Bei einer sich drehenden Masse kann nun offenbar nur von einer Beschleunigung in der Drehung also von einer „Winkelbeschleunigung" die Rede sein, wenn eine Kraft K, Fig. 312, an dem Halbmesser r die Drehung veranlasst.

Wir wollen versuchen aufzustellen, in welchem Verhältnis die Winkelbeschleunigung zur Kraft oder vielmehr zum antreibenden Moment $M = Kr$ und zur Masse m steht. — Dreht sich die Masse m deren Gewicht G sein möge mit „gleichförmiger" Winkelgeschwindigkeit, oder wie wir oben annahmen mit einer gewissen Anzahl Umdrehungen in der Minute, so ist sie imstande eine gewisse Arbeit zu verrichten, deren Mass uns aus Gl. 112 bekannt. Die Masse nimmt immer wieder neue Betriebskraft von einem Motor in sich auf und überwindet während ihrer Drehung die ihrer lebendigen Kraft entsprechenden Widerstände, indem sie die Arbeit abgiebt.

In Fig. 312 soll nun aber das Moment Kr, also die Kraft K die Masse m „antreiben", in Betrieb setzen, also auch um den Punkt 0 drehen, wird die Triebkraft nicht aufgezehrt, die lebendige Kraft nicht verwertet, so tritt wie angedeutet eine beschleunigte Bewegung ein. Zerlegt man die Masse in ihre Elemente $m_1$ $m_2$ $m_3$ . . ., so wird jedes einen gewissen Weg $s_1$ $s_2$ . . . zurücklegen, um sich um einen gewissen Winkel $w_0$ in der Sek. zu drehen. Das Massenteilchen m gelangt nach $m_0$, $m^1$ nach $m_0^1$ u. s. w. Die Arbeit, welche für jedes Massenteilchen verrichtet werden muss, ist hierbei ms, das Arbeitsmoment $ms\rho$, oder da $s = \rho w_0$, $m\rho w_0 \rho = m\rho^2 w_0$. Die sämtlichen Massenteilchen erfordern sonach das Moment $\Sigma m\rho^2 w_0$, da nun aber $w_0$ für alle konstant, und da das Moment Kr alle in Betrieb setzt, so folgt die Momentenbetriebsgleichung

$$Kr = w_0 \, \Sigma m\rho^2.$$

$\Sigma m\rho^2$ ist aber das Trägheitsmoment der ganzen sich drehenden Masse, wonach folgt

$$M = Kr = w_0 \, J$$

und hieraus die jetzt zur Beschleunigung übergegangene Geschwindigkeit

(124) . . . . . . . . $$w_0 = \frac{M}{J} = \frac{Kr}{J}.$$

Die sich drehende Masse durch die Kraft K am Arm r getrieben wird in jeder Sekunde um die Winkelbeschleunigung $w_0$ sich schneller drehen, wenn keine Widerstände entgegenwirken.

Ein Punkt am Umfang der drehenden Masse wird hierbei in eine Umfangsbeschleunigung übergehen, die sich berechnen lässt, wenn die Entfernung, der Halbmesser des Umfangspunktes von der Drehachse bekannt.

Denken wir uns die Kraft K am Trägheitshalbmesser $\varrho$ angreifend, dann wäre $w_0 = \frac{K\varrho}{J}$ oder $w_0 \varrho = \frac{K\varrho^2}{J}$, nun ist aber nach Gl. 118, $\varrho^2 = \frac{J}{\mu}$ und $\frac{\varrho^2}{J} = \frac{1}{\mu}$, somit ist $w_0 \varrho = \frac{K}{\mu}$. Die Beschleunigung am Halbmesser $\varrho$ ist nun nichts weiter als eine **Umfangsbeschleunigung** an einem gewissen Umfangspunkt in der Entfernung des Trägheitsradius,

$$w_0 \varrho = p_0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (125)$$

somit folgt die Gleichung

$$\mathbf{p_0 = \frac{K}{\mu}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(126)}$$

d. h. es ist die Umfangsbeschleunigung einer sich drehenden Masse der Triebkraft am Trägheitshalbmesser direkt und der **Trägheitsmasse** indirekt proportional; während, wie uns bekannt, die fortschreitende Beschleunigung einer Kraft K direkt und einer **Masse** indirekt proportional ist, $p = \frac{K}{m}$. Wirken K und $p_0$ an einem anderen Hebelarm, so sind natürlich Reduktionen im Sinne der Gl. 119 vorzunehmen, man erhält dann

$$p_0^1 = \frac{K_1}{\mu_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (125\,a)$$

**Beispiele I.** Die S. 316 erwähnte eiserne Scheibe von $d = 2^m$ Durchmesser, $0{,}1^m$ Stärke und $G = 2360$ Klg. Gewicht, also

$$m = \frac{G}{g} = \frac{2360}{9181} = 240 \text{ Masse,}$$

hat das Trägheitsmoment $J^m = 1181$ und leistet bei $n = 50$ Umdrehungen in der Minute eine Arbeit von 2,2 PS. Sie muss hierbei alle Sek. regelmässig den Bogen S. 305, Gl. 113

$$w = \frac{\pi}{30} n = \frac{3 \cdot 14}{30} 50 = 5{,}22$$

durchlaufen, oder nach Gl. 112a jeder Punkt

$$w^\circ = \frac{360}{2\pi} 5{,}22 = 294^\circ.$$

Zum Ahtrieb erfordert sie, wenn sie sich mit $w_0 = 5{,}22$ Winkelbeschleunigung bewegen soll, nach Gl. 124 das Moment

$$M = Kr = J \cdot 5{,}22 = 118 \cdot 5{,}22 = 616 \text{ Klgmeter.}$$

Ihr Trägheitshalbmesser ist Gl. 118, da die Masse hier $\mu = 240 = m$

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{\mu}} = \sqrt{\frac{118}{240}} = 0{,}67^m;$$

hiernach die Kraft am Trägheitsradius

$$K = \frac{616}{0{,}67} = 920 \text{ Klg.},$$

und die Umfangsbeschleunigung nach Gl. 126

$$p_0 = \frac{K}{\mu} = \frac{920}{240} = 3{,}8^m.$$

Wirkt die Kraft K an $1{,}5^m$ Halbmesser, dann ist sie nur

$$K = \frac{616}{1{,}5} = 410 \text{ Klg. stark.}$$

Die Umfangsbeschleunigung nach Gl. 125

$$p_0 = w_0\, 1{,}5 = 5{,}22 \cdot 1{,}5 = 7{,}83^m \text{ pro Sekunde.}$$

Hierbei haben wir alle Widerstände ausser Acht gelassen. Der letzterwähnte Angriffspunkt in der Entfernung von $1{,}5^m$ vom Drehpunkt, würde nach $t = 6$ Sek. eine Geschwindigkeit haben (s. Gl. 3, S. 5 für $c = o$)

$$v = pt = 7{,}83 \cdot 6 = 46{,}86^m;$$

der zurückgelegte Weg wäre dann

$$s = \frac{1}{2}\, pt^2 = \frac{1}{2}\, 7{,}83 \cdot 6^2 = 141^m.$$

Da dem Halbmesser von $1{,}5^m$ der Umfang von $9{,}42^m$ entspricht, so hat sich die Scheibe hierbei $\frac{141}{9{,}42} = 15$ mal herumgedreht. —

Würde man am Trägheitshalbmesser $K = 60$ Klg. angreifen lassen, dann wäre die Umfangsbeschleunigung nach Gl. 126

$$p_0 = \frac{K}{\mu} = \frac{60}{240} = 0{,}25^m.$$

Nach 10 Sekunden ist die Geschwindigkeit $v = 0{,}25 \cdot 10 = 2{,}5^m$ und der Weg $s = 0{,}25 \frac{1}{2}\, 10^2 = 12^m$.

Da der Trägheitshalbmesser $\rho = 0{,}67$, also der Umfang

$$2 \cdot 0{,}67 \cdot 3{,}14 = 4{,}2^m,$$

so dreht sich die Scheibe jetzt nur $\frac{12}{4{,}2} = 3$ mal ungefähr herum in $t = 10''$. —

Nehmen wir zwei eiserne Zapfen, auf jeder Seite der Scheibe einen solchen von $60^{mm}$ Durchmesser an, so beanspruchen wir, wenn $\varphi_0 = 0{,}14$ als Reibungskoefficient vorausgesetzt wird, ein Zapfenreibungsmoment (s. S. 157, Gl. 71) $M_z = \varphi_0 \frac{d_z}{2} G = 0{,}14 \frac{60}{2} \cdot 2360 = 9912$ Klgmm., oder $M_z = \frac{9912}{1000} = 10$ Klgmeter.

Lassen wir am Umfang der Scheibe die Kraft K = 30 Klg. wirken, dann ist das treibende Moment bei $d = 2^m$ Scheibendurchmesser

$$\frac{Kd}{2} = 30 \cdot \frac{2}{2} = 30 \text{ Klgm.},$$

somit die Winkelbeschleunigung, weil das Reibungsmoment dem Betriebsmoment entgegenwirkt

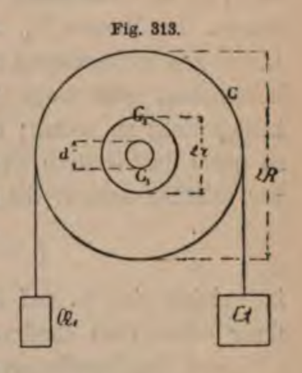
$$w_0 = \frac{Kd/2 - M_z}{J} = \frac{30 - 10}{118} = 0{,}17.$$

Die Beschleunigung am Umfang $\frac{d}{2} \cdot w_0 = 1 \cdot 0{,}17 = 0{,}17^m$. In $t = 10''$ ist dann die Geschwindigkeit $v = pt = 0{,}17 \cdot 10 = 1{,}7^m$, und der Weg $s = \frac{1}{2} pt^2 = \frac{1}{2} 0{,}17 \cdot 10^2 = 8{,}5^m$. Die Zapfengewichte und deren Massenbewegungen haben wir hierbei vernachlässigt.

---

**II.** $G_1$ sei in beistehender Figur eine Seil- oder Kettenscheibe oder Trommel vom Halbmesser R und Gewicht $G_1$ Klg., sie ist auf einer Achse $G_2$, die ihrerseits mit zwei Zapfen $G_3$ versehen ist, befestigt. Mit Vernachlässigung der Zapfengewichte $G_3$ sei das Gewicht der Achse $G_2$, r sei der Halbmesser und d die Zapfendurchmesser.

Fig. 313.




Der Zweck der Trommel soll sein, mittelst des Gewichtes Q das links herabhängende Gewicht $Q_1$ zu heben; es muss also $Q > Q_1$ oder $q = Q - Q_1$ sein, damit ein Überwuchtgewicht imstande ist, die Gesamtmasse zu drehen und ihre Reibung in den Zapfenlagern die Ketten- oder Seilwiderstände zu überwinden; die letzteren wollen wir vorläufig noch vernachlässigen und nur die Zapfenreibung in Rücksicht ziehen. Damit infolge der Überwucht Q nicht zu schnell sinkt und mit grosser Geschwindigkeit unten (und $Q_1$ oben) anlangt, bringt man noch eine Bremse

an, auf die wir auch in den weiteren Anwendungen später zurückkommen werden.

Bemerkung. Ein ähnlicher Apparat wird beispielsweise als hydraulischer Gichtaufzug, Wassertonnenaufzug, bei Hochöfen verwendet, um die Brennmaterialien und Erze auf das oberste Plateau des Hochofens, auf die Gicht zu schaffen. Q und $Q_1$ sind dann zwei wasserdichte Kasten, die beide als Schalen zur Aufnahme der Erz- oder Brennmaterialwagen dienen. Auf der Gicht ist ein Wasserbehälter, welcher, wenn Q oben und $Q_1$ auf der anderen Seite sich unten befindet, gefällt wird, bis eine Überwucht das Sinken von Q und Steigen von $Q_1$ veranlasst, unten entleert sich durch ein Ventil am Boden des Kastens Q dieser, und das Spiel beginnt von der anderen Seite.

Nach Gl. 19, S. 24 ist, wenn K die treibende Kraft, G das Gewicht, die Beschleunigung allgemein

$$p = \frac{K}{G} g,$$

mit der sich die Masse vorwärts bewegt.

In Fig. 313 ist $Q - Q_1$ die Betriebskraft, welcher die Widerstandskraft W entgegenwirkt, während Q und $Q_1$ als Gewichte zunächst in Betrieb gesetzt werden sollen.

Ausserdem soll aber die Überwucht noch die Massen der Gewichte $G_1 G_2 G_3$ in Umdrehung versetzen, oder wenn wir $G_3$ und $G_2$ zusammenfassen, die Massen $G_1$ und $G_2$ und die Achse drehen. Die betreffende Umfangsbeschleunigung ist hier jedenfalls verkehrt proportional der Trägheitsmasse, oder wenn wir diese durch g dividiert denken, dem Trägheitsgewicht zu setzen; da aber Q und $Q_1$ am Halbmesser R angreifen, so muss das letztere auch auf diesem Hebelarm reduciert werden, und wir erhalten sonach die Gleichung

$$p = \frac{Q - Q_1 - W}{Q + Q_1 + \mu_1 + \mu_2} g,$$

in welcher sich $\mu_1$ auf die Trägheitsmasse der Trommel und $\mu_2$ auf die ihrer Achse (mit Zapfen) beziehen mögen.

Das Zapfenreibungsmoment ist nach Gl. 71

$$M_r = \varphi_0 \frac{d}{2} (G_1 + G_2) = W R,$$

wenn also W am Halbmesser R die Widerstandskraft bedeutet; sie folgt aus vorstehender Gleichung

$$\text{(a)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad W = \frac{(G_1 + G_2) \varphi_0 d}{2 R}.$$

Um $\mu_1$ als Gewichtsmasse am Trägheitshalbmesser wirkend auf den Umfang zu reducieren, setzen wir nach Gl. 119

$$\mu_1 R^2 = J = \frac{1}{2} G_1 R^2,$$

woraus, weil J das Trägheitsmoment der Trommel (als Cylinder gedacht),

$$\mu_1 = \frac{1}{2} G_1 \text{ folgt. } \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

Ebenso erhält man aus $\mu_2 R^2 = J = \frac{1}{2} G_2 r^2$,

$$\mu_2 = \frac{1}{2} G_2 \frac{r^2}{R^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

sonach durch Einsetzen in p,

$$p = \frac{Q - Q_1 - \frac{1}{2R} \varphi_0 d (G_1 + G_2)}{Q + Q_1 + \frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_2 \frac{r^2}{R^2}} g. \quad \ldots \quad (127)$$

Werden die Widerstände, hier nur W, nicht berücksichtigt und die Massendrehbewegungen ausser Acht gelassen, $\mu_1$ und $\mu_2$ Null gesetzt und ist $Q_1 = 0$, so wird $p = g$, dann sinkt Q natürlich mit der Beschleunigung der Schwere.*)

Setzt man $Q = 850$ Klg., $Q_1 = 800$ Klg., $R = 1{,}5^m$, $d = 0{,}06 = 60^{mm}$ Zapfendurchmesser, $r = 0{,}2^m$ und $G_1 = 1600$, $G_2 + G_3 = 400$, so erhält man, wenn $\varphi_0 = 0{,}25$

$$p = \frac{850 - 800 - \frac{1}{2 \cdot 1{,}5} 0{,}25 \cdot 0{,}06\,(1600 + 400)}{850 + 800 + \frac{1}{2} 1600 + \frac{1}{2} 400 \frac{0{,}2^2}{1{,}5^2}} 9{,}81 = 0{,}15^m.$$

Soll das Material $h = 20^m$ hoch gehoben werden, so sinkt Q in der Zeit t mit $p = 0{,}15^m$ Beschleunigung, aus

$$h = \frac{1}{2} p t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (128)$$

folgt dann die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0{,}15}} = 16^1/_3 \text{ Sek.}$$

und die Endgeschwindigkeit

$$v = pt = 0{,}15 \cdot 16^1/_3 = 2{,}5^m.$$

Lässt man die Arbeit der Drehung der Massen ausser Rücksicht,

---

*) Siehe S. 28.

dann wird

$$p = \frac{Q - Q_1 - W}{Q + Q_1} g = 0{,}25^m, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0{,}25}} = 17''.$$

Sinkt Q frei, dann ist die Fallzeit

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9{,}81}} = 2''.$$

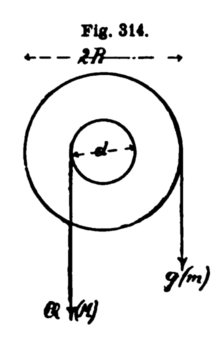


Fig. 314.

**III.** An einer Scheibe wirkt, Fig. 314, am Umfang eine Kraft, ein Gewicht q, an der Achse das Gewicht Q; R und $\frac{d}{2}$ sind die Halbmesser beider.

Damit eine Drehung nach rechts eintreten kann, soll $qR > Q\frac{d}{2}$ vorausgesetzt werden.

Die Massen von Q und q seien M und m.

In die allgemeine Formel $p_0^1 = \frac{K_1}{\mu_1}$ Gl. 125a, wollen wir zunächst die hier gegebenen Betriebskräfte einsetzen. q wirkt unmittelbar an R, hingegen Q am Umfang der Achse, muss erst auf den Rollenumfang reduciert werden. Ist $Q_1$ das reducierte Gewicht, so muss sich verhalten

$$Q_1 : Q = \frac{d}{2} : R, \text{ woraus } Q_1 = \frac{Qd}{2R}.$$

Der Zapfenwiderstand W am Umfang von d auf R reduciert, folgt aus

$$W_1 : W = \frac{d}{2} : R; \text{ somit reduciert } W_1 = W\frac{d}{2R}.$$

Die Triebkraft $K_1$ ist jetzt, weil $Q_1$ und $W_1$ der Kraft q entgegenwirken

$$K_1 = q - W_1 - Q_1 = q - Q\frac{d}{2R} - W_1\frac{d}{2R} = q - \frac{d}{2R}(Q + W).$$

$\mu_1$ enthält die sämtlichen der Umfangsbeschleunigung $p_0^1$ verkehrt proportionalen Trägheitsmassen, die aber auch auf den Rollenumfang zu reducieren sind. Die Reduktion der Masse M folgt nach Gl. 119 aus

$$M_1 : M = \left(\frac{d}{2}\right)^2 : R^2, \text{ reduciert } M_1 = \frac{M\left(\frac{d}{2}\right)^2}{R^2} = M\frac{d^2}{4R^2}.$$

Die Masse m wirkt unmittelbar am Umfang, bedarf also keiner weiteren Reduktion. Ist J das Gesamtträgheitsmoment von Welle und Rad, beide cylindrisch gedacht, dann ist die auf R reducierte Trägheits-

masse $\frac{J}{R^2}$ nach Gl. 118, somit

$$\mu_1 = m + M\frac{d^2}{4R^2} + \frac{J}{R^2} = \frac{q}{g} + \frac{Q}{g}\frac{d^2}{4R^2} + \frac{J}{gR^2},$$

wenn q, Q und in J Welle und Rad als Gewichte aufgefasst werden; es wird dann

$$p_0^1 = \frac{q - \frac{d}{2R}(Q+W)}{m + M\frac{d}{4R^2} + \frac{J}{R^2}} = g\frac{q - \frac{d}{2R}(Q+W)}{q + Q\frac{d}{4R^2} + \frac{J}{R^2}}, \text{ oder}$$

$$p_0^1 = p = gR\frac{qR - \frac{d}{2}(Q+W)}{R^2 q + Q\left(\frac{d}{2}\right)^2 + J}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

Es sei $R = 0{,}4^m$, $\frac{d}{2} = 0{,}05^m$, ferner sei an beiden Seiten der Achse noch ein Zapfen von $\frac{d_1}{2} = 0{,}05^m$ Durchmesser. q sei 2 Klg. $Q = 6$; das Gewicht von Rad und Welle (die Zapfen vernachlässigt) seien: das Radgewicht 3 Klg., die Achse oder Welle 2 Klg.

Das ganze Zapfenreibungsmoment ist dann $(2 + 6 + 3 + 2)\varphi_0\frac{d_1}{2}$, wenn $\varphi_0 = 0{,}15$, $\frac{d_1}{2} = \frac{1}{2}0{,}05$, so folgt als solches

$$13 \cdot 0{,}15\frac{0{,}05}{2} = 0{,}4875 \text{ Klgmeter.}$$

Dieses Moment muss aber als Widerstand W auf den Umfang von d reduciert werden, es wird dann, weil $\frac{d}{2} = 0{,}05$,

$$W = \frac{0{,}4875}{0{,}05} = 9 \text{ Klg.};$$

die Reduktion auf R liegt bereits in der Formel.

Das Trägheitsmoment des ganzen Apparates ist (ausser den Zapfen), da $J = \frac{1}{2}Gr^2$ das Trägheitsmoment für einen Cylinder,

$$J = R^2\frac{3}{2} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{2}{2} = 0{,}2425.$$

Wir erhalten dann durch Einsetzen dieser Daten in (129)

$$p_0^1 = p = 9{,}81 \cdot 0{,}4\frac{2 \cdot 0{,}4 - 0{,}05(6+9)}{2 \cdot \overline{0{,}4}^2 + 6 \cdot \overline{0{,}05}^2 + 0{,}2425} = 0{,}35^m.$$

Mit dieser Beschleunigung sinkt die Masse m oder das Gewicht q, da wie wir voraussetzten

$$2 \cdot 0{,}4 > 6 \cdot 0{,}05 \text{ oder } 0{,}8 > 0{,}3.$$

Die Masse M oder Q steigt aber mit der Beschleunigung $p_1$, die sich aus der Gleichung

$$p : p_1 = R : \frac{d}{2} \text{ ergiebt, nämlich}$$

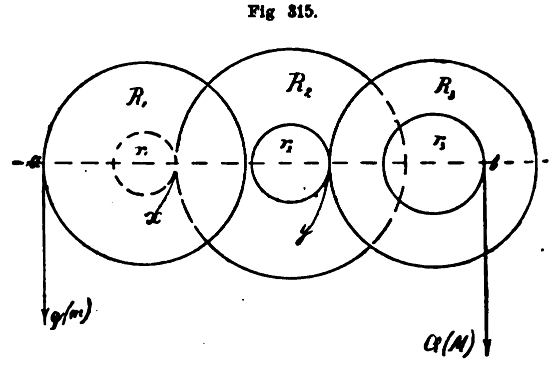
$$p_1 = p \frac{d}{2R} = 0{,}35 \frac{0{,}05}{0{,}4} = 0{,}044^m.$$

Während q in $t = 6$ Sek. um $h = \frac{1}{2} pt^2 = \frac{1}{2} 0{,}35 \cdot 36 = 6{,}3^m$ sinkt, wird Q um $\frac{1}{2} \cdot 0{,}044 \cdot 6^2 = 0{,}8^m$ gehoben.

Die lebendige Kraft oder Überwucht liegt hier natürlich wieder im Zähler, sie ist $q - \frac{d}{2R}(Q + W)$ oder $2 - \frac{0{,}05}{0{,}4}(6 + 9) = 0{,}1$ Klg. Es gehen also $1\,^9/_{10}$ Klgm. Antriebskraft verloren und bleiben zum Betrieb nur 0,1 Klg. oder $^1/_5$ Pfd.

**IV.** Wir haben beistehend ein Räderwerk dargestellt, bestehend aus ineinander greifenden Zahnrädern und Getrieben. Die drei Paare liegen in Zapfen (deren drehende Massen wir wieder unberücksicht lassen wollen), in a greift die Masse m, das Gewicht q, in b die Masse M, das Gewicht Q an. Es soll q gross genug sein, dass Q gehoben werden kann. Das Trägheitsmoment des ersten Paares, Rad $R_1$ und Welle $r_1$ sei $J_1$, die der anderen Paare seien $J_2$ und $J_3$. Es sind alle Massen auf a zu reducieren.

Fig. 315.




Das Trägheitsmoment $J_1$ des ersten Rades mit Welle auf a reduciert wird $\frac{J_1}{R_1^2}$, das Rad $R_2$ mit Welle $r_2$, $J_2$ zunächst auf den Umfang von $R_2$ auf X reduciert wird $\frac{J_2}{R_2^2}$ und auf a reduciert $\frac{J_2 r_1^2}{R_2^2 R_1^2}$.

Die Trägheitsmasse des letzten Paares auf a reduciert, wird

$$\frac{r_1^2 r_2^2 J_3}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}.$$

Die Masse M der Last Q am Halbmesser $r_3$ wirkend, auf a reduciert, giebt

$$M \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}.$$

Die Summe aller auf a reducierten Massen ist

$$\mu = m + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{r_1^2 J_2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{R_1^2 R_2^2} \frac{J_3}{R_3^2} + \frac{r_1^2 r_2 r_3^2}{R_1^2 R_2^2 R_3^2} M.$$

Die Betriebskraft an a unmittelbar wirkend ist q, während Q an b wirkend erst wieder reduciert werden muss, man erhält die reducierte Kraft

$$Q \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \frac{r_3}{R_3}.$$

$W_1$ sei die Widerstandskraft auf a reduciert, an a wirkend, um die Zapfen- und Räderreibung zu überwinden.

Man erhält schliesslich gleichlautend mit Gl. 125a die Beschleunigung von q (nur mit p bezeichnet)

$$p = \frac{q - \left(\frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3} Q + W_1\right)}{m + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{r_1^2 J_2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 J_3}{R_1^2 R_2^2 R_3^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 M}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}}, \text{ oder}$$

wenn man in den Trägheitsmomenten, in M und m die Gewichte einführt,

$$p = g \frac{q - \left(\frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3} Q + W_1\right)}{q + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{r_1^2 J_2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 J_3}{R_1^2 R_2^2 R_3^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 Q}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}} \quad . \quad . \quad (130)$$

Die Beschleunigung der Last Q ist $p_1$; aus

$p_1 : p = r_1 r_2 r_3 : R_1 R_2 R_3$, ergiebt sich

$$p_1 = p \frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130a)$$

Sind alle drei Räderpaare gleich, dann folgt

$$p = g \frac{q - \left[\left(\frac{r}{R}\right)^3 Q + W_1\right]}{q + J\left[\left(\frac{1}{R^2}\right) + \frac{r^2}{R^4} + \frac{r^4}{R^6}\right] + \left(\frac{r}{R}\right)^6 Q} \text{ und} \quad (130b)$$

$$p_1 = p \left(\frac{r}{R}\right)^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130c)$$

Sind bei gleichen Räderpaaren $G_1$ und $G_2$ die Gewichte, $G_1$ das des Rades und $G_2$ das der Welle, so ist das Trägheitsmoment

(a) . . . $$J = \frac{G_1 R^2}{2} + \frac{G_2}{2} r^2 = \frac{1}{2} (G_1 R^2 + G_2 r^2).$$

Das Zapfenreibungsmoment für ein Räderpaar ist $(G_1 + G_2) \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0$, wenn $\mathfrak{d}$ Zapfendurchmesser, die Kraft, welche an der Oberfläche der Welle r den Zapfen dreht, sei

$$S = \frac{(G_1 + G_2) \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0}{r}.$$

Wird S vom ersten Räderpaar nach a verlegt, dann ist

$$S_1 = \frac{(G_1 + G_2) \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0}{rR},$$

wird die vom zweiten Räderpaar nach a verlegt, so ist sie

$$S_2 = \frac{(G_1 + G_2)}{r} \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0 \frac{r}{RR} = \frac{G_1 + G_2}{R^2} \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0,$$

verlegt man sie endlich vom dritten Räderpaar, also von b nach a, so ist sie

$$S_3 = \frac{G_1 + G_2}{r} \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0 \frac{1}{R} \frac{r}{R} \frac{r}{R} = \frac{G_1 + G_2}{R^3} r \frac{\mathfrak{d}}{2} \varphi_0.$$

Es wird jetzt

(b) . $$W_1 = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{(G_1 + G_2) \mathfrak{d} \varphi_0}{2\,Rr} (R^2 + Rr + r^2).$$

Beide Gl. a und b in 130b eingeführt, folgt

(130d) $$p = g \frac{q - \left[\left(\frac{r}{R}\right)^3 Q + \frac{(G_1 + G_2) \mathfrak{d} \varphi_0}{2\,Rr} (R^2 + Rr + r^2)\right]}{q + \frac{1}{R^6}\left[r^6 Q + \frac{1}{2} (G_1 R^2 + G_2 r^2)(R^4 + R^2 r^2 + r^4)\right]}.$$

**V.** Die Arbeit, welche ein sich in zwei Zapfen drehendes Rad, vom Durchmesser d, dessen Halbmesser R verrichtet, ist, wie uns bekannt $A = \frac{w^2}{2} J$, wenn w die Winkelgeschwindigkeit und J das Trägheitsmoment des Rades.

Soll nun dasselbe bei n Umdrehungen nur die Zapfenreibung überwinden, dann setzen wir für A die dieser entsprechende Arbeit ein; dieselbe ist aber auf die Oberfläche des Zapfens bezogen, wenn $\varphi_0$ Reibungskoefficient und G das Radgewicht: $A = G \varphi_0 \pi d n$.

D. h. die Reibungskraft $G\varphi_0$ muss noch bei n Umdrehungen den Weg $\pi d n$ zurücklegen, bis die ganze Arbeit aufgezehrt.

Wir erhalten demnach die Bedingungsgleichung

$$J \frac{w^2}{2} = G\varphi_0 \pi d n.$$

Setzen wir hierin $J = \frac{1}{2}\frac{G}{g}R^2$ und $w = \frac{\pi}{30}u$, wenn u die Anzahl der Umdrehungen in der Minute ist, bei Beginn der Zapfenreibungsarbeit, so folgt

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{\pi^2}{30^2}u^2 = G\varphi_0 \pi d n.$$

Hieraus ergiebt sich die fragliche Tourenzahl, um die Zapfenreibung zu vernichten,

$$n = 0{,}00\,009 \frac{R^2 u^2}{d\varphi_0}. \quad \dots \dots \quad (131)$$

Ist v die Umfangsgeschwindigkeit den Umdrehungen u entsprechend, so wird n, wenn man aus

$$v = \frac{2 R \pi u}{60}, \text{ den Wert } u^2 = \frac{60^2 \cdot v^2}{4 R^2 \pi^2} \text{ einsetzt,}$$

$$n = 0{,}00\,833 \frac{v^2}{d\varphi_0}. \quad \dots \dots \quad (131\,a)$$

Soll umgekehrt das Rad noch n Umdrehungen machen, um die Zapfenreibungsarbeit aufzuzehren, dann ist bei Beginn dieser Arbeit aus vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} v^m &= 10{,}8\sqrt{\varphi_0 d n} \text{ bezw. die Umdrehungen} \\ u &= \frac{106}{R}\sqrt{d\varphi_0 n.} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (131\,b)$$

Ein Rad von $R = 0{,}5^m$ Halbmesser und $d = 0{,}1^m$ Zapfendurchmesser macht $u = 60$ Umdrehungen in der Minute, wie lang läuft es noch, wenn $\varphi_0 = 0{,}14$ Zapfenreibungskoefficient.

Man findet, dass es noch

$$n = 0{,}00\,009 \frac{0{,}5^2 \cdot 60^2}{0{,}1 \cdot 0{,}14} = 6 \text{mal herumläuft.}$$

Es musste hierbei eine Umfangsgeschwindigkeit bei Beginn der Zapfenreibungsarbeit haben von

$$v = 10{,}8\sqrt{0{,}14 \cdot 0{,}1 \cdot 6} = 3{,}13^m. -$$

Soll ein Rad nur noch $n = 2$ Touren machen, um mit diesen die Zapfenreibung zu überwinden, so müsste bei $\varphi_0 = 0{,}1$, $d = 0{,}1$ und $R = 0{,}5^m$

$$v = 10{,}8 \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 2} = 1{,}52^m$$

sein und dürfte es vorher nicht mehr als

$$u = \frac{106}{0{,}5} \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 2} = 29 \text{ Umdrehungen}$$

in der Minute machen.

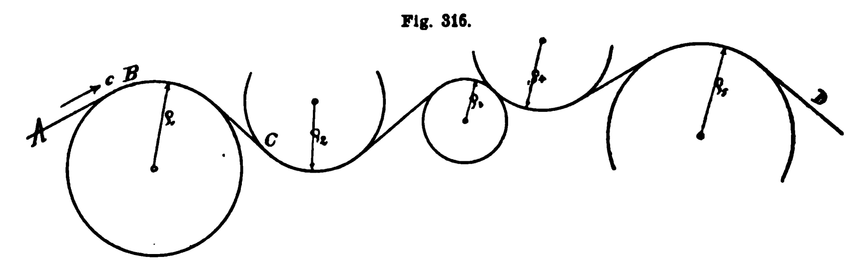
---

## Bewegungen unter gewissen Bedingungen.

### 1. Die Centrifugal- und Centripedalkräfte (Schwungkräfte).

Es soll sich eine Masse, ein Körper längs der vorgeschriebenen Bahn ABC ... D, welche aus Geraden und krummen Strecken zusammengesetzt

Fig. 316.

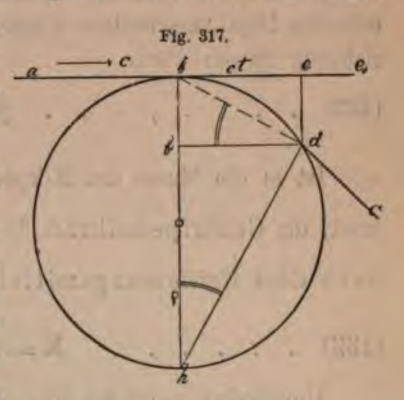



ist, bewegen. Die Kraft, welche ihn zur Bewegung veranlasst, soll so wirken, dass eine gleichmässige, gleichförmige Bewegung entsteht. Auf der Strecke AB geht die Bewegung geradlinig vorwärts, in B muss der Körper abgelenkt werden, denn sonst würde er nicht nach C gelangen. Ausser der Kraft, welche ihn gleichmässig forttreibt, wirkt also auf ihn noch eine Seitenkraft ein, die ihn zwingt, sich nach rechts in der Kurve zu halten. Die krumme Bahn, die er jetzt einschlägt, kann aus irgend welchen Kurven zusammengesetzt oder gebildet sein, deren Bildungsgesetze uns vielleicht nicht einmal bekannt sind. Um nun einen Anhaltepunkt zu gewinnen, versuchen wir jede der Krümmungen durch einen Kreisbogen zu ersetzen, der sich der Krümmung soviel wie möglich nähert, ev. mit ihr zusammenfällt. Man nennt solche in der Weise verwendete Kreisbögen **Krümmungskreise** und die zugehörigen Radien **Krümmungsradien** $\rho_1 \rho_2 \sigma_3$ .... Reducieren wir denn unsere Betrachtung auf die zwangs- oder bedingungsweise Bewegung eines Körpers in einem Kreisbogen, so hätten wir dann nur nötig, wenn wir auf die Kurvenbewegung zurückschliessen wollen, diese nur aus den verschiedenen Kreiskrümmungen zusammenzustellen.

Wir haben darum in Fig. 317 einen solchen Krümmungskreis aufgezeichnet, in welchem sich der Körper von a kommend nach c gehend bewegt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c^m$ pro Sek.

Kommt der Körper von a und ist bis b vorgerückt, so erfährt er von dort eine Ablenkung, die ihn zwingt erst wieder in d in eine gerade Richtung dc überzugehen. Die Ablenkungskraft zieht den Körper aber wie an einem Bande nach dem Mittelpunkt der Krümmung zu. Würde ihre Wirkung aufhören, dann ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass der Körper aus der geraden Richtung ab wo anders als nach $e_1$ nach der tangentialen Richtung hin senkrecht zur Ablenkungsrichtung sich bewegt. Das gleiche würde auch stattfinden, wenn sich der Körper vorher schon im Kreis bewegt hätte; hört in b plötzlich die Ablenkungskraft auf, würde das Band zerschnitten, dann bewegt sich der Körper tangential mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit c gleichförmig weiter. Die nach dem Mittelpunkt der Krümmung wirkende Ablenkungskraft wirkt aber beschleunigend auf den Körper ein, s. S. 20, so dass er in $f_1$ beispielsweise mit einer gewissen Beschleunigung p pro Sekunde anlangen würde.

Fig. 317.




Beide Wege, der von b nach e und b nach $f_1$ setzen sich eben, wie im Parallelogramm der Kräfte zu einer resultierenden Bewegung, dem Wege cd zusammen. Wir haben S. 25, Gl. 20 gefunden, dass ein Körper, der mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit kommt, von einer Kraft K getrieben, sich beschleunigend bewegt und in der Zeit t den Weg zurücklegt

$$s = ct + \frac{1}{2} g \frac{K}{G} t^2 = ct + \frac{1}{2} pt^2.$$

Hört die Kraft auf zu wirken, dann bewegt sich der Körper tangential und legt in der Zeit t den Weg $be = ct$ zurück, denn wenn $K = 0$, so wird $s = ct$. Würde aber keine ursprüngliche Bewegung vorhanden sein, also $c = 0$, dann wäre der Weg

$$bf_1 = \frac{1}{2} g \frac{K}{G} t^2 = \frac{1}{2} pt^2.$$

Nun ist $\triangle\, bdf_1 \sim bdh$ und es verhält sich

$$bf_1 : bd = bd : bh \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2} pt^2 : bd = bd : 2\rho, \text{ woraus}$$

$$\overline{bd}^2 = pt^2 \rho.$$

Je kleiner aber t, um so kleiner ist bd als Bogen und Sehne, um so mehr kann man bd mit $be = ct$ vertauschen. Man erhält dann

$$\overline{(ct)}^2 = pt^2 \rho \text{ oder } c^2 \doteq p\rho,$$

woraus die Beschleunigung folgt, mit welcher sich der Punkt dem Krümmungsmittelpunkt nähert, oder wenn der schon mehrfach erwähnte Faden oder das Band zerschnitten würde, mit der der Körper nach der Schwungrichtung fliegen würde

$$(132) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p = \frac{c^2}{\rho}.$$

Ist m die Masse des Körpers, also $p = \frac{K}{m}$, so würde die Schwungkraft, die Centripedalkraft,*) mit der der Körper gehalten wird, nach dem Krümmungsmittel zu aus $\frac{K}{m} = \frac{c^2}{\rho}$ sich ergeben, nämlich

$$(133) \quad \ldots\ldots \quad K = m\frac{c^2}{\rho} = \frac{G}{g}\frac{c^2}{\rho}.$$

Umgekehrt treibt den Körper die Kraft K nach tangentialer Richtung, man nennt sie dann die Centrifugal- oder Fliehkraft.

Wir wollen für beide Ausdrücke in Zukunft den richtigeren für K, nämlich Schwungkraft; bezw. für p Schwungbeschleunigung beibehalten; denn jeder Körper hat das Bestreben nach der Tangente zu entfliehen, diese ist aber durchaus nicht entgegengesetzt der Centripedalkraftrichtung. —

Dreht sich ein Körper in t Sek. einmal im Kreise herum, dann ist seine Geschwindigkeit pro Sek.

$$c = \frac{2\rho\pi}{t},$$

die Schwungbeschleunigung lässt sich dann auch ausdrücken

$$(132a) \quad \ldots\ldots \quad p = \frac{c^2}{\rho} = \frac{4\rho^2\pi^2}{\rho t^2} = \frac{4\rho\pi^2}{t^2},$$

die Schwungkraft,

$$(133a) \quad \ldots\ldots \quad K = \frac{G}{g}\frac{4\rho\pi^2}{t^2} = m\frac{4\rho\pi^2}{t^2},$$

*) Centripedal nach dem Mittel zu strebend.

wobei also der Körper für einen Umgang t Sek. braucht. Bezeichnen wir wieder mit $w = \frac{c}{\rho}$ die Winkelgeschwindigkeit Gl. 109, S. 303, so folgt für p und K

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c^2}{\rho} = \frac{w^2 \rho^2}{\rho} = w^2 \rho \text{ und} \\ K &= m w^2 \rho = \frac{G}{g} w^2 \rho \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (134)$$

Macht endlich der Körper in der Minute n Umdrehungen, dann kann man setzen für

$$c = \frac{2 \rho \pi n}{60} = \frac{\rho \pi n}{30},$$

sonach erhält man

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\pi^2}{30^2} \rho n^2 = 0{,}01097 \rho n^2 \\ K &= m \frac{\pi^2}{30^2} \rho n^2 = \frac{G}{g} \frac{\pi^2}{900} \rho n^2 = 0{,}00112 G \rho n^2. \end{aligned}\right\} \quad (135)$$

**Beispiel I.** Eine eiserne Kugel von $G = 40$ Klg. Gewicht dreht sich an einer Stange von $\rho = 1{,}6^m$ Länge befestigt $n = 80$ mal in der Minute herum, ihre Schwungkraft ist nach Gl. 135

$$K = 0{,}00112 \cdot 40 \cdot 1{,}6 \cdot 80^2 = 459 \text{ Klg.}$$

Rechnet man sich aus

$$c = \frac{2 \rho \pi n}{60} = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 80}{60}$$

die Umfangsgeschwindigkeit aus, so findet sich $c = 13{,}55^m$, aus Gl. 133, natürlich auch wieder

$$K = \frac{40}{9 \cdot 81} \frac{13{,}55^2}{1{,}6} = 459 \text{ Klg.}$$

Die Stange muss also eine Zugkraft von 459 Klg. aushalten können, infolge der Drehung das 11fache des daran hängenden Gewichtes.

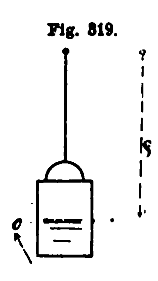
**II.** Dreht ein Kind an einer Schleuder einen Stein von $^1/_4$ Pfd. $= 0{,}125$ Klg. diese in einer Minute $n = 100$ mal herum und ist die Schleuderschnur $\rho = 0{,}5^m$ lang, so ist nach (135) die Geschwindigkeit beim Abfliegen des Schleudersteines

$$p = 0{,}01097 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{100}^2 = 55^m;$$

die Kraft im Band, welche auf die Hand einwirkt, ist

$$K = 0{,}00112 \cdot {}^1/_8\, 0{,}5 \cdot 10000 = 0{,}7 \text{ Klg., ca. } 1^1/_2 \text{ Pfd.}$$

**III.** Hängt man ein Glas, dessen Gewicht G, mit Wasser vom Gewicht W an eine Stange, so fragt es sich, wievielmal muss man das


Fig. 319.

Glas mit Wasser in der Minute herumdrehen, damit nichts herausläuft; die Länge der Stange sei $\rho$.

Wenn Gleichgewicht eingetreten ist, so ist die Schwungkraft K in Gl. 135 dem Wassergewicht gleich, während die Masse $\frac{G+W}{g}$ gedreht wird, oder deren Gewicht $G+W$. Die Bedingung lautet sonach nach Gl. 135

$$W = (G+W)\,0{,}00\,112\,\rho n^2, \text{ woraus}$$

$$n = \sqrt{\frac{W}{G+W}\,\frac{1}{0{,}00\,112\,\rho}} = 29{,}9\sqrt{\frac{W}{(G+W)\rho}}.$$

Setzt man in Gl. 133, $c = \frac{2\rho\pi n}{60}$, dann erhält man auch für $K = W$ und für $G$, $G + W$ eingeführt,

$$n = 30\sqrt{\frac{g}{\pi^2}\,\frac{W}{\rho(G+W)}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\rho}\,\frac{W}{G+W}} = 29{,}9\sqrt{\frac{W}{\rho}\,\frac{1}{W+G}}.$$

Wenn $W = {}^1\!/_2$ Liter $= 0{,}5$ Klg., $G = 0{,}25$ Klg., $\rho = 0{,}8^m$, dann sind die Umdrehungen pro Minute mindestens

$$n = 30\sqrt{\frac{0{,}5}{0{,}8\,(0{,}25+0{,}5)}} = 27.$$

**IV.** Eine Sichtmaschine, Siebcylinder, ist ein cylinderförmiges Sieb, welches statt einer etwas geneigten ebenen Siebfläche den Zweck hat, das Mahlgut in der Mühle zu sieben, sichten, es dreht sich in der Minute n mal herum; es dürfen aber auch die Umdrehungen ein gewisses Mass nicht überschreiten, damit durch die Schwungkraft das Mahlgut, wie das Wasser in obigem Glase, nicht statt durch das Sieb zu fallen, am Umfang mit herumgeschleudert wird. Es kommt nun darauf an, die Grenze festzustellen, innerhalb derer die Umdrehungen bleiben müssen.

Wir haben hier nur das sich drehende oder durch den Cylinder mitgenommene Mahlgutgewicht G in Rücksicht zu ziehen; setzt man demnach in Gl. 135 $K = G$, weil die Schwungkraft dem Gewicht des Mahlgutes entgegenwirken muss. Sobald Gleichgewicht eintritt, so folgt

$$G = 0{,}00\,112\,G\rho n^2, \text{ woraus}$$

$$n = 30\sqrt{\frac{1}{\rho}}.$$

Im vorigen Beispiel das Glasgewicht G unbeachtet gelassen, erhält man dasselbe; denn es wird für $G = 0$,

$$n = 29{,}9\sqrt{\frac{1}{\rho}}.$$

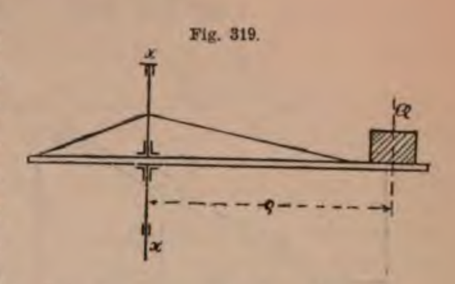
Eine solche Maschine von $2\,\rho = 1^m$ Durchmesser darf nicht mehr als

$$n \gtreqless 30 \sqrt{\frac{1}{0{,}5}} \gtreqless 42 \text{ Umdrehungen}$$

pro Min. machen.

**V.** Es dreht sich eine Scheibe oder ein Arm um die vertikale Achse XX, Fig. 319, und macht in der Minute n Umdrehungen. In der Entfernung $\rho$ liegt ein Körper vom Gewicht Q, nimmt die Schwungkraft überhand, dann überwindet Q die Reibung auf seiner Unterlage und wird herabgeworfen; unter welchen Umständen tritt Gleichgewicht ein.

Fig. 319.




Die Schwungkraft ist nach Gl. 135

$$K = \frac{G}{g} \frac{\pi^2}{900} \rho n^2.$$

Die Kraft, welche die Reibung überwinden müsste, um Q auf seiner Unterlage zu entfernen, ist $P = \varphi Q$, ist diese der Schwungkraft gleich, dann tritt Gleichgewicht ein, vorausgesetzt, dass, wie auch in Fig. 319 angenommen, Q durch gleitende Reibung gehalten wird. Es ist somit, da $G = Q$,

$$\varphi Q = \frac{Q}{g} \frac{\pi^2}{900} \rho n^2 = 0{,}00\,112\, Q \rho n^2, \text{ oder}$$

$$n = 30 \sqrt{\frac{\varphi}{\rho}}, \text{ bezw. } \varphi = 0{,}00\,112\, \rho n^2.$$

Der Reibungskoefficient von Eisen auf Holz ist (feucht, s. S. 165) $\varphi = 0{,}65$; demnach, wenn $\rho = 1{,}2^m$ sind die Umdrehungen

$$n = 30 \sqrt{\frac{0{,}65}{1{,}2}} = 22.$$

Mit $n = 23$ Umdrehungen wird die Reibung überwunden durch die Schwungkraft.

**VI.** Ein Karussell macht cirka $n = 20$ Umdrehungen in der Minute und hat $\rho = 3^m$ Halbmesser.

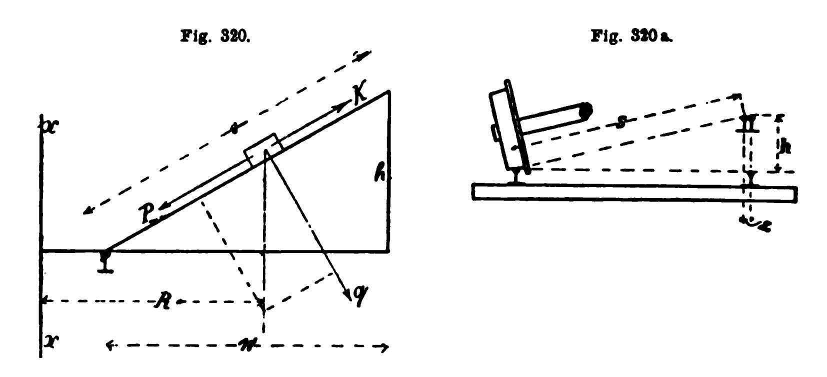
Auf einen Menschen von $G = 70$ Klg. Gewicht übt die Schwungkraft die Kraft aus

$$K = 0{,}00\,112\, G \rho n^2 = 0{,}00\,112 \cdot 70 \cdot 3 \cdot 20^2 = 9{,}4 \text{ Klg.}$$

Der Mensch drückt aber auf die Holzunterlage, und da die gleitende Reibung von Leder auf Holz $\varphi = 0{,}47$, so ist die Kraft, welche ihn durch Reibung hält $\quad P = \varphi \cdot 70 = 0{,}47 \cdot 70 = 3{,}3$ Klg.

Der Mensch muss sich also noch immer mit 9,4 — 3,3 = 6,1 Klg. festhalten, damit er nicht heruntergeschleudert wird.

**VII.** Es liegt ein Körper auf einer schiefen Ebene, welche sich um die senkrechte Achse XX dreht, s. Fig. 320.


Fig. 320. Fig. 320 a.

Die Kraft p, welche längs der Ebene wirkt, ist, wie man aus der Zerlegung leicht ersehen kann, $p = Q \sin \alpha$. Infolge der Drehung versucht die Schwungkraft K den Körper nach oben zu schleudern, und muss also der Kraft p das Gleichgewicht halten, aus $p = K$ oder nach Gl. 133, aus $Q \sin \alpha = \frac{Q}{g} \frac{c^2}{R}$, lässt sich sonach die Geschwindigkeit c berechnen, welche die Ebene haben darf.

Setzt man nun $\sin \alpha = \frac{h}{s}$ ein, dann folgt

(a) . . . . . . . . . . . $\frac{h}{s} = \frac{c^2}{gR}$

und die Erhöhung der Ebene nach der Schwungseite, von der Reibung des Körpers abgesehen,

(136) . . . . . . . . . . $h = \frac{sc^2}{gR}$.

Würde man die Reibung mit berücksichtigen, dann wäre für

$$p = \varphi Q \cos \alpha = \varphi q$$

zu setzen, und man erhält $\varphi Q \cos \alpha = \frac{Q}{g} \frac{c^2}{R}$, hieraus folgt der Erhöhungswinkel

(b) . . . . . . . $\frac{w}{s} = \cos \alpha = \frac{c^2}{gh\varphi}$,

wenn $\varphi$ der gleitende Reibungskoefficient.

Führt man die trigon. Beziehung

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{s}\right)^2}$$

ein, so findet man nach entsprechender Entwickelung

$$h = \frac{1}{gR\varphi} \sqrt{g^2R^2\varphi^2 - c^4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136\,a)$$

Diese Gleichung enthält die Bedingung, dass $g^2R^2\varphi^2 > c^4$ sein muss. Sobald also

$$\varphi = \frac{c^2}{gR} \text{ oder } c = \sqrt{gR\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

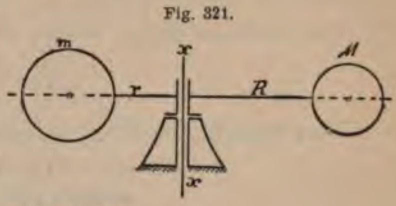
wird $h = 0$, d. h. dann überwindet die Schwungkraft K die Reibung selbst dann noch nicht, wenn das Gewicht Q auf einer horizontalen Unterlage sich dreht. —

Eine unmittelbare Anwendung der Gleichung **136** bieten die Eisenbahngeleise in Bögen; damit die Wagen von der Schwungkraft nicht nach aussen geschleudert werden, überhöht man den äusseren Schienenstrang theoretisch um $h^m$, wie dies Fig. 320a darstellen soll, wenn mit einer Maximalgeschwindigkeit von $c^m$ pro Sek. gefahren wird. Mit dieser Überhöhung des äusseren Schienenstranges muss aber auch eine Erweiterung des Eisenbahngeleises verbunden sein, um die Grösse $s_1$, da sonst ein Zwang zwischen Räder und Schienen im Befahren des durch die Überhöhung verengten Schienengeleises eintritt. —

Die Überhöhung würde bei $v = 12^m$ Fahrgeschwindigkeit, $R = 300^m$ Minimalradius, $s = 1{,}5^m$ Spurweite betragen, Gl. 136

$$h = \frac{1{,}5 \cdot 144}{300 \cdot 9 \cdot 81} = 0{,}07^m.$$

Fig. 321.




**VIII.** Zwei Massen M und m sind an einer Stange so befestigt, dass ein freies Umdrehen um die vertikale Achse XX stattfinden kann; es fragt sich, wie müssen sich die Halbmesser R und r zu den Massen verhalten, damit die horizontale Kraft in der Achse ganz verschwindet.

Da sich beide Massen in derselben Zeit drehen müssen, oder da beide für den jedesmaligen Umlauf dieselbe Zeit einhalten sollen, setzen wir nach Gl. 133a,

$$K = m\,\frac{4\,r\,\pi^2}{t^2} = M\,\frac{4\,R\,\pi^2}{t^2}, \text{ oder weil}$$

$m = \frac{q}{g}$ und $M = \frac{Q}{g}$, wenn q und Q die Gewichte, ergiebt sich $qr = QR$.

Diese Gleichung enthält das Hebelgesetz, dass das rechtsdrehende Moment dem links drehenden gleich sein muss.

Befestigt man an einer Stange auf der einen eine Kugel von $q = 8$ und auf der anderen Seite eine solche von $Q = 20$ Klg., so liegt der Achsenpunkt o im Verhältnis

$$\frac{r}{R} = \frac{20}{8} = 5 : 2.$$

Ist die Stange $0{,}6^m$ lang, dann folgt aus

$$r + R = 0{,}6 \text{ und } \frac{r}{R} = \frac{5}{2},$$
$$r = 17^{ctm} \text{ und } R = 43^{ctm}.$$

**IX.** Aus Versuchen fand, wie uns S. 21, Gl. 15 sagt, Galiläi bereits, dass die Erde jeden Körper mit $g = 9{,}808^m$ Beschleunigung in der Sek. nach dem Mittelpunkt zu anzieht. Berücksichtigen wir nun hierbei die Schwungkraft der Erde, welche dieselbe auf jeden Körper in der Nähe der Oberfläche ausüben muss, so ist diese offenbar in der Nähe des Äquators grösser, weil hier die Körper sich in der Entfernung des Erdhalbmessers r von der Erdachse befinden, nach den Polen zu ist sie kleiner. Es fragt sich nun, ob sie einen solchen Einfluss auf einen Körder ausübt, der für uns praktisch fühlbar ist, der also die Anziehungskraft am Äquator vermindert, an den Polen vergrössert, in welchem Fall wir je nach dem Breitegrad die von Galiläi ermittelte Fallbeschleunigung einer Korrektur unterwerfen müssten.

Der Erdhalbmesser im Äquator ist $R = 637\,7400^m$, die Differenz in den Breitegraden von Europa ist für uns zu geringfügig, als dass wir sie in Rücksicht ziehen wollen.

Die Beschleunigung, welche die Erde ausübt, ist dort nach Gl. 132a

$$p = \frac{4 R \pi^2}{t^2}.$$

Nun braucht die Erde zu einem Umgange

$$t = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400 \text{ Sek., sonach ist}$$

$$p = \frac{4 \cdot 637\,7400 \cdot \pi^2}{86\,400^2} = 0{,}034^m \text{ abg.}$$

Um $0{,}034^m$ cirka wird also am Äquator die Beschleunigung $g = 9{,}801$ verringert, und würde demnach nur betragen $9{,}767^m$.

Setzt man jetzt in Gl. 132a für $p = 9{,}767$ ein, und berechnet t, so findet sich

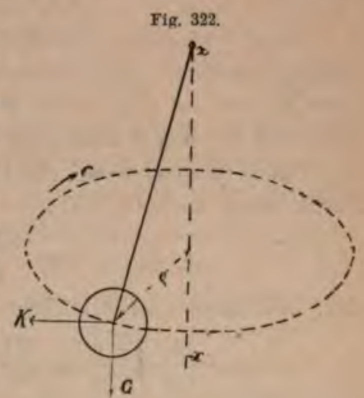
$$t = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{9{,}767}} = 5100 \text{ Sek.}$$

Gebraucht also die Erde nur 5100 Sek. zu einem Umgange, dann würde die Schwungbeschleunigung der Anziehungskraft, also der Fallbeschleunigung das Gleichgewicht halten und wir würden von der Erde fortgeschleudert werden. Sie müsste sich dann cirka $\frac{86\,400}{5100} = 17$ mal so oft in einem Tage drehen, 17 Umgänge in einem Tage machen.

An den Polen wirkt nur die Anziehungskraft der Erde und muss dort g grösser werden; unmittelbare Beobachtungen konnten bekanntlich bis jetzt noch nicht angestellt werden.

**X.** Centrifugalpendel (Rotations-Cirkularpendel). Eine Masse, eine Kugel vom Gewicht G ist an einem Faden oder einer leichten Stange in a befestigt und wird um die senkrechte Achse XX, Fig. 322, so gedreht, dass sie eine kreisförmige Bahn beschreibt, die sie mit der Geschwindigkeit $c^m$ pr. Sek. gleichförmig durchfliegt, h sei die Höhenlage des Punktes a.

Fig. 322.




Gebraucht sie zu einem Umgang t Sek., so ist die Schwungkraft, wenn der augenblickliche Kreisradius ρ nach Gl. 132a

$$K = \frac{G}{g}\frac{4\pi^2\rho}{t^2}.$$

Da nun aber auch $\frac{K}{G} = \text{tang}\,\alpha$, wenn α der Ausschlagwinkel, so folgt für $K = G\,\text{tang}\,\alpha$ oder $K = G\frac{\rho}{h}$ eingesetzt,

$$G\,\text{tg}\,g\alpha = G\frac{\rho}{h} = \frac{G}{g}\frac{4\pi^2\rho}{t^2}.$$

Hieraus findet man die Anzahl der Sek. für einen Umgang

$$\mathbf{t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{g\,\text{tang}\,\alpha}}} \quad \ldots\ldots \quad (137)$$

Umgekehrt ist

$$h = \frac{gt^2}{4\pi^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (137\text{a})$$

wenn das Pendel zu einem Umgang t Sek. gebrauchen soll.

Setzen wir in Gl. 133 $\frac{K}{G} = \text{tg}\,\alpha = \frac{\rho}{h}$, so folgt

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\rho}{h} = \frac{c^2}{g\rho},$$

hieraus folgt die Umfangsgeschwindigkeit

$$(138) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c = \sqrt{g \rho \operatorname{tang} \alpha} = \rho \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Die Umdrehungen in der Minute sind, weil

$$c = \frac{2 \rho \pi n}{60} \text{ und } n = \frac{30}{\pi} \frac{c}{\rho},$$

demnach c eingesetzt,

$$(138a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n = \frac{30}{\pi \rho} \sqrt{g \rho \operatorname{tang} \alpha} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Es gehört eine unendlich grosse Umdrehungszahl dazu, um ein solches Pendel in eine horizontale Lage zu bringen, für $\alpha = 90°$ wird $n = \infty$, weil es stets unter dem Einfluss der Anziehungskraft der Erde steht, die die Kugel nach dem Mittelpunkt der Erde zieht.

Damit beispielsweise ein Centrifugalpendel alle Sek. einen Umgang macht, muss nach Gl. 137a

$$h = \frac{9{,}81 \cdot 1^2}{4 \cdot \pi^2} = 0{,}297^m$$

sein, und muss nach Gl. 138a

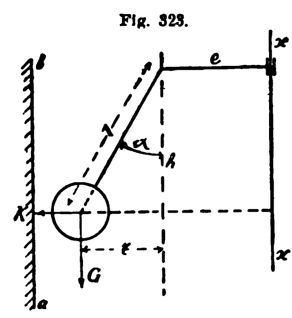
$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}297}} = 17{,}4 \text{ Umdrehungen}$$

in der Minute machen.

Nehmen wir den Ausschlagradius $\rho = 0{,}1^m$, dann wird die Umfangsgeschwindigkeit in der Sek. nach (138)

$$c = \rho \sqrt{\frac{g}{h}} = 0{,}1 \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}297}} = 0{,}18^m. —$$

Fig. 323.




Befestigen wir, Fig. 323, das Pendel an einem Arm, dessen Länge e, so dass es in o pendeln und sich um die Achse XX drehen kann, dann treten folgende Beziehungen auf.

Damit Gleichgewicht bestehen kann, muss um o als Drehpunkt die Momentengleichung gelten $G r = K h$, das nach unten strebende Gewicht G muss der Schwungkraft K das Gleichgewicht halten.

Es ist nun $K = \frac{G}{g} \frac{\pi^2}{900} \rho n^2$ nach Gl. 135, ferner $h = l \cos \alpha$ und $r = l \sin \alpha$, sonach, weil $\rho = r + e$, $G l \sin \alpha = \frac{G}{g} \frac{\pi^2}{900} (r + e) l \cos \alpha n^2$

und $r = l \sin \alpha$ eingesetzt, $\sin \alpha = (e + l \sin \alpha) \frac{\pi^2 \cos \alpha}{900\, g} n^2$, woraus man die vermutlichen Umdrehungen findet

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{e + l \sin \alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Wenn $e = o$, wie in Fig. 322, so wird wieder

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Setzt man in (139) $\tan \alpha = \frac{r}{h}$ und $\sin \alpha = \frac{r}{l}$, so findet sich auch

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g r}{h (e + r)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139\,a)$$

Wieviel Umdrehungen muss z. B. eine solche pendelnd sich drehende Masse machen in der Minute, damit die Entfernung derselben von der Drehachse nicht grösser als $0{,}15^m$, wenn $e = 0{,}05^m$, $h = 0{,}3^m$ und also $r = 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}1^m$. Ein solches Pendel kann als regulierende Bremse dienen, indem, wenn die Kugel weiter als $e + r$ ausschlägt, diese sich an einer vorgestellten cylindrischen Wand anreibt, einen Widerstand findet. Ein grösserer Ausschlag rührt aber nur von einer grösseren Umdrehungszahl in der Minute her, welche eine grössere Schwungkraft erzeugt, wodurch r grösser wird,*) die Achse XX wird zurückgehalten in der Drehung.

Setzt man obige Werte ein, so findet man

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 0{,}1}{0{,}3\,(0{,}05 + 0{,}1)}} = 43{,}4.$$

Der Ausschlagwinkel ist hierbei, da $\tan \alpha = \frac{r}{h} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = 0{,}333$, $\alpha = 18^\circ\, 30'$ und der Pendelarm $l = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{0{,}1}{0{,}317} = 0{,}315^m$.

In Beispiel 6 erwähnten wir, dass der Mensch sich mit einer gewissen Kraft an einem Karussell, welches n Umdrehungen macht, in d. M. halten müsse. Beobachtet man die herabhängenden Lampen, von denen

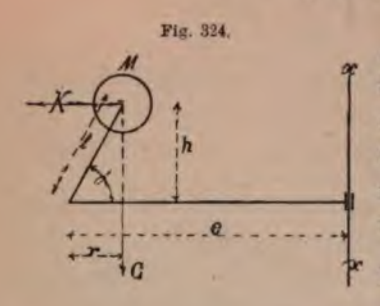
---

*) Bekanntlich hat das seiner Zeit in Bremen durch Zufall vorher explodierte Uhrwerk des berüchtigten Massenmörders Thomas eine ähnliche Bremseinrichtung besessen. Es war so eingestellt, dass nach einer gewissen Zeit (einige Tage) erst durch eine Auslösung die Explosion erfolgen sollte, und zwar erst, während das in einer Kiste verwahrte Uhrwerk in einem überseeischen Personendampfer untergebracht war. Die Versicherung des jedenfalls auf See verunglückten Schiffes wäre in die Hände des Thomas gefallen.

eine etwa in einem Winkel von 20° zur Vertikalen während n Umdrehungen sich hängen mag, dann lassen sich, wenn man in Gl. 139, $\alpha = 20°$ und beispielsweise $l = 0{,}5^m$ einsetzt, die Umdrehungen, welche das schiefe Hängen bewirken, berechnen; man findet, wenn $e = \rho = 3^m$ (s. Beisp. 6)

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g \operatorname{tg} 20°}{3 + 0{,}5 \sin 20}} = 10.$$

Fig. 324.




Läuft man in einem Kreise herum, so neigt man seinen Körper unwillkürlich nach innen, wie dies Fig. 324 in nebenstehender Figur andeuten soll, in welcher die im Schwerpunkt vereinigte Masse M sich um $\alpha°$ nach innen neigt. Es ist hier auch wieder um o als Drehpunkt, $Gr = Kh$, ferner aber $K = \frac{G}{g}\frac{\pi^2}{900}(e - r)n^2$ und $h = l \sin\alpha$ und $r = l \cos\alpha$, eingesetzt, $G l \cos\alpha = \frac{G}{g}\frac{\pi^2}{30^2}(e - l\cos\alpha)\, n^2 l \sin\alpha$, nach entsprechender Reduktion findet man

$$(139\text{b}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g \operatorname{cotg}\alpha}{e - l\cos\alpha}}.$$

Lässt man sich mit n Umdrehungen im Kreise vom Halbmesser $e = 3^m$ drehen, nimmt $l = 0{,}8^m$ an, und neigt sich mit $\alpha = 65°$ nach innen, so sind die Anzahl der Umdrehungen*)

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{cotg} 65}{3 - 0{,}8 \cdot \cos 65}} = 13{,}5.$$

Diese entsprechen einer Umfangsgeschwindigkeit von

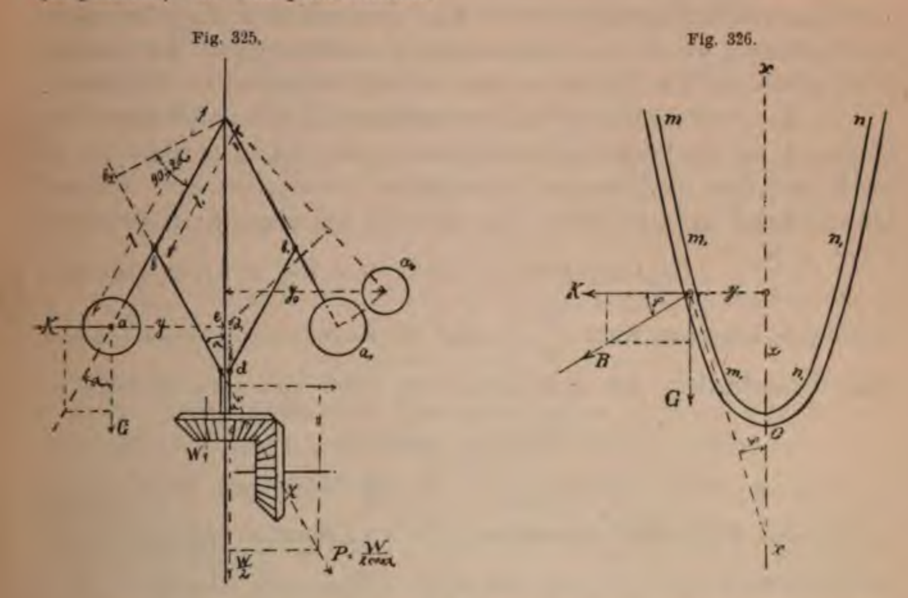
$$c = \frac{2\, e \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 13{,}5}{30} = 4^m \text{ abg.},$$

mit der man im Kreisumfang laufen müsste.

**XI.** Der einfache Schwungkugelregulator. Wir werden später in den Anwendungen noch Gelegenheit nehmen, ausführlicher auf die Theorie der verschiedenen Regulatoren zurückzukommen, begnügen uns nur vorläufig mit der Begründung des Principes des einfachen Schwungkugelregulators als Anwendung der Schwungkraft.

*) Annähernd ist, $\cos\alpha$ bei kleinem Ausschlagwinkel bis cirka 20°, vernachlässigt, wen n gegeben, der Auschlag $\operatorname{cotg}\alpha = (e - l)\left(\frac{n}{30}\right)^2$. Für $n = 13{,}5$, $e = 3$, $l = 0{,}8$ erhält man $\operatorname{cotg}\alpha = 2{,}86$, also $\alpha = 73°$, demnach ungefähr 8° Differenz.

Der Zweck des Regulators ist, die motorische Kraft mit dem augenblicklichen Widerstand möglichst im Gleichgewicht zu erhalten; bei veränderlichem Widerstand also sofort wieder Gleichgewicht herzustellen. Um diesen Zweck zu erreichen, steht der Regulator mit solchen Organen des Motors in Verbindung, welche die Kraft verstärken oder verschwächen, die Dampfeinströmung (Drosselklappe) oder besser mit der Steuerung (Expansion) bei Dampfmaschinen.


Fig. 325. Fig. 326.

Lässt man den Motor durch Vermittelung von Zahnrädern oder Riemenscheiben Z, Fig. 325, auf die senkrechte Achse XX einwirken, an welcher zwei an Stangen pendelnde Kugeln hängen, so werden diese, wenn die Betriebsgeschwindigkeit der Räder (die motorische Kraft) wächst, von der Schwungkraft nach aussen geschleudert werden, infolgedessen bewirken sie in b einen Zug auf die Stange bd, welche in b scharnierartig mit ac, in d aber mit einer Hülse in Verbindung steht. Die Letztere wird auf- (bezw. ab-) geschoben und vermittelt durch geeignete Hebel die Verbindung mit den motorischen Kraftorganen.

Bezeichnen wir mit W den in der Hülse d nötigen Kraftzug oder Druck für beide Kugeln a und $a_1$, so kommt es in erster Linie darauf an, dass dieser in allen Winkelstellungen, also bei allen Geschwindigkeiten des Regulators konstant bleibt. Die obigen Gleichungen 132 bis 135 lehren uns aber, dass K allerdings mit der Geschwindigkeit c, der Winkel-

geschwindigkeit w oder den Umdrehungen n wächst und abnimmt, aber auch, dass K abhängig von $\rho$ bezw. y in den Fig. 325 und 326 ist.

Eine andere Stellung $c b_0 a_0$ übt einen andern Druck W und zwar einen geringeren auf d aus, wodurch eventuell die Wirkung des Regulators ganz hinfällig werden kann, da, wenn W zu klein, eine Veränderung in den motorischen Kraftorganen vielleicht nicht mehr erreicht wird.

Sollen nun in allen Winkelstellungen die resultierenden Arbeitsleistungen vom Regulatorgewicht und der Schwungkraft K, Fig. 326, gleich sein, so denken wir uns das Regulatorgewicht unabhängig von den Stangen in einer sich um XX drehenden Röhre auf- und abgleiten (ohne Reibung).

In einer bestimmten Stellung, der Erhebungshöhe x der Kugeln entsprechend, sei die Winkelgeschwindigkeit w, die Umfangsgeschwindigkeit der Kugeln dem resultierenden Röhrendruck R entsprechend c. Die Arbeit, die Kugel auf x zu heben, Gx, muss der lebendigen Kraft derselben, $m\frac{c^2}{2} = \frac{G}{g}\frac{c^2}{2}$, das Gleichgewicht halten; denn die im Kreise also fortschreitende lebendige Kraft $\frac{G}{g}\frac{c^2}{2}$ lässt die Kugeln nicht wieder von der Höhe x herabfallen. Die Arbeitsgleichung lautet sonach (s. Gl. 107)

$$Gx = \frac{G}{g}\frac{c^2}{2}.$$

Nun ist aber, wenn wir mit y den der bestimmten Stellung entsprechenden Halbmesser bezeichnen, $c = wy$, danach wird $x = \frac{w^2 y^2}{2g}$ und hieraus

(a) . . . . . . . . . . $y = \sqrt{\frac{2g}{w^2}x}$.

Aus dieser Gleichung erkennen wir wieder das Bildungsgesetz einer Parabel.*)

*) Nach Gl. 134 ist $K = \frac{G}{g}w^2 y$ und nach Fig. 326 $G = K \operatorname{tang} \varphi$. Die Tangente des Winkels $\varphi$ ist aber der Differentialquotient der Kurve mon, unter welchen die Röhre gebogen sein muss. Eliminiert man aus den beiden vorstehenden Gleichungen K, so findet man $\frac{G}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{G}{g}w^2 y$ oder $dx = \frac{w^2}{g}y\,dy$. Die beiderseitige Integration $\int dx = \int \frac{w^2}{g}y\,dy$ ergiebt ebenso $x = \frac{w^2}{2g}y^2$ bezw. $y = \sqrt{\frac{2g}{w^2}x}$.

Aus Fig. 326 ersieht man auch, dass $\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}$, sonach ist

$$K = \frac{G}{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{xG}{y},$$

Das günstigste wäre es hiernach, wenn es ausgeführt werden könnte, die Kugeln so pendeln zu lassen, dass sie eine parabolische Kurve innerhalb ihres Schwingungswinkels beschreiben, parabolische Regulatoren. Da man nun den Scheitelteil der Parabel $m_1 o n_1$ am ersten durch einen Kreisbogen ersetzen kann (Krümmungskreis), so sind die Kreisbogenregulatoren immerhin zu verwerten, wenn sie keinen so grossen Ausschlagwinkel haben. Da der Winkelausschlag für jede Umdrehung konstant, feststehend (statisch) ist, nennt man solche Regulatoren darum auch statische Regulatoren; im Gegensatz zu den noch später zu betrachtenden astatischen Regulatoren, die sich bei ihren verschiedenen Stellungen durch die Umdrehungen nicht beeinflussen lassen.

Die Schwungkraft K ist Gl. 134 $K = \frac{G}{g} w^2 y$, oder da $y = l \sin \alpha$, $K = \frac{G}{g} w^2 l \sin \alpha$. Führt man für $K = G \operatorname{tang} \alpha$, Fig. 325, und für $w^2 = \frac{n_1^2 \pi^2}{30^2}$ (Gl. 113) ein, so ist, die Umdrehungen mit $n_1$ bezeichnet,

$$G \operatorname{tang} \alpha = \frac{G}{g} \frac{n_1^2 \pi^2}{30^2} l \sin \alpha.$$

Man findet hiernach die Umdrehungszahlen $n_1$ pro Minute für eine gegebene Pendellänge l, und einen gewissen Ausschlagwinkel $\alpha$,

$$n_1 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} = 29{,}9 \sqrt{\frac{1}{l \cos \alpha}}. \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Bezeichnen wir mit P die Kraft in der Stange bd, Zug oder Druckkraft, dann steht diese mit der senkrecht wirkenden Hülsenkraft W/2 für eine Kugel in der Beziehung

$$\frac{\left(\frac{W}{2}\right)}{P} = \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

die sich aus der in der Fig. angedeuteten Zerlegung ergiebt. Betrachtet man nun c als Drehpunkt für die Kräfte P, G und K, dann sind die zugehörigen senkrechten Hebelarme $\overline{b_2 c}$, y und $\overline{ce}$. Wir erreichen dann Gleichgewicht, wenn

$$K \cdot \overline{ce} = G y + P \cdot \overline{b_2 c}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Konstruiert man das Gestänge so, dass cbd ein gleichschenkliges Dreieck wird, dann ist der Aussenwinkel b desselben $2\alpha$, also der Winkel

---

durch Gleichsetzung mit $\frac{G}{g} w^2 g$ folgt $x = \frac{w^2}{g} y^2$ und wiederum die parabolische Gleichung $y = \sqrt{p x}$.

c in dem rechtwinkeligen Dreieck $b_2 b c$, $90 - 2\alpha$ und wenn man $cb = l_1$ nennt, $cb_2 = l_1 \cos(90 - 2\alpha) = l_1 \sin 2\alpha = 2\, l_1 \sin\alpha \cos\alpha$.

Setzt man ferner in obige Gleichung (c) $y = l \sin\alpha$, $ce = l\cos\alpha$, dann folgt $K\, l\cos\alpha = G\, l\sin\alpha + P\, 2\, l_1 \sin\alpha\cos\alpha$.

Da nun, wie uns bekannt

$$K = \frac{G}{g} w^2 y = \frac{G}{g} w^2 l \sin\alpha,$$

für eine gewisse Winkelgeschwindigkeit w oder Umdrehungszahl n, so ist zunächst die Bedingung zu erfüllen

$$\frac{G}{g} w^2 l \sin\alpha\, l\cos\alpha = G\, l\sin\alpha + P\, 2\, l_1 \sin\alpha\cos\alpha.$$

Durch $l \sin\alpha$ dividiert und aus (b) $P = \frac{W}{2\cos\alpha}$ eingesetzt, folgt

(d) . . . . . . $$\frac{G}{g} w^2 l\cos\alpha = G + W\frac{l_1}{l}.$$

Der Regulator soll aber für eine andere Winkelgeschwindigkeit $w_1$ dieselben Dienste leisten. Aus

$K = \frac{G}{g} w_1^2 y = \frac{G}{g} w_1^2 l\sin\alpha$ mit $K = G \operatorname{tang}\alpha$ kombiniert, folgt

$$G \operatorname{tang}\alpha = \frac{G}{g} w_1^2 l\sin\alpha \text{ oder } \frac{G}{g} l\cos\alpha = \frac{G}{w_1^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für $\frac{G}{g} l\cos\alpha$ in (d) ein, dann erhält man

$$G\frac{w^2}{w_1^2} = G + W\frac{l_1}{l}, \text{ und hiernach}$$

$$G = \frac{W\frac{l_1}{l}}{\left(\frac{w}{w_1}\right)^2 - 1}.$$

Bedenkt man, dass sich die Winkelgeschwindigkeiten wie die Umdrehungen verhalten müssen, so folgt schliesslich das Gewicht einer solchen Regulatorkugel

**(141)** . . . . . . $$G = \frac{W\left(\frac{l_1}{l}\right)}{\left(\frac{n}{n_1}\right)^2 - 1}.$$

1) Ist beispielsweise der zu überwindende Widerstand W = 4 Klg., $l = 0{,}48^m$, $l_1 = 0{,}3^m$ und für den Normalgang $\alpha = 35°$, so erhält man

die Umdrehungen pro Min. nach Gl. 140

$$n_1 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{0{,}48\cos 35}} = 29{,}9\sqrt{\frac{1}{0{,}48\cdot 0{,}819}} = 50.$$

Soll der Regulator bei $n = 53$ Umdrehungen erst seine Wirkung beginnen, so ist das entsprechende Kugelgewicht

$$G = \frac{4\cdot\left(\frac{0{,}30}{0{,}48}\right)}{\left(\frac{53}{50}\right)^2 - 1} = 20 \text{ Klg.}$$

Eine gusseiserne Kugel würde $175^{mm}$ Durchmesser erhalten.

2) Die Umdrehungen eines Regulators müssen normalmässig $n_1 = 80$ betragen. Ferner ist $W = 5$, $\alpha = 60°$, dann folgt aus Gl. 140

$$l = \frac{\overline{29{,}9}^2}{n_1^2 \cos\alpha} = \frac{\overline{29{,}9}^2}{80^2\cdot 0{,}5} = 0{,}28^m.$$

Nimmt man $\frac{l_1}{l} = {}^3/_4$, also $l_1 = 0{,}21^m$, so wird das Kugelgewicht bei $n = 82$ Umdrehungen als massgebend für die Thätigkeit des Regulators

$$G = \frac{{}^3/_4 \cdot 5}{\left(\frac{82}{80}\right)^2 - 1} = 14 \text{ Klg. abg.}$$

Eine eiserne Kugel von $150^{mm}$ Durchmesser dürfte hier genügen.

Der Regulator wird um so empfindlicher, je mehr sich $n = n_1$ nähert, um so schwerer wird G, das Gewicht der Kugeln. Kleine Gewichte sind sonach unempfindlich, solche Regulatoren üben ihren Einfluss erst dann aus, wenn Kraft oder Widerstand bedeutend sich verändert haben, ihre Unempfindlich- oder besser Unbeweglichkeit liegt innerhalb einer grösseren Tourendifferenz. Man nennt den Nenner des Bruches, Gl. 141, den **Empfindlichkeitsgrad**, und soll in der Praxis eine gewisse Grenze desselben nicht überschritten werden. —

Eine Wanduhr mit einem leichten Pendel ist unempfindlich, sie kann etwas schief hängen, beispielsweise das Pendel ist leicht genug, als dass es sofort die Uhr aufhalten würde. Ein schweres Pendel erfordert ein sorgfältiges senkrechtes Hängen der Uhr, einen gleichmässigen (an Graden abmessbaren) Ausschlag. Das schiefe Hängen beeinflusst natürlich den regelmässigen Gang der Uhr, während ein schweres Pendel überhaupt kein schiefes Hängen zulässt, die Uhr bleibt früher stehen, als dass sie unregelmässig läuft.

**XII.** Wir erwähnten, S. 336 in der Bemerkung die sog. Balanciergewichte an den Triebrädern der Lokomotiven. Ist L der Druck auf einem solchen Triebrad, so kann der Fall eintreten, dass wenn das Triebrad eine gewisse Tourenzahl überschreitet, die Schwungkraft überhand nimmt, grösser als L wird und das Rad mit der Last nach oben schleudert, oder so hoch hebt, dass ein Entgleissen zu befürchten ist.

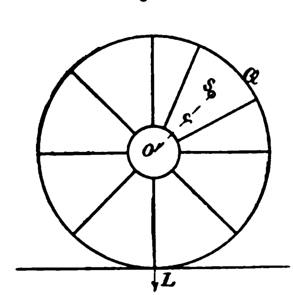
Wiegt ein solches Gewicht Q Klg., dann müsste Gleichgewicht eintreten, wenn

$$L = \frac{Q}{g} \frac{\pi^2}{900} \rho n^2 = 0{,}00112\, Q \rho n^2$$

oder abg. hieraus

$$n = 30 \sqrt{\frac{L}{Q\rho}} \text{ ist.}$$

Fig. 327.




Wenn L = 6000 Klg., Q = 75 Klg., $\rho = 0{,}4$ die Entfernung von Q (Fig. 327) bis zur Achse o, dann tritt erst Gefahr ein, wenn das Rad, welches beispielsweise d = 1,2^m Durchmesser haben mag,

$$n = 30 \sqrt{\frac{6000}{75 \cdot 0{,}4}} = 420 \text{ Umgänge}$$

in der Minute, also in der Sekunde $\frac{420}{60}$ = sieben Touren macht.

Der zurückgelegte Weg in der Sekunde, die Geschwindigkeit, mit der der Zug laufen müsste, wäre dann

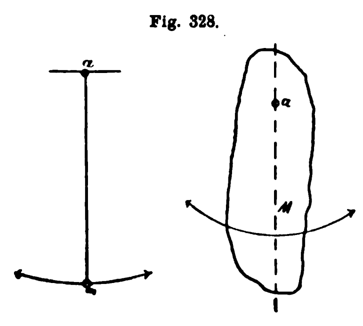
$$V = \pi d \cdot 7 = 3{,}14 \cdot 1{,}2 \cdot 7 = 26^m.$$

Die Maximalgeschwindigkeiten sind aber bekanntlich bis jetzt

$$V = 20 \text{ bis } 22^m \text{ pro Sek. ca.}$$

## 2. Die Pendelbewegung.

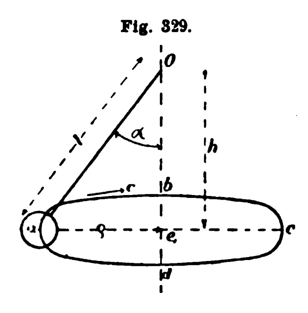
Fig. 328.




Hängt man an einem gewichtslosen Faden oder einer solchen Stange am, Fig. 328, eine in einem Punkt m vereinigt gedachte Masse auf, so nennt man diese, sofern sie an a hin- und herschwingt ein mathematisches Pendel.

Schwingt hingegen die körperliche Masse M um a, so ist dies ein materielles oder physisches Pendel.

a) Das mathematische Pendel.


Fig. 329.

Um o schwingt an einem Faden befestigt die Kugel a hin und her, beschreibt hierbei einen Kreisbogen aec, in der Vertikalebene (in der Fig. nicht angedeutet). Damit sie in derselben Zeit von a nach c diesem Kreisbogen-Pendelweg entlang in c ankommt, als sie eine halbe horizontale Kreisschwingung abc ausführt, müssen wir in Gleichung 136

$$t = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = \pi \sqrt{\frac{h}{g}},$$

h durch die durchlaufene Bogenlänge aec ersetzen, um von dieser abhängig die Zahl der Sekunden zu gewinnen zu einer Schwingung.

Nennen wir $\alpha$ den halben Schwingungswinkel, dann ist bei $1^m$ Pendellänge und $\rho$ Radius des Centrifugalpendelkreises zunächst

$$h = \frac{\rho}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

Setzen wir nun sehr kleine Schwingungen voraus, dann kann man obigen Bogen aec dem doppelten Radius $2\rho = ae_1c$ gleichsetzen, und erhält aus $2\rho = 2\alpha l$, $\rho = \alpha l$, sonach

$$h = \frac{\alpha l}{\operatorname{tang} a}.$$

Die Schwingungszeit wird dann

$$t = \pi \sqrt{\frac{h}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\alpha l}{g \operatorname{tang} \alpha}}, \quad \ldots \ldots \quad (142)$$

oder für solche kleine Schwingungen $\alpha = \operatorname{tang} \alpha$ gesetzt,

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}0032 \sqrt{l} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{(142a)}$$

Der Bogen $\widehat{\alpha}$ durch den Winkel $\alpha°$ ausgedrückt, entwickelt man aus der bekannten Proportion

$$\widehat{\alpha} : \alpha° = 2\pi : 360°,$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\pi}{360} \alpha° = \frac{\pi \alpha°}{180}, \text{ und findet}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{\pi \alpha°}{180 \operatorname{tang} \alpha} l/g} = 0{,}1325 \sqrt{\frac{\alpha° l}{\operatorname{tang} \alpha}} \quad \ldots \quad (142b)$$

Ist c gegeben und soll die Pendellänge gesucht werden, dann findet man, selbstredend wieder näherungsweise*)

(143) . . $$l = 56{,}9\,\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha^\circ}\,t^2 = \frac{g}{\pi^2}\,t^2 = 0{,}994\,t^2.$$

Die Länge eines Sekundenpendels ist, weil $t = 1$

$$l = 0{,}994^{m}.$$

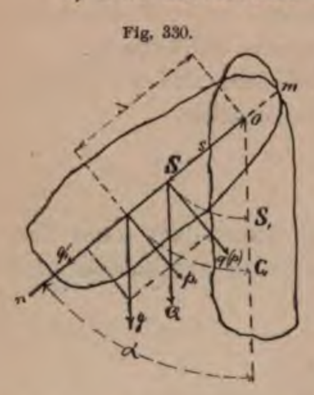
Die eines Halbsekundenpendels, da $t = {}^1/_2$

$$l = \frac{0{,}994}{4} = 0{,}2485^{m},\ \text{bei}\ \alpha = 10^\circ\ \text{Ausschlag}$$

$$l = 56{,}9\,\frac{\operatorname{tang}10^\circ}{10}\,{}^1/_4 = 0{,}25^{m} = 250^{mm}.$$

b) Das materielle oder physische Pendel.

Fig. 330.




Schwingt eine Masse, Fig. 330, um den Punkt o hin und her, dann sind die Zeiten, welche die einzelnen Teilchen gebrauchen, wenn sie unzusammenhängend mit einander verbunden wären, verschieden. Die Massenteilchen, welche dem Punkt o näher liegen, schwingen schneller, die entfernteren würden langsamer schwingen; es muss also einen Punkt C, in der Schwerlinie mn des Körpers liegend, geben, welcher im Mittel schwingt, der Mittelpunkt des Schwunges, der sich von den Teilchen nach o zu weder antreiben, noch von den vor ihm liegenden Teilchen zurückhalten lässt, seine Entfernung von o sei $\lambda$, für ihn ist nach Gl. 142a (in der Figur liegt er im Schnittpunkt der Senkrechten g und $\overline{mn}$) $t = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$.

Denken wir uns nun das ganze Körpergewicht Q im Schwerpunkt S zerlegt nach $q_1$ und q, so wirkt $q_1$ ziehend an o und $q = Q\sin\alpha$ als wirkliche für uns in Betracht kommende Triebkraft, welche tangential an S $S_1$ angreift und die ganze Masse treibt.

*) Nach Grundsätzen der höheren Mathematik und Mechanik erhält man ganz genau oder vielmehr abhängig von der Anzahl der folgenden Rechenglieder, wenn $ee_1 = s$ die Höhe des Schwingungsbogens

$$t = \pi\sqrt{\frac{1}{g}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{s}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)\left(\frac{s}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{s}{2l}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\left(\frac{s}{2l}\right)^4 + \dots\right]}$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{1}{g}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\sin^2\frac{a}{2}\right)^2 + \dots\right]}.$$

Die Beschleunigung, mit der sich die Masse in S als Schwerpunkt bewegt, ist, da q die Kraft

$$p = \frac{q}{\mu},$$

worin $\mu$ die auf die Entfernung $oS = s$ reducierte Trägheitsmasse, welche, wie uns bekannt, wir aus $\mu s^2 = J$ entnehmen können; sie ist (Gl. 118) $\mu = \frac{J}{s^2}$ oder statt der Masse in J die Gewichtsteilchen in Rechnung gezogen

$$\mu = \frac{J}{g s^2}.$$

Es wird dann, die Werte eingeführt,

$$p = \frac{q}{\mu} = \frac{Q \sin \alpha \, s^2}{J} g.$$

Für den Punkt C ist die treibende Kraft, da er sich völlig neutral bewegt, $M \sin \alpha$, wenn M die Körpermasse, sonach $p_1$ seine Beschleunigung in C angreifend, (s. Gl. 19)

$$p_1 = \frac{M \sin \alpha}{M} g = g \sin \alpha.$$

Es muss sich nun verhalten

$$p : p_1 = s : \lambda \text{ oder}$$

$$\frac{Q \sin \alpha s^2 g}{J} : g \sin \alpha = s : \lambda, \text{ woraus}$$

$$\frac{Qs}{J} = \frac{1}{\lambda} \text{ und } \lambda = \frac{J}{Qs}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für $\lambda$ in die eingangs erwähnte Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}},$$

so ist die Schwingungszeit eines physischen Pendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{Qsg}}, \qquad (144)$$

worin J das Trägheitsmoment bezogen auf den Schwingungspunkt als Achse; Q das Gewicht des schwingenden Körpers und s dessen Schwerpunktsabstand vom Schwingungspunkt o.

Aus Gl. 144 folgt das Trägheitsmoment eines Körpers, wenn man die Zeit t einer (kleinen) Schwingung in Sekunden beobachtet, Q abwiegt, s abmisst,

$$J = \frac{Qsgt^2}{\pi^2} = Qst^2 \text{ abg.} \qquad (145)$$

t wird nach Gl. 144 grösser, wenn s kleiner wird, wenn die Schwingungs-

achse mehr nach dem Schwerpunkt verlegt wird. Liegt die Schwingungsachse im Schwerpunkt $s = 0$, dann ist $t = \infty$, der Körper kann sich wohl drehen, aber er kann nicht mehr schwingen.

**Beispiel I.** Ist das Trägheitsmoment eines Körpers $J^m = 5$, das Gewicht $Q = 60$ Klg., $s = 0{,}4^m$, so gebraucht der Körper zu einer Schwingung die Zeit

$$t = 3{,}14 \sqrt{\frac{5}{60 \cdot 0{,}4 \cdot 9{,}81}} = {}^1/_2 \text{ Sek. abg.}$$

**II.** Beobachtet man bei einem schwingenden Körper, dessen Gewicht $Q = 100$ Klg. und dessen Abstand $s = 120^{mm} = 0{,}12^m$, $t = 2$ Sek. während einer Schwingung, so ist nach Gl. 145 das Trägheitsmoment auf die Schwingungsachse bezogen

$$J^{mm} = 100 \cdot 120 \cdot 4 = 48\,000, \text{ bezw. } J^m = 48.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 142a kann man an verschiedenen Orten der Erde die Fallbeschleunigung g durch Beobachtung finden, wenn man die Anzahl der Sekunden während einer Schwingung abzählt, l sorgfältig misst; es ist die Fallbeschleunigung

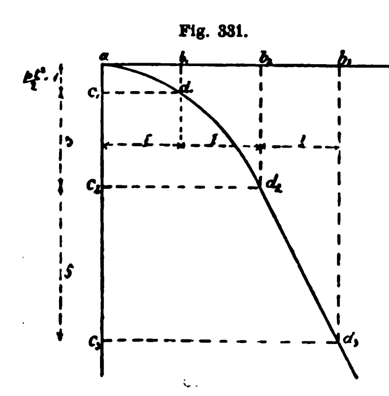
$$(146) \quad \ldots\ldots \quad g = \frac{\pi^2}{t^2} l = 9{,}87 \frac{l}{t^2}.$$

---

### 3. Die parabolischen Bewegungen.

Erteilt man einem Körper nach horizontaler Richtung eine gewisse Geschwindigkeit $c^m$ in der Sekunde, und überlassen ihn sich selbst, so wird er sofort von der Anziehungskraft der Erde, also von der Beschleunigung g beeinflusst und nach unten gezogen. Da ihn aber die innewohnende Geschwindigkeit immer wieder horizontal weiter zu treiben strebt, so entsteht eine gezwungene Bewegung, über die wir uns in folgenden orientieren wollen.

Fig. 331.



Der Weg, den der Körper a in der Sekunde zurücklegt, ist

$$s = ct + {}^1/_2\, gt^2.$$

Würde die Anziehungskraft der Erde nicht vorhanden sein, dann würde der Körper in jeder Sekunde den gleichförmigen Weg in horizontaler Richtung $ab_1$, $s = ct = ab_1 = b_1 b_2 = b_2 b_3 \ldots$ zurücklegen, Fig. 331.

Ist überhaupt keine horizontal wirkende Geschwindigkeit vorhanden, oder würde diese plötzlich Null werden, dann wäre in jeder Sekunde der Weg $s = {}^1/_2\, g t^2$, natürlich nicht mehr gleichförmig, sondern er würde eben nach den uns bekannten Fallgesetzen sinken, in der ersten Sekunde in $c_1$, in der zweiten in $c_2$, in der dritten in $c_3 \ldots$ sein.

Die aus beiden resultierende Bewegung findet sich aus den nach dem Geschwindigkeitsparallelogramm gefundenen Punkten $d_1\, d_2\, d_3 \ldots$, welche um so näher aneinander rücken, eine krumme Linie bilden, je kleiner das Mass der Sekunde angenommen wird.

Die Gleichung $s = ct + {}^1/_2\, g t^2$ enthält aber das Bildungsgesetz einer Parabel*).

Setzt man in ${}^1/_2\, g t^2$, ${}^1/_2\, g = 1$, so folgen die Abstände

$a c_1 = \phantom{1}1$ für die erste Sekunde
$a c_2 = \phantom{1}4$ „ zweite „
$a c_3 = \phantom{1}9$ „ dritte „
$a c_4 = 16$ „ vierte „

$c_1\, c_2$ besteht also aus $4 - 1 = 3$ Teilen der Einheit, $c_3\, c_2$ aus $9 - 4 = 5$ Teilen, $c_4\, c_3$ aus $16 - 9 = 7$ u. s. w.

Man kann hiernach die Parabel auch konstruieren, indem man horizontal beliebige gleichlange Einheiten $I = a b_1 = b_1\, b_2 = b_2\, b_3 \ldots$ aufträgt, vertikal aber die Abstände $a c_1 = 1$ angenommen mit den ungeraden Zahlen 3, 5, 7 ... erwachsen lässt.

Nennt man die horizontalen Abstände $x$, die vertikalen von $a$ gerechnet $y$, dann ist allgemein $x = ct$ und $y = {}^1/_2\, g t^2$.

Entwickelt man aus der zweiten Gl. $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ und setzt dies in die erste ein, so folgt

$$x = c\sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ oder } x^2 = c^2\,\frac{2y}{g} \quad \ldots \quad (147)$$

*) Man kann die Gl. für $s$ auch schreiben $y = ax + bx^2$. Ist $a = 0$, dann hat die aus $y = bx^2$ konstruierte Kurve (für $x = 0, 1, 2 \ldots$ die Werte $y$ berechnet), die folgende Form, Fig. 332. Da $y = ax$ eine Gerade bedeutet, welche unter dem Winkel, dessen $\operatorname{tg}\alpha = a$ ist, geneigt liegt, so erhält die Parabel die in Fig. 333 gezeichnete Lage.

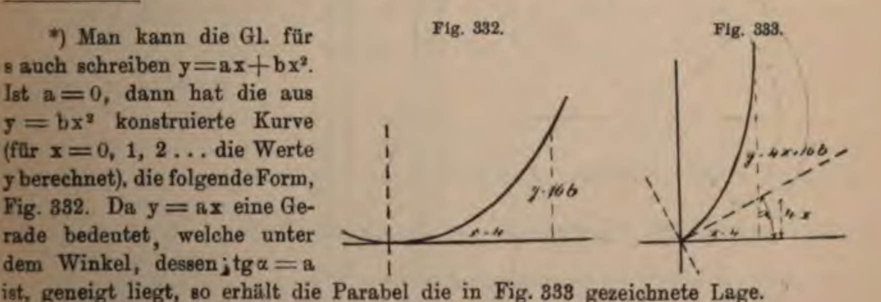


Fig. 332. Fig. 333.

Die letzte Beziehung $x = \sqrt{\frac{c^2 2}{g} y}$, oder die Bezeichnungen der Linien aX und aY miteinander vertauscht,

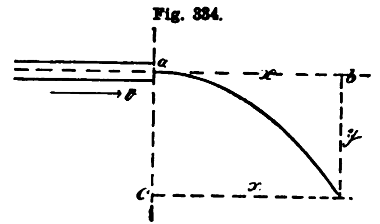
$$y = \sqrt{\frac{2 c^2}{g} x} = \sqrt{px}$$

enthält natürlich wieder das schon mehrfach erwähnte parabolische Gesetz.

Aus Gl. 147 folgt noch die Geschwindigkeit

$$(148) \quad \ldots \ldots \quad c = x \sqrt{\frac{g}{2 y}} \, .$$

Fig. 334.



**Beispiele. I.** Aus einer Röhre fliesst mit der Geschwindigkeit v horizontal ein Wasserstrahl.

Man hat beobachtet, dass er in den Entfernungen,

horizontal von a, $ab = x = 1{,}3^m$
vertikal von a, $ac = y = 30^m$

in d ankommt, mit welcher Geschwindigkeit musste er die Röhre verlassen.

Die Gl. 148 liefert

$$v = 1{,}3 \sqrt{\frac{9{,}81}{2 \cdot 3}} = 1{,}7^m \text{ pro Sek.}$$

**II.** In Fig. 335 ist ein oberschlächtiges Wasserrad dargestellt, welches sein Betriebswasser aus dem Gerinne ab erhält. Soll der Wasser-

Fig. 335.

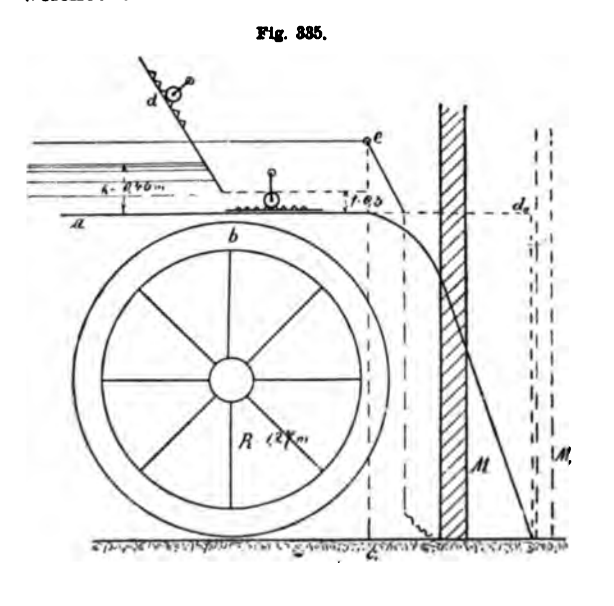
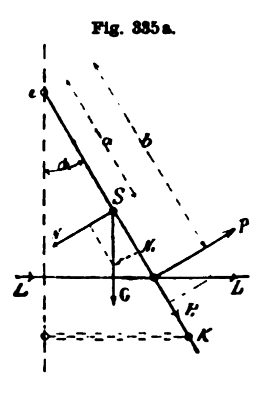


Fig. 335 a.



zufluss ausser Thätigkeit gesetzt werden, so dass er ohne das Rad zu treiben (leer) abfliesst, so ist an der Einlaufstelle bei b eine horizontale sog. Leerlaufschütze angebracht, welche, wenn sie zugeschoben wird, das Wasser über das Rad hinweg nach c leitet, von wo es sich in den Abflussgraben stürzt.

Liegt das Wasser mit $h = 0{,}46^m$ Druckhöhe vor der Spannschütze d, und lässt diese eine Öffnung von $0{,}3^m$ zum Durchfluss offen, dann fliesst das Wasser mit

$$v = \sqrt{2\,g\left(0{,}46 - \frac{0{,}3}{2}\right)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}31} = 2{,}4^m$$

Geschwindigkeit über b.

Der Durchmesser des Rades sei $2\,R = 2{,}54^m$.

Sehen wir von allen Nebenhindernissen ab und betrachten $v = 2{,}4$ als Geschwindigkeit, mit der das Wasser den Leerlaufkanal verlässt, so folgt aus Gl. 147 die horizontale Entfernung des Aufschlagpunktes $d_1$, nämlich

$$c\,d_0 = c_1\,d_1 = x = 2{,}4\sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}54}{9{,}81}} = 1{,}68^m.$$

Man ist aber genötigt die Mauer $M_1$ näher an das Rad zu rücken, nach M zu stellen. Zu dem Ende wollen wir in e ein pendelndes Schützenbrett anbringen, welches so schwer sein muss, dass es sich in einem Winkel $\alpha$ einstellt, wenn der Wasserstrahl einwirkt, und hierdurch das Wasser zwingt, innerhalb der Grenze M zu bleiben, nach unten zu fallen.

In Fig. 335a stellt L die Kraft des Wasserstrahles dar, sie zerlegt sich in

$$P = L \cos\alpha \text{ und } P_1 = L \sin\alpha.$$

Das Gewicht G des Brettes in S angreifend, dem Schwerpunkt des Brettes, zerlegt sich in

$$N = G \sin\alpha \text{ und } N_1 = G \cos\alpha.$$

$P_1 + N_1$ wirken als Zugkräfte in der Achse e; hingegen N und M müssen sich um e als Drehachse an den Hebelarmen a und b das Gleichgewicht halten, so dass

$$N\,a = P\,b, \text{ bezw.}$$

$$G \sin\alpha\, a = L \cos\alpha\, b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Das Wasser fliesst mit $v = 2{,}4^m$ Geschwindigkeit, seine lebendige Kraft ist $m\,\frac{v^2}{2}$. Die Wassermasse m ist das Wassergewicht dividiert durch $g = 9{,}81$.

Da nun ein Kubikmeter Wasser 1000 Klg. wiegt, so wiegen Fl Kubikmeter, wenn F der Querschnitt und l eine beliebige Länge 1000 Fl Klg. Ist B die Breite des Kanals und $t = 0{,}3$ (s. Fig. 335) die Wassertiefe, dann folgt $m = \frac{1000\, t \cdot Bl}{g}$.

Auf die Länge l ist aber die Arbeit des Wassers $A = Ll$, weil L die Kraft, welche der Wasserstrahl von der Breite B und der Stärke t ausübt.

Die Gleichung (s. Gl. 107)

$$A = Ll = m\frac{v^2}{2} = \frac{1000\, t\, Bl}{2\, g} v^2$$

liefert uns dann einen Ausdruck für L, nämlich

$$L = 1000\, Bt \frac{v^2}{2\, g}.$$

Die Breite B war $1{,}3^m$, somit ist

$$L = 1000 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}3 \frac{2{,}4^2}{2 \cdot 9{,}81} = 112 \text{ Klg.}$$

Das Gewicht der Pendelschütze resultiert nun aus (a)

$$(149) \quad \ldots \quad G = \frac{b}{a} L \operatorname{cotg} \alpha.$$

Entnimmt man $b = 0{,}52$, $a = 0{,}45$ und $\alpha = 19°$ am zweckmässigsten aus der Zeichnung, so wird schliesslich

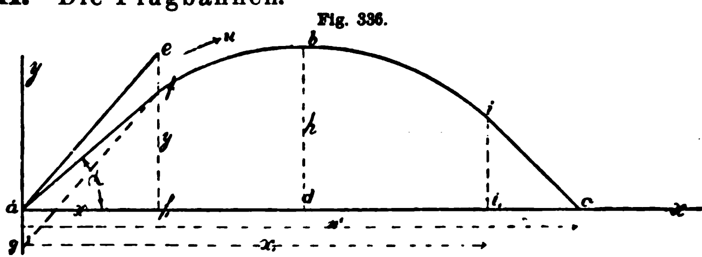
$$G = \frac{0{,}52}{0{,}45}\, 112 \operatorname{cotg} 19° = 700 \text{ Klg.}$$

Je kleiner $\alpha$ sein soll, um so grösser muss G werden, weil für $\alpha = 0°$, $G = \infty$ folgt; es ist also unmöglich durch ein pendelndes Gewicht einer darauf wirkenden Kraft das Gleichgewicht zu halten.

Statt das Brett 700 Klg. schwer auszuführen, kann man ein leichteres Gewicht auch durch Ketten kk befestigen.

## III. Die Flugbahnen.

Fig. 336.



Ein Körper a wird unter einem Winkel $\alpha$ zur Horizontalen ac geworfen oder geschossen mit der Anfangsgeschwindigkeit $u^m$ in der Sekunde.

Der in der Sekunde zurückgelegte Weg ist wieder allgemein

$$s = ut - \frac{1}{2} gt^2,$$

da sich der Körper nach oben bewegt, tritt eine Verzögerung, negative Beschleunigung g ein (Gl. 6a).

Würde keine Erdanziehungskraft vorhanden sein, so würde der Körper gleichförmig den Weg $ae = ut$ in der Sekunde zurücklegen.

Die Anziehungskraft der Erde zieht ihn aber von der tangentialen Richtung ab nach der senkrechten

$$\overline{ef} = \overline{ag} = \frac{1}{2} gt^2.$$

In Wirklichkeit gelangt er nach f, nach dem Gesetze des Geschwindigkeitsparallelogrammes.

Es kommt uns nun vor allem darauf an diesen Punkt und überhaupt die weiteren Punkte bic, welche er passieren muss, durch senkrechte Linien $x_1$ y (Koordinaten) zu fixieren.

Aus der Anschauung der Figur ist

$$af_1 = x = ae \cos\alpha = ut \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$f_1 e = f_1 f + fe = y + \frac{1}{2} gt^2 = \overline{ae} \sin\alpha.$$

Die letzte Beziehung liefert

$$y = f_1 e - \frac{1}{2} gt^2, \text{ oder } f_1 e = \overline{ae} \sin\alpha = ut \sin\alpha \text{ eingesetzt,}$$

$$y = ut \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Die Bezeichnungen x und y gelten allgemein für jeden Punkt in der parabolischen Kurve abc, die wir hier vor uns haben.

In der ersten Sekunde ist $t = o$, somit auch $y = 0$, in den nächsten Sekunden wird y grösser, bis zu $y = h$ anwachsen, dann wieder kleiner bis y bei c wieder Null geworden ist, das Projektil ist wieder unten angelangt. Das letztere ist nur möglich, wenn in der Gl. (b) $y = 0$, oder

$$ut \sin\alpha = \frac{1}{2} gt^2,$$

wenn also der Körper eine Zeitlang geflogen ist. Die Anzahl der Sekunden sind in der letzten Gleichung enthalten; in

$$t_1 = \frac{2u \sin\alpha}{g} \text{ Sek.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

ist das Projektil von a nach c geflogen, in der halben Zeit ist es bis b gelangt, vorausgesetzt, dass a und c in einer Horizontalen liegen; denn in der Gleichung (b) stellt $ut \sin\alpha$ das Produkt der Anfangsgeschwindigkeit $u \sin\alpha$ mit der Zeit dar. Ist v die Endgeschindigkeit in der Zeit t, nämlich (nach Gl. 3, S. 5) $v = u \sin\alpha - gt$, so wird diese Null, wenn der Körper in b angelangt ist, in diesem Augenblick steht er still, um nach abwärts zu fliegen, die Zeit, welche er gebraucht, ist aus

$$0 = u \sin \alpha - g t,$$

(150a) . . . . . . . . $t_2 = \frac{u \sin \alpha}{g}$.

Die Gl. (a) stellt den im horizontalen Sinn zurückgelegten Weg dar, den das Projektil alle Sekunden zurückgelegt hat. Ist es bis d gelangt, bis zur Mitte seiner Bahn horizontal gemessen, also in Wirklichkeit in b, so hat es nach Gl. 150a die Zeit $\frac{u \sin \alpha}{g}$ verwendet, setzen wir diese in (a) ein, so folgt $a d = u \frac{u \sin \alpha}{g} \cos \alpha$ oder

(151) $\frac{w}{2} = a d = \frac{1}{2 g} u^2 \sin 2 \alpha$, weil $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2 \alpha$.

Der ganze zurückgelegte Weg ist

(151a) . . . . . . . $w = u^2 \frac{\sin 2 \alpha}{g}$.

In der gleichen Weise liefert die Gl. (b) alle senkrecht zurückgelegten Wege auch abhängig von der Zeit. Führen wir demnach Gl. 150a in (b) ein, so müssen wir die höchste Höhe h erhalten, die der Körper auf seiner Bahn erreicht, es wird

$$h = y = u \sin \alpha \frac{u \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{u \sin \alpha}{g}\right)^2 \text{ oder}$$

(152) . . $h = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2 g}$.

Um y abhängig von x und unabhängig von der Zeit darzustellen, eliminieren wir t aus (a) und (b).

Aus (a) $t = \frac{x}{u \cos \alpha}$ in (b) eingesetzt, findet sich

(153) . . . . . . $y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$.

Will man die Erhebungshöhe i durch Rechnung finden, dann muss man in diese Gleichung für x, $x_1 = a i_1$ einsetzen und $y = i i_1$ berechnen.

Geht man von der Anfangsgeschwindigkeit u eines geworfenen oder geschlossenen Körpers aus und fragt nach dem Winkel $\alpha$, unter welchem das Geschütz gestellt werden muss, um das Ziel z, Fig. 337, zu erreichen, so ist dies gleichbedeutend mit der Entwickelung des Winkels $\alpha$ aus Gl. 153 für bestimmte Werte von x und y (z ist Schnitt beider Parabeln).

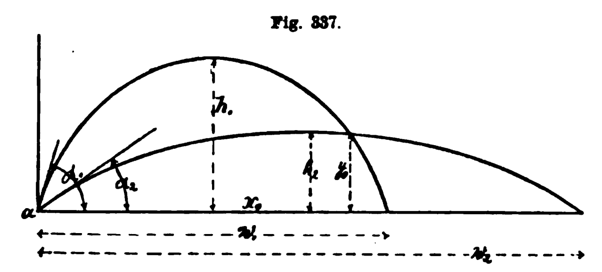
Ersetzt man den cos $\alpha$ durch die Tangente, bekanntlich ist

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha,$$

dann erhält man die Gleichung, wenn $x_0\, y_0$ die Koordinalen von z, entsprechend reduciert, $\operatorname{tang}^2\alpha - \frac{2\,u^2}{g\,x_0} \operatorname{tang}\alpha = -1 - \frac{2\,u^2\,y_0}{g\,x_0^2}$,
und hiernach

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{u^2 \pm \sqrt{u^2\,(u^2 - 2\,g\,y_0) - g^2\,x_0^2}}{g\,x_0} \quad . \; . \quad (154)$$

Fig. 337.



Es giebt also thatsächlich zwei Winkel $\alpha$, unter denen das Geschütz gestellt werden kann, beide gelangen an dasselbe Ziel, wie dies Fig. 337 veranschaulichen soll. Es muss also für denselben Fall auch zwei Wurfweiten und zwei Wurfhöhen geben.

Die Gl. 154 ist in obigem Sinn unmöglich, wenn $u^2 - 2\,g\,y_0 = 0$, wenn $u = \sqrt{2\,g\,y_0}$ d. h. wenn der Körper senkrecht geworfen oder geschossen wird auf die Höhe $y_0$; denn nur in diesem Falle kommt er unten mit der Geschwindigkeit $u = \sqrt{2\,g\,y_0}$ wieder zurück.

Ferner darf der Ausdruck der Wurzel selbst auch nicht Null bezw. imaginär werden; es muss also sein

$$u^2\,(u^2 - 2\,g\,y_0) > g^2\,x_0^2 \text{ oder}$$

$$x_0 < \frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2\,g\,y_0} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (154\,a)$$

Wird $x_0$ grösser angenommen, so kann das Ziel nicht erreicht werden.

Dem einen Winkel $\alpha_1$ entspricht die Wurfweite $w_1$ und Maximalhöhe $h_1$, dem anderen $\alpha_2$ $w_2$ und $h_2$. —

Am weitesten fliegt ein Projektil, wenn $\alpha = 45°$; denn in der Gl. 151 a wird w am grössten, wenn $\sin 2\,\alpha = 1$, $2\,\alpha = 90°$, $\alpha = 45$; dann folgt

$$w = \frac{u^2}{g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (151\,b)$$

Der höchste Wurf ist der senkrechte, denn h wird am grössten, wenn in Gl. 152, $\sin^2\alpha = 1$, $\alpha = 90°$, man erhält dann (s. S. 26, Beisp. I)

$$h = \frac{u^2}{2\,g}.$$

Diese Höhe ist die Hälfte der obigen Weite, wenn das Projektil unter 45° geschleudert wird.

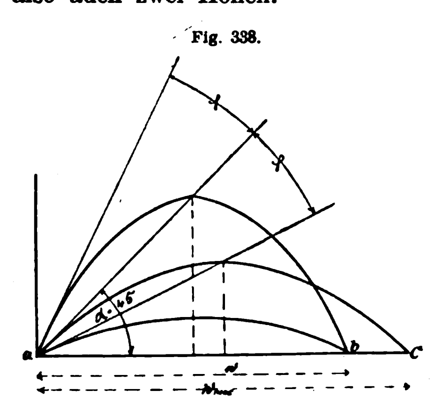
Bei derselben Anfangsgeschwindigkeit wirft man senkrecht halb so hoch, als man unter 45° weit wirft.

Bekanntlich ist in der Trigonometrie für einen Winkel $\varphi$

$$\sin 2\,(45 + \varphi) = \sin 2\,(45 - \varphi).$$

Nun enthält Gl. 151a, wenn man $\alpha$ entwinkeln würde, auch zwei Werte für $\alpha$, denn da $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ resultiert durch Einführen von $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ bei der Entwickelung für $\alpha$ eine Gleichung zweiten Grades. Bei derselben Weite w giebt es sonach zwei Winkel, also auch zwei Höhen.

Fig. 338.



Zerlegt man $\alpha$ in $45° + \varphi$ und $45° - \varphi$, so übersieht man leicht, dass bei 45° die Grenze zu suchen ist, wie die beistehende Figur veranschaulichen dürfte.

ac ist für $\alpha = 45°$ die (grösste) längste Flugbahn $w_{max}$; ab diejenige, welche dem Winkel

$$\alpha_1 = 45 + \varphi \text{ und}$$
$$\alpha_2 = 45 - \varphi \text{ entspricht.}$$

Ist $\varphi = 15°$, so wird beispielsweise

$$\alpha_1 = 45 + 15 = 60°,\ \sin 2 \cdot 60 = \sin 120° = 0{,}866$$
$$\alpha_2 = 45 - 15 = 30°,\ \sin 2 \cdot 30 = \sin 60° = 0{,}866.$$

Fragt man, wenn zwei Projektile auf einmal in dieselbe Richtungsebene geschleudert werden und das eine mit $u^m$ Geschwindigkeit und $\alpha$ Winkelstellung, das andere mit der Geschwindigkeit $u_1^m$ und $\alpha_1$ Elevationswinkel sich bewegt, an welcher horizontalen Stelle Fig. 337, treffen ihre Bahnen zusammen, so ist die Auflösung nahezu die umgekehrte wie oben.

Beide treffen mit ihren Bahnen zusammen, wenn ihre horizontalen und vertikalen Abstände gleich sind.

Sind diese $x_0$ und $y_0$, Fig. 337, dann setzen wir in Gl. 153 einmal $\alpha$ und u und einmal $\alpha_1$ und $u_1$, in beiden Fällen $x_0$ und $y_0$.

Die Bedingungsgleichung ist dann

$$x_0 \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{u^2 \cos^2 \alpha} = x_0 \operatorname{tang} \alpha_1 - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{u_1 \cos^2 \alpha_1}.$$

Löst man dieselbe nach $x_0$ auf, so erhält man nach entsprechender Reduktion

$$x_0 = \frac{2}{g} \frac{\tan \alpha - \tan \alpha_1}{\frac{1}{u^2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{u_1^2 \cos^2 \alpha_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (155)$$

Setzen wir endlich $\alpha = 90°$, so wird das Projektil senkrecht aufsteigen, und wir müssen aus den vorstehenden Formeln dieselben erhalten, welche wir bereits in der Bewegungslehre aufgestellt kaben, weil wir von ihnen ursprünglich ausgingen.

Der Körper gebraucht zum senkrechten Steigen **und** Fallen die Zeit Gl. 150

$$t_1 = \frac{2\,u}{g}.$$

Zum Steigen **oder** Fallen die Zeit Gl. 150a

$$t_2 = \frac{u}{g},$$

die halbe Zeit wie oben.

Die Flugweite ist natürlich Null, weil $\sin 2 \cdot 90° = \sin 180° = 0$, und der Körper vorausgesetzt an derselben Stelle fällt, an der er aufstieg.

Die grösste Höhe ist Gl. 152

$$h = \frac{u^2}{2\,g}.$$

Setzt man in die letzte Gleichung für u die Zeit des senkrechten Auf- und Absteigens $u = \frac{g t_1}{2}$, dann ist $h = \frac{u^2}{2\,g} = \frac{\left(\frac{g t_1}{2}\right)^2}{2\,g}$ oder, wenn der Körper zum Steigen und Fallen $t_1$ Sekunde braucht, so hat er die Höhe erreicht

$$h = 1{,}225\ t_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (152a)$$

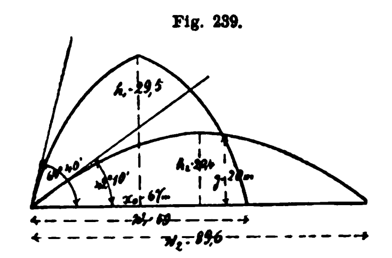
**Beispiel I.** Ein Projektil wird mit $u = 30^m$ Anfangsgeschwindigkeit abgeschossen, es soll ein Ziel in $y_0 = 20^m$ senkrechter Höhe und $x_0 = 50^m$ horizontaler Entfernung treffen, auf welchen Elevationswinkel ist das Geschütz zu richten?

Nach der Bedingung 154a ist

$$x_0 < \frac{u}{g} \sqrt{u^2 - 2\,g y_0} < \frac{30}{9{,}81} \sqrt{900 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 20} < 67^m.$$

Aus Gl. 154 erhält man

$$\tan \alpha = \frac{900 \pm \sqrt{900\,(900 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 20) - 9{,}81^2 \cdot 50^2}}{9{,}81 \cdot 50},$$


Fig. 239.

woraus

$$\text{tang}\,\alpha_1 = 2{,}694,\quad \alpha_1 = 69°\,40'$$
$$\text{tang}\,\alpha_2 = 0{,}906,\quad \alpha_2 = 42°\,10'.$$

Beide Bahnen sind in Fig. 239 aufgezeichnet.

Die Flugweiten beider sind nach Gl. 151a

$$w_1 = u^2 \frac{\sin 2 \cdot 69°\,40'}{g} = 900 \frac{\sin 139°\,20}{9{,}81} = 59^{m}.$$

$$w_2 = u^2 \frac{\sin 2 \cdot 42°\,10'}{g} = 900 \frac{\sin 84°\,20}{9{,}81} = 89{,}6^{m}.$$

Die Maximalhöhen

$$h_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 900 \frac{\sin^2 69°\,40}{2 \cdot 9{,}81} = 39{,}5^{m}$$

$$h_2 = \frac{u^2 \sin^2 42°\,10'}{2 \cdot 9{,}81} = 20{,}4^{m}.$$

Wird das Geschütz unter 69° 40′ aufgestellt, so gebraucht es zur Zurücklegung der ganzen Bahn nach Gl. 150 die Zeit

$$t_1 = \frac{2u \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 30 \cdot \sin 69°\,40}{9{,}81} = 2^1/_{10} \text{ Sek.}$$

Unter 42° 10′ geneigt zur Horizontalen gelangt das Projektil wieder auf die Erde in der Entfernung $w_2 = 89{,}6^{m}$ in

$$t_1 = \frac{2 \cdot 30 \cdot \sin 42°\,10}{9{,}81} = 4 \text{ Sek.}$$

**II.** Würde man das Geschütz unter 45° aufstellen und mit derselben Anfangsgeschwindigkeit wirken lassen $u = 30^{m}$, dann ist die horizontale Flugweite nach Gl. 151a

$$w = \frac{u^2}{g} = \frac{900}{9{,}81} = 92^{m};$$

die Höhe

$$h = \frac{u^2}{2g} \sin^2 45 = \frac{900}{2 \cdot 9{,}81} (^1/_2 \sqrt{2})^2 = 23^{m}.$$

In senkrechter Stellung wäre $h = \frac{u^2}{2g} = 46^{m}$.

Bei 45° Elevation ist $t_1 = \frac{2 \cdot 30}{9{,}81} \sin 45° = 4^1/_5{}''$, wenn das Geschütz vertikal gerichtet ist, gebraucht das Projektil, Gl. 152a,

$$t = \sqrt{\frac{h}{1{,}225}} = 6^2/_{10}{}'';$$

hier gebraucht es die längste Zeit zu seinem Wege, steigt aber auch am höchsten.

**III.** Damit eine Geschützkugel unter 45° Elevation abgeschossen 1 Meile = 7500$^m$ weit fliegen kann, muss ihre Anfangsgeschwindigkeit (selbstredend von allen Widerständen) nach Gl. 151a

$$u = \sqrt{gw} = \sqrt{9{,}81 \cdot 7500} = 274^m \text{ sein.}$$

Ihre grösste Erhebungshöhe wird sonach, nach Gl. 152

$$h = \frac{274^2}{2 \cdot g} \sin^2 45 = 1877^m.$$

---

## 4. Die schiefe Ebene, Schraube und Keil.

### a) Die schiefe Ebene.

Der Wert der schiefen Ebene, irgend eine unter einem Winkel zur Hortzontalen geneigten Fläche, oder auch Linie, ist uns keinenfalls mehr unbekannt, wir haben sie schon öfter in unsere Betrachtungen gezogen und ziehen müssen, um uns Klarheit namentlich über gewisse dem augenblicklichen Zweck entsprechende Kräfteverteilungen zu verschaffen.

Augenblicklich wollen wir, abgesehen von den Kräften, die Bewegung einer Masse auf einer schiefen Ebene mit der freien Bewegung vergleichen, deren Hauptgrundsätze uns aus der Bewegungslehre bekannt sind. Dort (s. S. 13) benutzten wir sie als Mittel zum Zweck, um uns die Vorstellung einer langsameren, kleineren Beschleunigung gegenüber der freien Fallbeschleunigung zu verschaffen. Je flacher die Neigung einer solchen Ebene, um so langsamer bewegt sich der Körper; ist die Ebene ganz horizontal, so zieht ihn die Anziehungskraft der Erde senkrecht nach unten, eine Seitenkraft ist nicht vorhanden, somit bleibt der Körper stehen, umgekehrt je steiler die Neigung, um so grösser wird seine Beschleunigung p, ist die Neigung 90°, dann fällt er vollständig frei und es geht die Beschleunigung in g über.

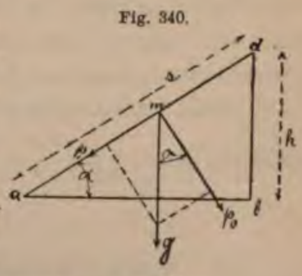


Fig. 340.

Die Masse m drückt, Fig. 240, senkrecht auf die schiefe Ebene, d. h. die Anziehungskraft der Erde oder das Gewicht bewirkt den Druck und würde die Masse m = 1 senkrecht nach unten mit der Kraft 9,81 ziehen. Da für uns nun die Masse m nur eine allgemeine Bezeichnung der verschiedenen Materien der Körper ist, so wird jede Masse mit der Kraft mg, das ist eben das Gewicht, angezogen werden.

Bezeichnen wir nun die senkrechte Beschleunigung im Punkte m mit g, so ist die längs der schiefen Ebene $p_1$, während die senkrecht auf die schiefe Ebene, wie uns schon bekannt, $p_0$, die Reibung veranlasst.

Wir wollen nun bei der Bewegung von der letzteren absehen, und $p_1$ abhängig von g ausdrücken, so folgt

(156) . . . . . . . $p_1 = g \sin \alpha.$

Kommt in d ein Körper mit $c^m$ Anfangsgeschwindigkeit an und erreicht er in der Zeit t die Endgeschwindigkeit v, so ist der zurückgelegte Weg

(157) . . . . . . . . $s = \frac{c + v}{2} t.$

Die Beschleunigung aber längs der schiefen Ebene ist p, und in der Zeit t

(157 a) $\begin{cases} p_1 = \frac{v - c}{t}, \text{ bezw. } g \sin \alpha = \frac{v - c}{t} \text{ oder} \\ g = \frac{v - c}{t \sin \alpha}. \end{cases}$

War keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so ist $c = 0$ und wir schliessen aus der Gl. 157

(157 b) . . $s = \frac{vt}{2}, \; g = \frac{v}{t \sin \alpha}$ bezw. $g \sin \alpha = \frac{v}{t}.$

Die Erdbeschleunigung tritt erst dann in Kraft, wenn $\alpha = 90°$, dann geht g über in $g = 9{,}81$. Je kleiner hingegen $\alpha$, die Neigung, wird, um so grösser muss g werden. Wenn die Ebene horizontal, $\alpha = 0°$, so wird $g = \infty$, d. h. dann müsste die Beschleunigung der Erde unendlich gross sein, um den Körper vorwärts zu bewegen.

In den Beziehungen (157) können wir ebenso gut statt g eine allgemeine Bezeichnung p einführen, denn g ist je nach dem Winkel $\alpha$ veränderlich, von unendlich bis $g = 9{,}81$. Mit p müssten wir aber in gewissen Beziehungen eine Abhängigkeit von g, d. h. von der Anziehungskraft der Erde darstellen, die nie grösser oder kleiner als 9,81 werden kann und sich eben infolge des Produktes $g \sin \alpha$ abhängig vom Neigungswinkel einer geneigten Ebene ändert.

Sobald wir vom Begriff der Kraft ausgehen, müssen wir zurückgreifen auf die Formel $p = \frac{K}{G} g$, welche wir auch bezeichnen können mit

$$p = \frac{K}{G} g = \sin \alpha \, g.$$

Die Neigung der Ebene liegt hier im Begriffe der Kraft, wir denken uns dieselbe grösser oder kleiner, je nach der grösseren oder geringeren

Neigung. Im Falle der grössten Neigung, senkrechte Ebene, wird $K = G$ und $g_1$ geht in g über, je flacher die Ebene liegt, um so mehr wird Kraft für den Druck senkrecht auf die Ebene absorbiert, benötigt, um so mehr kommt in Abzug von K. Damit sich ein Körper durch die Erdkraft getrieben horizontal bewegen kann, müsste diese eben unendlich gross sein; oder umgekehrt, wenn $\alpha = 0$, so ist die Anziehungskraft wirkungslos auf die Bewegung, nur eine künstliche Kraft, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, kann dann eine Bewegung veranlassen.

Setzen wir in Fig. 340 G statt g, also das Gewicht statt derjenigen Zahl, welche das Gewicht repräsentiert, für eine Masse $m = 1$, und ist $p_1$ die gedachte treibende Kraft, so ist $K = G \sin\alpha$; die treibende Erdkraft ist also, wie schon erwähnt, vom Neigungswinkel abhängig.

Kombiniert man die Gl. 157 und 157a mit Rücksicht darauf, dass bei Bewegungen von a nach d $p_1$ negativ (Verzögerung) angenommen werden muss, in dem man v eliminiert und auf den Weg s schliesst, so erhält man

$$s = ct \pm g \sin\alpha \frac{t^2}{2}. \quad \ldots \ldots \quad (158)$$

Wenn keine anfängliche Geschwindigkeit vorhanden, folgt

$$s = g \sin\alpha \frac{t^2}{2}. \quad \ldots \ldots \quad (158\text{a})$$

Eliminiert man aus Gl. 157 und 157a die Zeit t, so wäre der zurückgelegte Weg auf der schiefen Ebene bei $c^m$ Anfangs- und $v^m$ Endgeschwindigkeit am Ende von s,

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2 g \sin\alpha}; \quad \ldots \ldots \quad (158\text{b})$$

wenn $c = o$, folgt

$$s = \frac{v^2}{2 g \sin\alpha}. \quad \ldots \ldots \quad (157\text{c})$$

Für $\alpha = 90°$ geht s in h über und man erhält wieder

$$s = h = \frac{v^2}{2g}, \text{ bezw. } v = \sqrt{2\,gh.}$$

Es ist aber auch $\sin\alpha = h/s$; in Gl. 157c eingesetzt, wird dann

$$s = \frac{s v^2}{2\,gh} \text{ oder auch } h = \frac{v^2}{2\,g}, \; v = \sqrt{2\,gh.}$$

Fig. 341.

Die Endgeschwindigkeit v ist unabhängig von der Neigung der schiefen Ebene, Fig. 241; lässt man zu verschieden geneigten Ebenen $a_1 d$, $a_2 d$, $a_3 d$ gleiche Massen herabgleiten oder rollen, so

kommen sie alle mit derselben Endgeschwindigkeit unten an, diese ist gerade so gross, als ob die Masse senkrecht zur Höhe h herabgefallen wäre, $v = \sqrt{2gh}$.

Erteilt man ihnen alle gleiche Anfangsgeschwindigkeiten c, so haben diese auch keinen Einfluss; denn nach Gl. 158b ist

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g\frac{h}{s}}, \text{ woraus}$$

$$v = \sqrt{2gh + c^2}$$

gerade so gross als die Endgeschwindigkeit beim senkrechten Fall und c Anfangsgeschwindigkeit.

Je länger aber die schiefe Ebene, also der zurückzulegende Weg ist, um so grösser muss die Zeit sein, aus Gl. 158a, worin $c = 0$, folgt,

$$\sin\alpha = \frac{h}{s} \text{ eingesetzt,}$$

$$(159) \quad \ldots\ldots \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}} = s\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

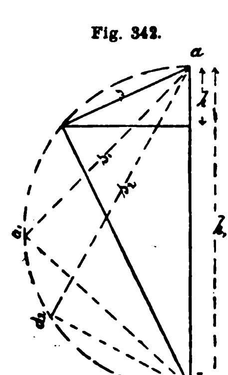
Je kleiner h, oder $\sin\alpha$, um so grösser t und umgekehrt.

Berücksichtigt man die Anfangsgeschwindigkeit c, dann ist nach Gl. 158 die fragliche Zeit (s. auch S. 16, 17);

$$(159a) \quad \ldots\ldots \quad t = \frac{\mp c \pm \sqrt{c^2 \pm 2sg\sin\alpha}}{g\sin\alpha}.$$

Hier gilt das obere Zeichen vor c für eine beschleunigte Bewegung, das untere für Verzögerung; wenn $c = 0$, folgt wieder

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}}.$$


Fig. 342.

Wenn, Fig. 342, ein Körper zu der schiefen Ebene s ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgleitet, benötigt er die Zeit nach Gl. 159

$$t = s\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

Damit er senkrecht zu einer Höhe $h_1$ herunterfällt, hat er die Zeit nötig

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}},$$

welche wir aus $s_1 = h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$ berechnen können, indem wir in Gl. 158, $\alpha = 90^\circ$, $s_1 = h_1$, $t = t_1$ setzen.

Soll der Körper nun ebenso schnell in b anlangen, so heisst dies, es soll sein $t = t_1$; oder die Werte beider eingesetzt,

$$s\sqrt{\frac{2}{g\,h}} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \text{ woraus}$$

$$s^2 = h h_1 \text{ oder } h : s = s : h_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Diese Gleichung sagt uns, dass s die mittlere geometrische Proportionale zwischen h und $h_1$ sein muss, wenn der Körper längs einer schiefen Ebene deren Länge s und Höhe h dieselbe Zeit gebrauchen soll wie zum senkrechten Fall von der Höhe $h_1$. Solcher schiefen Ebenen lassen sich aber in einem Halbkreis unendlich viele einzeichnen; konstruiert man über $h_1$ einen solchen, dann fällt der Körper ebenso lange von a nach b, als er von a nach $d_1$ oder $d_2$ u. s. w. gebraucht.

**Beispiel I.** Ein Körper bewegt sich mit $c = 3^m$ Anfangsgeschwindigkeit zu einer $\alpha = 30^\circ$ geneigten Ebene herab, in $t = 6$ Sekunden wird er einen Weg (Gl. 158)

$$s = ct + \tfrac{1}{2}\, g \sin\alpha\, t^2 = 3 \cdot 6 + \tfrac{1}{2}\, 9{,}81 \cdot \sin 30^\circ \cdot 6^2 = 106{,}3^m$$

zurückgelegt haben, er kommt mit der Geschwindigkeit, Gl. 157,

$$v = \frac{2s}{t} - c = \frac{2 \cdot 106{,}3}{6} - 3 = 32{,}4^m$$

an. Die Beschleunigung des Körpers ist

$$g \sin\alpha = 9{,}808 \cdot \sin 30^\circ = 4{,}904^m.$$

**II.** Die Zeit, die ein Körper gebraucht, um bei $c = 10^m$ Anfangsgeschwindigkeit einer schiefen Ebene herabzugelangen ist, wenn $\alpha = 45^\circ$ und $s = 1000^m$

$$t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2 s g \sin\alpha}}{g \sin\alpha} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 45}}{9{,}81 \sin 45}$$

$$= \frac{-10 + \sqrt{14100}}{0{,}707 \cdot 9{,}81} = 35\tfrac{1}{3} \text{ Sek.}$$

Das negative Zeichen der Wurzel kann nicht in Betracht kommen. Hätte er keine Anfangsgeschwindigkeit, dann wäre Gl. 159

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9{,}81 \cdot 0{,}707}} = 170 \text{ Sek. abg.}$$

Die Höhe der schiefen Ebene ist bei $45^\circ$ Neigung und $1000^m$ Länge

$$h = 0{,}707\, s = \sin 45 \cdot s = 707^m.$$

Fällt der Körper senkrecht herab, so folgt die Zeit aus

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{707 \cdot 2}{9{,}81}} = 12 \text{ Sek.}$$

vorausgesetzt, dass $c = 0$. Ist aber $c = 10^m$ und der Körper fällt senkrecht zur Höhe $707^m$ herab, dann ist die hierzu erforderliche Zeit (s. S. 16, 17)

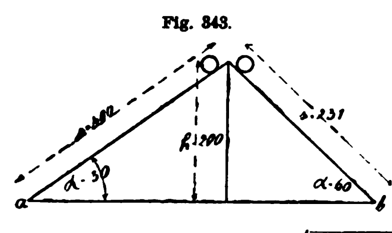
$$t = \frac{10 + \sqrt{10^2 + 2 \cdot 707}}{9{,}808} = 3 \text{ Sek. abg.}$$

**III.** Die Höhe einer geneigten Ebene ist $h = 20^m$, die eines senkrechten Abhanges $h_1 = 500^m$; damit ein Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit dieselbe Zeit zu der $h = 20^m$ hohen schiefen Ebene als zu dem senkrechten Abhang von $h_1 = 500^m$ herabzugelangen braucht, muss die Länge der geneigten Ebene nach Gl. 160

$$s = \sqrt{h h_1} = \sqrt{20 \cdot 500} = \sqrt{10000} = 100^m$$

sein; also eine Neigung haben, die sich aus $\sin \alpha = \frac{20}{100} = 0{,}2$ ergiebt, nämlich $\alpha = 11° \, 30'$.

Fig. 343.




**IV.** Es stossen zwei gleich hohe schiefe Ebenen von 30° und 60° Neigung aneinander. Es laufen zwei Körper nach beiden Ebenenrichtungen herab, Fig. 243 (natürlich ohne Widerstand); der eine gelangt in a in

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 400}{9{,}81 \cdot \sin 30°}} = 12{,}6'',$$

der andere in

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 231}{9{,}81 \cdot \sin 60°}} = 53{,}3'',$$

unten in b an.

Die Geschwindigkeit, mit der sie ankommen, ist in beiden Fällen gleich (s. Fig. 241), da $h = 200$, Fig. 343,

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot 200} = 63^m.$$

**V.** Der S. 12 in der Bewegungslehre Beispiel X erwähnte Körper bewegt sich mit $p = 3^m$ Beschleunigung. Läuft er zu einer schiefen Ebene herab, dann hat diese eine Neigung, welche sich aus $3 = g \sin \alpha$ ergiebt, sie ist $\sin \alpha = \frac{3}{9{,}81} = 0{,}306$, somit $\alpha = 17° \, 50'$.

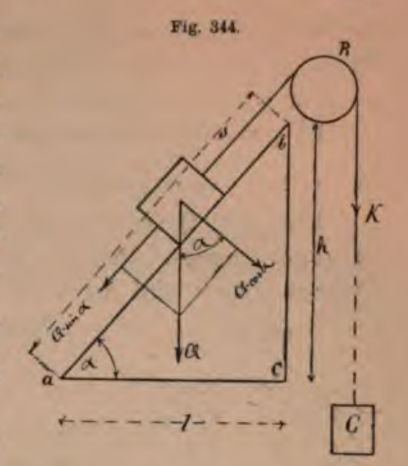
Wiegt der Körper $G = 80$ Klg., dann wird er von der geneigten Ebene derart im freien Fallen zurückgehalten, als ob eine Kraft

$$K = G \sin \alpha = 80 \cdot 0{,}306 = 24 \text{ Klg.}$$

auf ihn einwirken würde. —

Denken wir uns, Fig. 344, ein Gewicht auf einer schiefen Ebene liegen, welches von der Kraft K durch Vermittelung einer Rolle in Bewegung gesetzt, in die Höhe gezogen wird, die Rollenzapfen und Schnurwiderstände sollen nicht in Rücksicht gezogen werden, so wird die Kraft K mit einer gewissen Beschleunigung $p = \frac{K}{Q} g$ sinken. Nach t Sek. hat K die Geschwindigkeit $v = pt$ und den Weg $s = \frac{1}{2} pt^2$ erreicht.

Fig. 344.



Ersetzen wir aber die Kraft K durch ein Gewicht G, dann ist die Triebkraft $K = G - Q \sin\alpha$, sofern $G > Q \sin\alpha$ gedacht wird; die zu bewegenden Gewichte sind $G + Q$, also wird die Beschleunigung, mit der G sinkt, ohne Berücksichtigung der Reibung von Q auf ab

$$p = \frac{G - Q \sin\alpha}{G + Q} g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Wenn $\alpha = 90°$, so wird $p = \frac{G - Q}{G + Q} g$ (s. S. 28, Bemerk.); wenn $Q = 0$, dann sinkt G mit der Beschleunigung des freien Falles $p = g$.

Ziehen wir aber die Reibung in Betracht, dann müssen wir die Reibungskraft $\varphi Q \cos\alpha$ noch von der Kraft selbst in Abzug bringen, es wird dann diese $G - Q \sin\alpha - \varphi Q \cos\alpha$, sonach die Beschleunigung, mit der G sinkt

$$p = \frac{G - Q \sin\alpha - \varphi Q \cos\alpha}{G + Q} g = \frac{G - Q(\sin\alpha + \varphi \cos\alpha)}{G + Q} g. \quad (162)$$

Wenn $G = 0$, so folgt

$$p = -(\sin\alpha + \varphi \cos\alpha) g. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

p wird negativ, weil Q jetzt zur Ebene herunter rutscht, nicht mehr der ursprünglich angenommenen positiven Richtung des sinkenden Gewichtes folgt, sondern sich diesem entgegen bewegt.

Ist keine Reibung vorhanden, $\varphi = 0$, dann wird $p = -g \sin\alpha$, die Beschleunigung der Neigung $\alpha$ entsprechend. Wenn $\alpha = 90°$, dann folgt wieder $p = -g$. —

Setzen wir voraus, dass das Gewicht Q eine grössere Kraft auf G ausübt, so dass G steigen muss, dann ist wie leicht zu übersehen

$$p = \frac{Q \sin\alpha - \varphi Q \cos\alpha - G}{G + Q} g = \frac{Q(\sin\alpha - \varphi \cos\alpha) - G}{G + Q} g. \quad (162a)$$

Wenn G = 0, so folgt, dass Q fällt mit der Beschleunigung

(b) . . . . . . . $p = (\sin\alpha - \varphi \cos\alpha)\, g.$

Für $\varphi = 0$ wird $p = + g \sin\alpha$, wenn $\alpha = 90°$, $p = + g$.

Ist $\varphi = \tan\alpha$, so wird die Beschleunigung

(c) . . . . . . . . . $p = -\frac{G}{G + Q}\, g.$

Hier wird Q von G nach oben, der steigenden Bewegung von G entgegen gezogen, aus welchem Grunde p negativ werden muss, die Zugkraft $Q \sin\alpha$ wird durch die Reibungskraft aufgehoben.

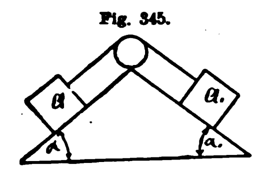


Fig. 345.

Setzt man endlich in obige Formeln

$$\sin\alpha = \frac{h}{s} \text{ und } \cos\alpha = \frac{l}{s},$$

dann werden diese unabhängig von dem Neigungswinkel, selbstredend aber abhängig von der Länge und der Höhe der geneigten Ebene.

Die Beschleunigung, mit der G sinkt, wird dann nach Gl. 162

(162b) . . . . $p = g \frac{G - \frac{Q}{s}(h + \varphi l)}{G + Q}.$

In Fig. 345 sind zwei Ebenen von verschiedenen Neigungen und verschiedenem Material zusammengestellt. Offenbar müssen wir, von jeder Seite besonders betrachtet, ähnliche Formeln wie die eben gefundenen erhalten.

Ist die Wirkung des Gewichtes $Q_1$ derjenigen von Q überwiegend, dann resultiert, wie wohl leicht übersehen werden kann, weil

$$G = Q_1 \sin\alpha_1 - \varphi_{,,}\, Q \cos\alpha_1,$$

(d) . $p = \frac{Q_1 \sin\alpha_1 - \varphi_{,,}\, Q_1 \cos\alpha_1 - Q \sin\alpha - \varphi\, Q \cos\alpha}{Q + Q_1}\, g.$

Wird aber $Q > Q_1$ bezw. erzeugt Q die Bewegung, dann wird

(e) . $p = \frac{Q \sin\alpha - \varphi\, Q \cos\alpha - Q_1 \sin\alpha_1 - \varphi_{,,}\, Q \cos\alpha_1}{Q + Q_1}\, g,$

wenn $\varphi$ und $\varphi_{,,}$ die beiden Reibungskoefficienten der gleitenden Reibung sind.

Man erhält etwas zusammengezogen

(162c) $\begin{cases} p = \frac{Q_1 (\sin\alpha_1 - \varphi_{,,} \cos\alpha_1) - Q (\sin\alpha + \varphi \cos\alpha)}{Q + Q_1}\, g \text{ bezw.} \\ p = \frac{Q (\sin\alpha - \varphi \cos\alpha) - Q_1 (\sin\alpha_1 + \varphi_{,,} \cos\alpha_1)}{Q + Q_1}\, g. \end{cases}$

Wendet man statt gleitender Reibung Rollenbewegung an für Q bezw. $Q_1$, dann treten die S. 151 etc. erwähnten Zugkräfte mit Rücksicht auf die Rollendimensionen in Kraft.

**VI.** Es sei $G = 2000$ Klg., $Q = 1500$ Klg., $\alpha = 20°$ und soll im Sinne der Fig. 344 Q gehoben werden. Q sei aus Eisen und die Ebene habe auch eine eiserne Bahn.

Nehmen wir abg. $\varphi = 0{,}2$ an, so folgt nach Gl. 162

$$p = \frac{2000 - 1500\,(\sin 20 + 0{,}2 \cos 20)}{2000 + 1500} = 0{,}34 \text{ g.}$$

G wird mit dem dritten Teil der Erdbeschleunigung sinken. Legen wir Q auf $500^{mm}$ starken Walzen, dann ist, wenn der Wälzungsreibungskoefficient $\varphi_1 = 0{,}6$ angenommen wird

$$p = \frac{2000 - 1500 \cdot \sin 20 - \frac{\varphi_1 \, Q \cos 20°}{500 + 1}}{1500 + 2000} \text{ g oder}$$

$$p_1 = \frac{2000 - 1500 \cdot 0{,}342 - \frac{0{,}6 \cdot 1500 \cdot 0{,}94}{500 + 1}}{3500} \text{ g} = 0{,}42 \text{ g.}$$

G sinkt hier schneller, weil weniger Reibung vorhanden ist.

G wird in 10 Sek. die Geschwindigkeit

$$v = 0{,}34 \cdot g \cdot 10 = 34^m \text{ abg.}$$

im ersten Fall, und

$$v_1 = 0{,}42 \cdot g \cdot 10 = 42^m \text{ abg.}$$

im letzteren Fall erreicht haben; hierbei die Wege zurückgelegt haben

$$s = \frac{1}{2} p t^2 = \frac{1}{2} 0{,}34 \cdot g \cdot 10^2 = 170^m \text{ bezw. } 210^m.$$

Gleichgewicht würde eintreten, wenn

$$G = Q\,(\sin \alpha + \varphi \cos \alpha) = 1500\,(\sin 20 + 0{,}2 \cos 20) = 795 \text{ Klg.}$$

Mit dieser Kraft müsste Q auf der Ebene fortbewegt werden bei gleitender Reibung; bei wälzendem Widerstand mit

$$G = 1500\,(\sin 20 + \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{500 + 1} = 515 \text{ Klg.}$$

Hat die Rolle R, Fig. 344, einen Halbmesser von $R = 1{,}2^m$ dann ist ihr Betriebsmoment im letzteren Falle $M = 1{,}2 \cdot 515 = 618$ Klgm.

Wird G im letzteren Falle mit $v = 0{,}8^m$ Geschwindigkeit pro Sek. bewegt von der Betriebskraft, dann muss die letztere

$$N = \frac{515 \cdot 0{,}8}{75} = 5\tfrac{1}{2} \text{ PS}$$

entwickeln und die Rolle R,

$$n = \frac{60 \cdot v}{2 \pi R} = \frac{60 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2} = 7 \text{ Umdrehungen}$$

in der Minute machen.

**VII.** Zwei aneinander gebaute schiefe Ebenen haben die Steigungen $\alpha_1 = 40°$ und $\alpha = 20°$. Eine Lokomotive von $Q_1 = 300$ Ctr. $= 15000$ Klg. soll über eine Rolle einen Wagenzug von 5 Wagen à 100 Ctr. = 5000 Klg. möglichst ohne Kraftanstrengung in die Höhe ziehen. Es ist also $Q = 5 \cdot 5000 = 25000$ Klg in Rechnung zu ziehen. Verwenden wir die Gl. d bezw. die erstere der Gl. 162c, so stellt in diesen $Q_1 \varphi_{\prime\prime} \cos \alpha_1$ und $Q \varphi \cos \alpha$ für jede schiefe Ebene der zu überwindende Eisenbahnwagen- bezw. Lokomotivwiderstand dar. Dieser ist aber (s. S. 166) in unserem Fall $\cos \alpha \frac{Q_1}{80}$ für die Lokomotive und $\cos \alpha \frac{Q}{200}$ für die Wagen.

Die Bewegungsgleichung im Sinne der Gl. 162c wird dann

$$p = \frac{Q_1 \sin 40 - \frac{Q_1}{80} \cos 40 - \left(Q \sin 20 + Q \frac{\cos 20}{200}\right)}{Q + Q_1} g \text{ oder}$$

$$p = \frac{15000 \cdot 0{,}633 - 25000 \cdot 0{,}347}{15000 + 25000} g = 0{,}021\, g = 0{,}18^{m}.$$

Das Gewicht der Lokomotive ist also noch imstande, abgesehen von den Rollen- und Seilwiderständen, auf die wir in den Anwendungen noch zurückkommen werden, die Wagenlast zu befördern.

Die Betriebskraft wäre hier

$$K = 15000 \cdot 0{,}643 - 25000 \cdot 0{,}342 = 1100 \text{ Klg.}$$

Bei $2^{m}$ Betriebsgeschwindigkeit müsste die Lokomotive eine Kraft entwickeln von

$$N = \frac{1100 \cdot 2}{75} = 29 \text{ PS}.$$

---

b) Die Schraube.

Verfolgt man einen Schraubengang, Fig. 346, abcdef, so erhebt sich

Fig. 346.

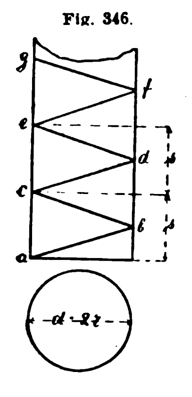
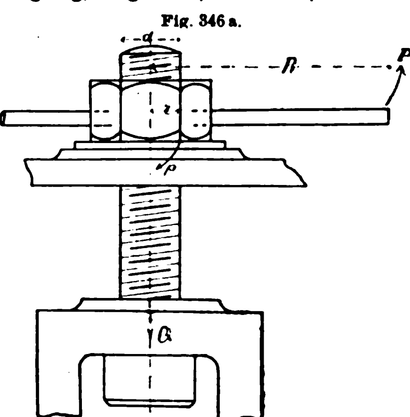
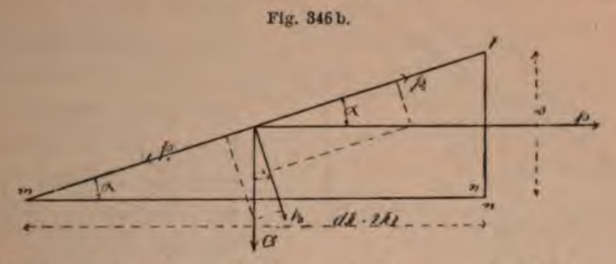



Fig. 346a.



derselbe bei jedem vollständigen Umgang um die sog. Steigung s. Legt man einen Faden auf einen solchen Umgang cde und trägt sich den

Fig. 346 b.



Umfang $\pi$d des Schraubencylinders auf eine gerade Linie mn ab, an deren Ende n die Steigung s aufgetragen ist, so stellt die Hypothenuse mt des $\triangle$ mnt die Länge cde dar.

Wir haben eine schiefe Ebene vor uns, welche den Schraubengang vertritt, und auf welche durch eine horizontal wirkende am Umfang des Schraubencylinders angreifende Kraft p eine auf die schiefe Ebene also auf den Schraubengang einwirkende Last Q (die Schraubenmutter) befördert werden soll; die letztere übt hiernach den senkrechten Druck Q aus.

Sehen wir auch hier erst von der Reibung ab, so kommt von den Teilkräften $p_1$ und $p_0$, in welche sich Q zerlegt, nur $p_1$ in Betracht. Diese zieht in Richtung der Schraubenlinie nach unten.

Es ist nun $\frac{p_1}{p} = \cos\alpha$, sonach $p = \frac{p_1}{\cos\alpha}$, und da $p_1 = Q \sin\alpha$, so folgt für

$$p = Q\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = Q \tang\alpha = \frac{s}{\pi d}\,Q = \frac{s}{2\,r\,\pi}\,Q. \quad . \quad (163)$$

Multipliciert man beiderseitig mit r, so erhält man das Moment, welches erforderlich wird, um die Schraube zu drehen, wenn die Mutter mit Q Klg. senkrecht auf das Gewinde lastet, oder mit welchem man die Mutter in Umdrehungen versetzen muss, um den Schraubenbolzen, der einem Druck von Q Klg. Widerstand leisten soll, zu drehen.

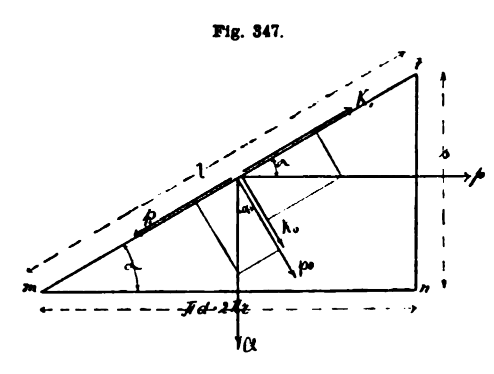
$$pr = r\,\frac{s}{2\,r\pi}\,Q = \frac{s}{2\,\pi}\,Q, \text{ oder}$$

$$M_s = \frac{s}{2\,\pi}\,Q = PR = pr. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (164)$$

In der folgenden Betrachtung wollen wir die Reibung mit in Rücksicht ziehen (s. Fig. 347).

Die Reibung wird veranlasst durch die Teilkräfte $p_0$ und $K_0$, die erstere von Q, die letztere von p herrührend; die Kräfte $K_1$ und $p_1$ wirken in Rich-

Fig. 347.



tung der Schraubenlinie, $p_1$ nach unten, $K_1$ nach t zu, die letztere strebt Q nach oben zu heben, aufzuschrauben.

Damit Q in die Höhe gelangen kann, muss $K_1 > p_1$ sein, $K_1 - p_1$ hat sonach als Betriebskraft die Reibung $(K_0 + p_0)\,\varphi$ zu überwinden, Gleichgewicht tritt ein, wenn

(a) $K_1 - p_1 = \varphi\,(K_0 + p_0)$.

Aus der Figur ist ersichtlich, dass

$$p_1 = Q \sin\alpha,\ p_0 = Q\cos\alpha,\ K_0 = p\sin\alpha,\ K_1 = p\cos\alpha.$$

Führt man diese Werte ein in (a), so erhält man

(b) . . . . $p\cos\alpha - Q\sin\alpha = \varphi\,(p\sin\alpha + Q\cos\alpha)$.

Von Interesse für uns ist es nun zu wissen, wie gross p ist, wenn Q, $\alpha$ und der Reibungswert $\varphi$ bekannt.

Aus (b) findet man

$$p = \frac{Q\,\varphi\cos\alpha + Q\sin\alpha}{\cos\alpha - \varphi\sin\alpha} \text{ oder da}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\,\pi r}{l} = \frac{d\pi}{l},\ \sin\alpha = \frac{s}{l},$$

(165) . . $$p = Q\,\frac{2\,r\pi\varphi + s}{2\,r\pi - \varphi s} = Q\,\frac{d\pi\varphi + s}{d\pi - \varphi s}.$$

p greift am Umfang der Schraube an, das Moment um Schraube oder Mutter zu drehen, finden wir wieder durch Multiplikation mit r, es ist dasselbe

(166) $$M_s = pr = RP = rQ\,\frac{2r\pi\varphi + s}{2r\pi - \varphi s} = \frac{d}{2}\,Q\,\frac{d\pi\varphi + s}{d\pi - \varphi s}.$$

Fällt die Reibung hinweg, so wird $\varphi = 0$ gesetzt,

$$M_s = Q\,\frac{s}{2\,\pi} \text{ wie oben.}$$

Ist man genötigt zur Überwindung dieses Momentes eine Räderübersetzung in Anwendung zu bringen, dann folgt diese nach Gl. 32 aus

(167) . . . . . . . . . $nPKi = M_s$.

**Beispiel I.** Beistehend sei eine Schraubenwinde dargestellt, welche Q = 40 Ctr. = 2000 Klg. Last auf die Höhe H = 1$^m$ = 1000$^{mm}$ heben soll.

Der Schraubendurchmesser*) sei $d = 52^{mm}$, die Steigung $s = 8^{mm}$; die Reibung $\varphi = 0,3$.

Das Reibungsmoment ist nach Gl. 166

$$M_s = \frac{52}{2} 2000 \frac{52 \cdot 3,14 \cdot 0,3 + 8}{52 \cdot 3,14 - 0,3 \cdot 8}$$

$$= 18\,500 \text{ Klgmm.}$$

Wendet man zur Hebung der Last zwei Stangen von je $800^{mm}$ Länge an, an jeder wirke die Kraft P, dann ist die letztere

$$P = \frac{18\,500}{2 \cdot 800} = 12 \text{ Klg.}$$

Würde man statt der Druckhebel zwei Kegelräder zum Betrieb anwenden, wovon das eine als Mutterrad konstruiert sein müsste, so würde bei $n = 1$ Mann, $P = 15$ Klg. Druck, $K = 400^{mm}$ Kurbelhalbmesser, die Übersetzung sein müssen

Fig. 348.

$$i = \frac{M_s}{nPK} = \frac{18\,500}{15 \cdot 400} = 3 \text{fach abg.}$$

---

c) Der Keil.

Stellt man zwei schiefe Ebenen in der Weise zusammen, wie die umstehende Figur 349 angiebt, so erhält man die Keilform abc. Auf dem Rücken ab eines solchen Keiles, den wir uns hier als gleichschenkeliges Dreieck im Durchschnitt denken, wirkt eine Kraft P, welche auf jeder Seite der Keilbahn einen Normaldruck Q oder Horizontaldruck $Q_1$ ausübt. P kann als ruhendes Gewicht, wie beispielsweise bei den Gewölbesteinen, aufgefasst werden, oder es wirkt P herrührend von einem fallenden Körper als Schlag- oder Stosskraft; seine Wirkung vergrössert sich, im letzteren Falle, wie wir später noch sehen werden, dann um ein Bedeutendes.

*) Ist H die Erhebungshöhe, dann ist, wie wir in der Festigkeitslehre noch nachweisen werden, für Schraubenwinden $d^{mm} = 10 + 0,2 \sqrt{H} \sqrt[4]{Q}$; die Steigung $s^{mm} = 2 + 0,9\, d$ für flache Schraubengänge. Für Pratzenwinden mit Zahnstangen, wenn t Teilung, b Breite und a Stärke der Zahnstange

$$a = \tfrac{1}{3} \text{ bis } \tfrac{2}{3}\, b,\quad b = 2t,$$

$$b^{mm} = 15 + 0,2 \sqrt{H} \sqrt[4]{Q}.$$

Wir werden in den Anwendungen noch näher auf die Schraube zurückkommen.

Die Anwendung des Keiles zum Klemmen, Pressen, Spalten u. s. w. dürfte als bekannt vorausgesetzt werden.

An dieser Stelle wollen wir uns auch vorläufig damit begnügen, P abhängig von Q, $Q_0$ und der Form des Keiles zu entwickeln, und behalten uns vor, in den Anwendungen später auf weitere Kombinationen im Sinne der Praxis einzugehen.

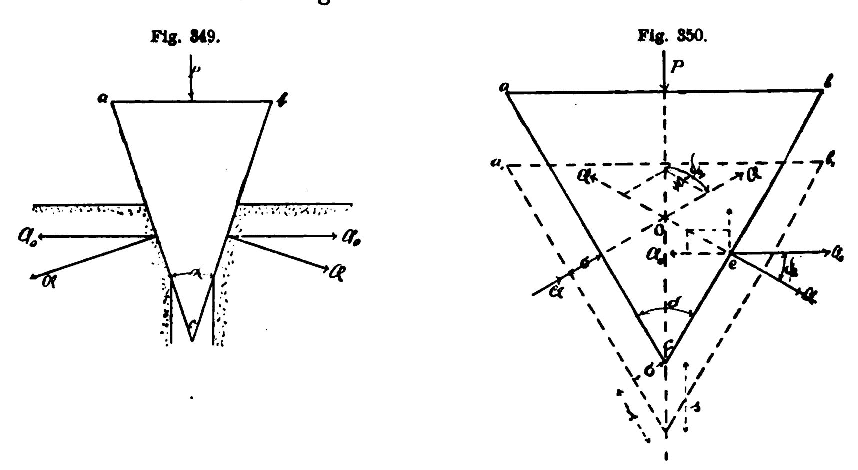


Fig. 349. Fig. 350.

Lassen wir das Gewicht des Keiles selbst ausser Acht, so soll die Kraft P so auf den Keil einwirken, dass der letztere um eine Strecke s in senkrechter Richtung vorrückt. Hierbei schiebt oder presst er normal oder horizontal mit den Kräften Q bezw. $Q_0$ die Keilbacken auseinander, so dass die Normalkraft Q den Weg $\sigma$ zurücklegt. Während des Vorrückens aber reibt sich die Keilbahn ac an der Backenbahn und zwar auf die Weglänge $\lambda$. Ist $\varphi$ der Reibungskoefficient, so ist die Reibungsarbeit $\varphi Q \lambda$; die Arbeiten der Kräfte P und Q sind Ps und $Q\sigma$. Auf jede Keilhälfte kommt aber die Kraft P/2, die Arbeitsgleichung für eine Keilhälfte ist sonach

(a) . . . . . . . $$\frac{P}{2} s = Q\sigma + Q\varphi\lambda.$$

Dividiert man durch s, so folgt

$$\frac{P}{2} = Q\left(\frac{\sigma}{s} + \varphi \frac{\lambda}{s}\right).$$

Nun ist $\frac{\sigma}{s} = \sin\frac{\vartheta}{2}$ und $\frac{\lambda}{s} = \cos\frac{\vartheta}{2}$, demnach wird

(b) . . . . . $$P = 2\,Q\left(\sin\frac{\vartheta}{2} + \varphi\cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

und wenn die Kraft P gegeben ist, folgt

$$Q = \frac{P}{2} \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2} + \varphi\cos\frac{\vartheta}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (168)$$

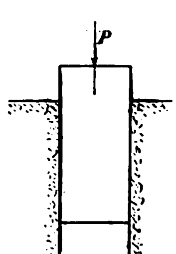
Ist keine Reibung vorhanden oder soll diese nicht beachtet werden, dann folgt für $\varphi = o$

$$Q = \frac{P}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (168\,a)$$

Je kleiner $\vartheta$, je spitzer der Keil, um so grösser wird Q, um so leistungsfähiger ist die Kraft P, ein spitzer Nagel dringt leichter ein als ein breiter.

Wenn $\frac{\vartheta}{2} = 90°$, dann muss $P = 2\,Q$ werden. Aus Gl. 168a folgt $P = 2\,Q\sin\frac{\vartheta}{2}$, je kleiner also $\vartheta$ um so weniger Kraft ist zum Vordringen des Keiles nötig, wird $\vartheta = o$, dann folgt auch $P = o$, d. h. wenn man von der Reibung absieht, so dringt ein solches Parallelpiped, Fig. 351, denn von einem Keil in obigem Sinn kann nicht mehr die Rede sein, von selbst durch sein eigenes Gewicht ein, es fällt zwischen den Backen hindurch. Nach Gl. 168 ist

Fig. 351.




$$P = 2\,Q\left(\sin\frac{\vartheta}{2} + \varphi\cos\frac{\vartheta}{2}\right) \text{ und für } \vartheta = o$$

$$P = 2\,Q\varphi.$$

P ist die erforderliche Reibung an den Seitenwänden in diesem Fall, welche das Parallelpiped noch hält.

Verlängert man Q bis zum Schnittpunkt in 0, so sind Q die Teilkräfte zur Resultante P. Der Winkel bei 0 ist

$$2\left(90 - \frac{\vartheta}{2}\right) = 180 - \vartheta.$$

Nach dem Cosinussatz ist dann (s. S. 64)

$$Q^2 = Q^2 + P^2 - 2\,PQ\cos\left(90 - \frac{\vartheta}{2}\right) \text{ woraus}$$

$$Q = \frac{P}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \text{ wie in Gl. 168a.}$$

Zerlegt man Q in die horizontale Kraft $Q_0$ und in eine Vertikale,

so ist die erstere

$$Q_0 = Q \cos\frac{\vartheta}{2}, \text{ woraus } Q = \frac{Q_0}{\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

in (b) eingeführt, ergiebt sich

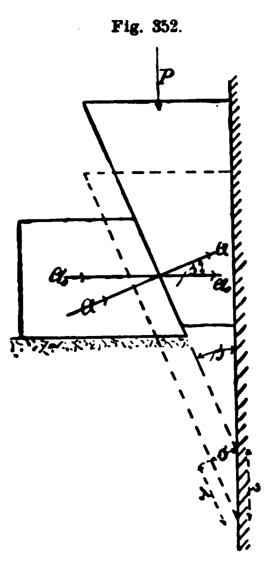
$$\text{(c)} \quad P = 2\frac{Q_0}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\left(\sin\frac{\vartheta}{2} + \varphi\cos\frac{\vartheta}{2}\right) = 2\,Q_0\,(\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} + \varphi).$$

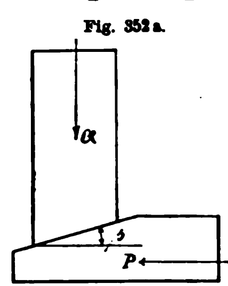
Hieraus wird die horizontale Keilkraft

$$\text{(169)} \quad Q_0 = \frac{P}{2(\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} + \varphi)}$$

und wenn $\varphi = o$, keine Reibung vorhanden ist,

$$\text{(169a)} \quad Q_0 = \frac{P}{2}\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}.$$


Fig. 352.


Fig. 352a.

In Fig. 352 soll die ganze Kraft P aufgewendet werden, um den Keilbacken seitlich zu schieben bezw. Fig. 352a hoch zu heben. Es ist hier auch wieder, wenn $\varphi$ und $\varphi_{,,}$ die Reibungskoefficienten an der schrägen und senkrechten Keilbahn $Ps = Q\sigma + Q\varphi\lambda + Q_0\varphi_{,,}s$ die Arbeitsgleichung, welche aus der Arbeit der Kraft P, des Keilbackens und der Reibungsarbeit der beiden Keilbahnen besteht.

Dividiert man durch s, so folgt

$$P = Q\frac{\sigma}{s} + Q\varphi\frac{\lambda}{s} + Q_0\varphi_{,,}.$$

Führt man die trigonometrischen Beziehungen

$$\frac{\sigma}{s} = \sin\beta, \frac{\lambda}{s} = \cos\beta$$

und aus der Figur ersichtlich $Q_0 = Q\cos\beta$ ein, so erhält man zunächst

$$P = Q\sin\beta + Q\varphi\cos\beta + Q\varphi_{,,}\cos\beta \text{ oder}$$

$$\text{(170)} \quad P = Q[\sin\beta + \cos\beta(\varphi + \varphi_{,,})],$$

woraus

$$\text{(170a)} \quad Q = \frac{P}{\sin\beta + \cos\beta(\varphi + \varphi_{,,})}.$$

Setzt man $Q = \frac{Q_0}{\cos\beta}$ in Gl. 170 ein, so folgt

$$P = Q_0 (\text{tang}\,\beta + \varphi + \varphi_{,,}) \text{ und}$$

$$Q_0 = \frac{P}{\text{tang}\,\beta + \varphi + \varphi_{,,}} \quad \ldots\ldots \quad (170\text{b})$$

Ohne Rücksicht auf die Reibung ist

$$Q = \frac{P}{\sin\beta} \text{ und } Q_0 = P \cot g\,\beta. \quad \ldots\ldots \quad (170\text{c})$$

**Beispiel I.** Ein Holzkeil wird mit einer Kraft von $P = 1000$ eingetrieben; wenn $\mathfrak{Z} = 29°$, dann ist nach Gl. 168a die Kraft Q auf jeder Seite

$$Q = \frac{1000}{2 \sin 14° 30'} = \frac{1000}{2 \cdot 0{,}25} = 2000 \text{ Klg., beiderseitig } 4000 \text{ Klg.}$$

Nimmt man $\varphi = 0{,}54$ als Reibungskoefficient an, so folgt Gl. 168

$$Q = \frac{1000}{2\,(0{,}25 + 0{,}54 \cos 14° 30')} = 652 \text{ Klg., beiderseitig } 1304 \text{ Klg.}$$

**II.** Ein Gewicht $Q_0 = 600$ Klg. benötigt zum senkrechten Heben bei $\beta = 14°$ eine Keilkraft nach Gl. 170c,

$$P = \frac{Q_0}{\cot g\,\beta} = 600 \cdot \text{tang}\,\beta = 600 \cdot 0{,}249 = 150 \text{ Klg.}$$

Hat der Keil eine Reibung zu überwinden, deren Koefficienten $\varphi = \varphi_{,,} = 0{,}14$ sein mögen, dann folgt nach Gl. 170b die Keilkraft, eiserne Keile vorausgesetzt

$$P = 600\,(0{,}249 + 0{,}28) = 600 \cdot 0{,}329 = 196 \text{ Klg.}$$

---

## Die Stosskräfte.

Ein Stoss entsteht, wenn ein Körper in seiner Bewegung plötzlich unterbrochen wird, seine Bewegung also nicht fortsetzen kann; der Druck, welcher in diesem Augenblick von dem stossenden Körper ausgeübt wird, ist die Stosskraft. Der gestossene Körper nimmt hierbei Kraft in sich auf, wodurch seine Ruhe in Bewegung, ev. seine Bewegung in eine andere übergeht, der stossende Körper wird hierbei selbst in seiner Bewegung beeinflusst, da er einen Teil seiner ursprünglichen Kraft verloren hat. Die Beschaffenheit der Materie der stossenden Körper wirkt hierbei entscheidend.

Ist die eine Masse oder sind beide stossende Massen weich, nicht widerstandstähig genug, haften die einzelnen Körperelemente weniger fest

aneinander, so dringt der eine Körper eventuell in den anderen ein, es treten Veränderungen der Materien selbst ein, wohl gar vollkommene Zerstörungen. Wurden solche beabsichtigt, dann war der Stoss nützlich, im andern Fall natürlich schädlich und ist es eben erforderlich, die Kräfte und Geschwindigkeiten zu bestimmen, um die Nützlichkeit bezw. Schädlichkeit vorher beurteilen zu können.

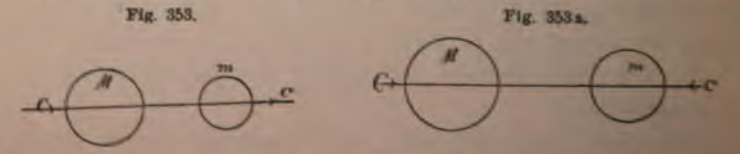
Sind die stossenden Körper aber so beschaffen, dass nach dem Stoss sich geringe, nichts sagende, oder kaum bemerkbare Veränderungen auf der Oberfläche zeigen und infolge des Stosses die Körper ihre Oberfläche kaum ändern oder nicht mehr ganz in ihre ursprüngliche Gestalt zurückkehren, dann ist der Stoss unelastisch, die Körper sind hart. Sie werden nach dem Stoss gemeinschaftlich als eine Masse, ein Körper, ihre veränderten Bewegungen fortsetzen oder stehen bleiben.

Treten aber Veränderungen auf einem der beiden stossenden Körper, oder auf beiden derart ein, dass sich die Oberflächen wie Federn verhalten, welche zusammengedrückt, wieder auseinander gehen, so werden die stossenden Körper zwar in ihrer Gestalt verändert, aber da sie wieder in ihre ursprüngliche Gestalt, um den Ausdruck zu gebrauchen, zurückschnellen, so sind durch den Stoss den Körpern innere Kräfte zugeteilt, vermöge deren sie imstande sind, rückwirkend sich zu äussern, der Stoss war elastisch, da es die Körper selbst sind. Nach dem Stoss werden sie sich wieder gegenseitig auseinander treiben.

Bemerkung. Infolge des Stosses tritt aber auch eine momentane Temperaturveränderung in den Körpern ein, auf die wir aber keine Rücksicht nehmen wollen. Ein mit einem Hammer eingetriebener Nagel wird warm, eine Flintenkugel ebenso, wenn sie in Holz, Eisen oder in ein anderes Material eindringt, die Wärme teilt sich dem Material mit. Die in der atmosphärischen Luft eingehüllte sich bewegende Erde würde, wenn sie plötzlich durch einen Weltkörper in ihrer Bewegung verändert würde, an der viel nachgiebigeren Luftmasse ein Hindernis finden, und ihre Temperatur zu unserem Nutzen oder Schaden verändern. —

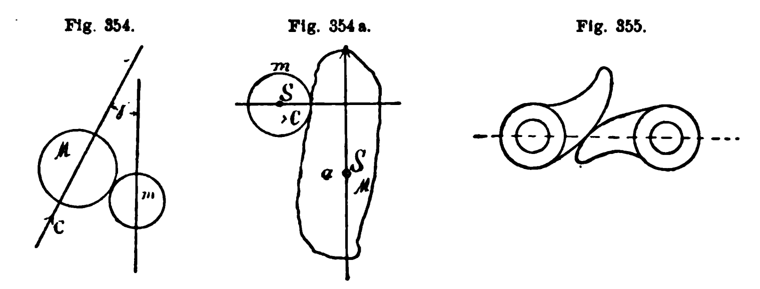
Bewegen sich die Körper entgegenstossend oder aufeinander folgend in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte, so ist der Stoss central,

Fig. 353. Fig. 353a.




gerade, centrisch, Fig. 353. Bilden die Bewegungsrichtungen einen

Winkel miteinander, Fig. 354, dann ist der Stoss schief. Liegt der Schwerpunkt der Körper ausserhalb der Stosslinie, Fig. 354a, dann ist der Stoss excentrisch. Endlich können sich die Massen vollkommen frei, Stoss




freier Körper, bewegen oder die Körper können teilweise oder ganz unterstützt sein und stossend aufeinander einwirken, Fig. 355, excentrisch schiefer Stoss.

Auf besondere praktische Anwendungen werden wir erst später zurückkommen und begnügen uns an dieser Stelle mit der Entwickelung der Hauptgrundsätze.

## 1. Stoss unelastischer Körper.

Bewegen sich zwei Massen M, m mit den Geschwindigkeiten C und c gegeneinander, Fig. 353a, und zwar central in den Schwerpunktsrichtungen, so leisten sie die Arbeiten MC und mc Klgm. Sind beide Arbeiten in jeder Sekunde gleich $MC = mc$, dann ist der Zusammenstoss wirkungslos, beide bringen sich gegenseitig zum Stillstand. Ist aber die Arbeit MC grösser als mc, und stösst M auf m, so geht die überschüssige Arbeit $MC - mc$ auf beide Massen über, welche jetzt gleichsam zu einer Masse $M + m$ vereinigt, mit der Geschwindigkeit v sich weiter bewegt, und hierbei die Arbeit $v\,(M + m)$ verrichten kann. Es muss also Gleichgewicht eintreten, wenn die Arbeit $MC - mc$ an $v\,(M + m)$ abgegeben ist; da keine Arbeit verloren gehen kann, so folgt

$$v\,(M + m) = MC - mc$$

und die Geschwindigkeit v hieraus, mit der sich beide Massen vereint nach dem Stoss weiter bewegen,

$$v = \frac{MC - mc}{M + m} \quad \ldots\ldots \quad (171)$$

Die Bewegungsrichtung der grösseren Geschwindigkeit C ist massgebend.

Folgen beide Massen aufeinander, Fig. 353, so muss, weil wir $C > c$ annehmen, die Masse M die andere m überholen, sie stossen zusammen, ihre Arbeiten MC und mc vereinigen sich zu $MC + mc$. Sie bewegen sich jetzt wieder nach der Bewegungsrichtung der Geschwindigkeit C mit der Geschwindigkeit v weiter als eine vereinigte Masse $M + m$, welche die Leistungsfähigkeit $(M + m)v$ besitzt. Die Arbeitsgleichung ist dann $(M + m)v = MC + mc$, woraus die Geschwindigkeit nach dem Stoss

(171a) . . . . . . $$v = \frac{MC + mc}{M + m}.$$

War die Masse m in Ruhe, also $c = o$, dann ist natürlich in beiden Fällen

(171b) . . . . . . . . $$v = \frac{MC}{M + m}.$$

Aus Gl. 171 findet sich, wenn man die Glieder mit M und m zusammenzieht,

(a) . . . . . . . $m(v + c) = M(C - v)$.

Nach dem Zusammenstoss hat also M an Geschwindigkeit verloren. Während diese Masse vorher die Arbeit MC leisten konnte, ist sie jetzt nur noch fähig, die Arbeit zu leisten $M(C - v)$, denn von ihrer Geschwindigkeit C kommt v in Abzug. m hingegen gewinnt durch den Zusammenstoss. Die Geschwindigkeit dieser Masse c hat um v zugenommen gerade soviel, als C abgenommen hat an Geschwindigkeit; und Stossverluste sind keine vorhanden.

Löst man Gl. 171a in demselben Sinne auf, so erhält man

(b) . . . . . . . $m(v - c) = M(C - v)$.

Die Masse M hat hier auch wieder einen Teil ihrer Arbeit abgegeben Mv, den Gewinn übernimmt die Masse m, denn mv muss immer grösser werden als mc, weil sonst die linke Seite der Gleichung negativ werden würde und der Verlust der Geschwindigkeit C nicht an m übergehen könnte.

**Beispiel I.** Es sei $M = 24$, $m = 8$, $C = 16$ und $c = 6$.

Die Massen M und m (oder Gewichte Mg und mg) stossen aufeinander; ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach der Bewegungsrichtung C ist Gl. 171

$$v = \frac{MC - mc}{M + m} = \frac{16 \cdot 24 - 6 \cdot 8}{24 + 8} = 10^1/_2{}^m.$$

Die Masse M hat also $16 - 10{,}5 = 5{,}5^m$ Geschwindigkeitsverlust, und m hat soviel an Geschwindigkeit gewonnen, somit an Wirkungsgrösse. Der Arbeitsverlust $M \cdot 5{,}5 = 24 \cdot 5{,}5 = 132$ Klgm. kommt der Masse m

zu gute, denn nach Gl. (a) ist

$$m(v + c) = 8 \cdot (10,5 + 6) = 16,5 \cdot 8 = 132 \text{ Klgm.},$$

also der Gewinn an Arbeit $132 - mc = 132 - 8 \cdot 6 = 84$ Klgm.

**II.** Folgen beide Massen einander in centraler Richtung, so ist nach Gl. 171a

$$v = \frac{MC + cm}{M + m} = \frac{16 \cdot 24 + 6 \cdot 8}{24 + 8} = 13,5^m.$$

Die Geschwindigkeit nach dem Stoss wird grösser wie oben, der Verlust ein geringerer, weil die Massen nicht gegeneinander einwirken. Die stossende Masse M, mit der Geschwindigkeit von $16^m$ verliert, weil sie die andere Masse mit sich reissen muss. Der Geschwindigkeitsverlust ist jetzt nur $C - v = 16 - 13,5 = 2,5^m$, also $3^m$ geringer wie oben, darum laufen die Massen nach dem Stoss schneller wie oben. Nach Gl. b ist $8(13,5 - 6) = 24(16 - 13^1/_2)$ oder $8 \cdot 7,5 = 24 \cdot 2,5$.

Die Masse $m = 8$ bewegt sich jetzt mit $7^1/_2{}^m$ Geschwindigkeit mehr als vor dem Stoss.

Der Arbeitsverlust des Stosses $24 \cdot 2,5 = 8 \cdot 7,5 = 60$ Klgm. ist jetzt geringer wie oben, um $132 - 60 = 72$ Klgm.

**III.** Ist m in Ruhe, dann ist die Geschwindigkeit nach dem Stoss Gl. 171b

$$v = \frac{MC}{M + m} = \frac{24 \cdot 16}{24 + 8} = 12^m.$$

M hat jetzt $4^m$ an Geschwindigkeit eingebüsst; beide Massen bewegen sich mit $12^m$ Geschwindigkeit weiter. Die früher ruhende Masse m hat die Arbeit $4 \cdot 24 = 96$ Klgm. übernommen, und bewegt sich jetzt mit der Geschwindigkeit $v = 12^m$, kann also die Arbeit leisten $8 \cdot 12 = 96$ Klgm., wenn wir die Massen unmittelbar als Gewichte auffassen. —

Setzt man in die Gl. a und b für v die Beziehungen 171 und 171a ein, so erhält man den Stoss-Gewinn oder -Verlust $S = M(C - v)$ bei Gegenstoss

$$S = M\left(C - \frac{CM - cm}{M + m}\right) = \frac{Mm}{M + m}(C + c) \quad . \quad (172)$$

bei gleichgerichtetem Stoss

$$S = M\left(C - \frac{CM + cm}{M + m}\right) = \frac{Mm}{M + m}(C - c). \qquad (172a)$$

Für obiges Beispiel ist wie uns schon bekannt

$$S = \frac{Mm}{M + m}(C + c) = \frac{24 \cdot 8}{24 + 8}(16 + 6) = 132 \text{ Klgm.; bezw.}$$

$$S = \frac{Mm}{M + m}(C - c) = \frac{24 \cdot 8}{24 + 8}(16 - 6) = 60 \text{ Klgm.}$$

Man nennt den Ausdruck $\frac{Mm}{M+m}$ das harmonische Mittel.

Stösst eine sehr grosse Masse M mit einer ruhenden sehr kleinen zusammen, dann wird in der Geschwindigkeit der grossen Masse wenig oder gar nichts geändert, der Einfluss der kleinen Masse ist Null. Stösst z. B. eine schwere eiserne Kugel gegen eine Erbse, so rollt die Kugel nach dem Zusammenstoss mit kaum veränderter Geschwindigkeit weiter. Denn Gl. 171b lässt sich auch schreiben

$$v = \frac{MC}{M+m} = \frac{C}{1+\frac{m}{M}}.$$

Ist jetzt M sehr gross gegen m, so kann man $\frac{m}{M}$ nahe Null annehmen und findet $v = C$. Ist hingegen M sehr klein gegen m, so wird das Produkt MC nahe Null, somit $v = o$.

Stösst die Erbse gegen die ruhende eiserne schwere Kugel, so bleiben sie beide liegen; die Masse der Kugel nimmt den ganzen Stoss in sich auf, ohne sich zu rühren.

Sind die Geschwindigkeiten oder Massen gleich, dann vereinfachen sich die Ausdrücke in leicht zu übersehender Form.

---

## 2. Stoss elastischer Körper.

Stossen zwei elastische Massen mit den resp. Geschwindigkeiten C und c aufeinander, so ändern sie im Augenblick des Stosses ihre Gestalt. Die Stossflächen werden zusammengepresst wie ein Gummiball, und schnellen im nächsten Augenblick wieder in ihre ursprüngliche Gestalt zurück. Wir wollen annehmen, dass $MC > mc$ und dass der Stoss central ist.

Setzen wir zunächst Gegenstoss voraus, und betrachten die beiden Körper in dem Augenblick des grössten Zusammenstosses, in welchem die Stosskraft die Körper bis zum Äussersten zusammengedrückt hat, so bilden sie jetzt zwei harte Körper, ihre Geschwindigkeit müsste sein

$$v_x = \frac{MC - mc}{M+m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Die Masse M hat nun durch den Stoss an Geschwindigkeit $(C - v_x)$ verloren, denn sie wurde in ihrer Bewegung von der Masse m aufgehalten. Würden die Massen im Augenblick des Stosses stehen bleiben, so würde

M mit der Geschwindigkeit $C - v_x$ vermöge ihrer Federkraft zurückschnellen von m, yen m zurückgestossen werden, da beide Arbeiten im Augenblick gleich sind; da sie aber selbst im Begriff steht sich mit $v_x$ nach ihrer Bewegungsrichtung C zu bewegen, so kann sie nur mit der Differenzgeschwindigkeit

$$u_x = v_x - (C - v_x) = 2\,v_x - C \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

von m abstossen (zurückfahren).

Die Masse m hingegen hat an Geschwindigkeit zugenommen $v_x + c$. Die zusammengedrückten Teile dehnen sich wieder aus im Augenblick des Stosses und die Masse m schnellt von der Masse M zurück mit der Geschwindigkeit $v_x + c$, vorausgesetzt, dass M in Ruhe wäre; aber m bewegt sich selbst mit M mit der Geschwindigkeit $v_x$ und zwar entgegengesetzt der Geschwindigkeitsrichtung C, somit erhält m eine doppelte Bewegung durch die Federkraft $v_x$ und $v_x + c$, es wird die Geschwindigkeit von m nach dem Stoss

$$u_y = v_x + (c + v_x) = 2v_x + c \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

Setzt man (c) in (d) und (e) ein, so erhält man die Geschwindigkeit der Masse M nach dem Stoss:

$$u_x = 2\,\frac{MC - mc}{M + m} - C = \frac{2MC - 2mc - CM - Cm}{M + m} \text{ oder}$$

$$\mathbf{u_x = \frac{C(M - m) - 2mc}{M + m} = \frac{MC - m(2c + C)}{M + m}} \quad . \ . \quad \mathbf{(173)}$$

Die Geschwindigkeit der Masse m nach dem Stoss ist

$$u_y = 2\,\frac{MC - mc}{M + m} + c = \frac{2\,MC - 2mc + Mc + mc}{M + m}, \text{ oder}$$

$$\mathbf{u_y = \frac{2MC + c(M - m)}{M + m} = \frac{-mc + M(2C + c)}{M + m}} \quad . \ \mathbf{(173a)}$$

Folgen sich die Körper bei gleichgerichtetem Stoss, so erhalten wir ähnliche Verhältnisse.

Die Massen haben im Augenblick des Stosses nach der grössten Zusammendrückung die Geschwindigkeit, Gl. 171a,

$$v_x = \frac{MC + mc}{M + m} \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

Die Masse M hat an Geschwindigkeit wieder $C - v_x$ verloren. Infolge ihres zusammengedrückten Zustandes würde sie bei ruhendem Zustand mit der Geschwindigkeit $C - v_x$ zurückgetrieben werden, sie hat aber selbst nach ihrer Bewegungsrichtung die Geschwindigkeit $v_x$, somit ist ihre Geschwindigkeit, mit der sie von m abstösst, wieder

$$w_x = v_x - (C - v_x) = 2\,v_x - C \quad \ldots\ldots \quad (g)$$

Die Masse m hat an Geschwindigkeit gewonnen, Gl. b, und zwar $v_x - c$. Sie bewegt sich jetzt in gleicher Richtung mit C, entgegengesetzt der obigen Annahme. Im Augenblick der grössten Federkraft würde sie diese mit $v_x - c$ zurücktreiben, da sie aber selbst mit $v_x$ Geschwindigkeit nach C zu sich bewegt, so erhält sie durch den Stoss eine doppelte Geschwindigkeit

(h) . . . . . . $w_y = v_x + (v_x - c) = 2\,v_x - c.$

Setzt man in (g) und (h) die Beziehung (f), so erhält man die Geschwindigkeit der Masse M nach dem Stoss

(174) . $$w_x = \frac{C(M-m) + 2mc}{M+m} = \frac{MC + m(2c - C)}{M+m};$$

die Geschwindigkeit der Masse m nach dem Stoss

(174a) . $$w_y = \frac{2MC - c(M-m)}{M+m} = \frac{mc + M(2C - c)}{M+m}.$$

Ist m in Ruhe, also $c = 0$, so folgt

(175) . . . . . $$\begin{cases} u_x = w_x = \dfrac{C(M-m)}{M+m} \\ u_y = w_y = \dfrac{2\,MC}{M+m}. \end{cases}$$

Sind beide Massen gleich, $M = M$, so erhält man bei centraler Gegenbewegung der Massen nach Gl. 173 die Geschwindigkeit der Masse M

$$u_x = \frac{2\,mc}{2\,m} = -c$$

und die der Masse m

$$u_y = \frac{2\,MC}{2\,M} = +C.$$

Das heisst die Masse m übernimmt die Geschwindigkeit der Masse M und ihre Bewegungsrichtung, oder fliegt mit $C^m$ Geschwindigkeit zurück; hingegen die Masse M fliegt mit $c^m$ Geschwindigkeit, der Geschwindigkeit der Masse m zurück nach dem Zusammenstoss.

Gleiche elastische Körper, welche sich central begegnen, kehren mit wechselnden Geschwindigkeiten ihre Bewegungsrichtungen um.

Folgen sich gleiche Massen central, dann wird nach Gl. 174 die Geschwindigkeit der Masse M

$$w_x = \frac{+\,2\,mc}{2\,m} = +c,$$

und die der Masse m

$$w_y = \frac{2\,MC}{2\,M} = +C.$$

Das heisst beide Massen bewegen sich nach gleicher Richtung mit wechselnden Geschwindigkeiten.

Ist die Masse m in Ruhe, so folgt nach Gl. 175, wenn beide Massen gleich schwer sind

$$u_x = 0 = w_x \text{ und } u_y = w_y = C.$$

Das heisst, dann bleibt die stossende Masse stehen und die früher ruhende übernimmt die Geschwindigkeit der stossenden Masse.

Zwei Billardkugeln eignen sich ganz vorzüglich, um diese sämtlichen Sätze der gleichen Massen aus der Anschauung nachzuweisen.

Fig. 356.

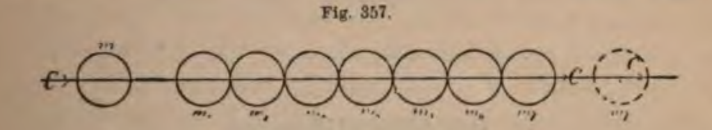


Stösst man die Kugel m auf die ruhende $m_1$, so stellt sich m vor $m_1$ und $m_1$ läuft mit $C^m$ Geschwindigkeit weiter, Fig. 356.

Stösst man $m_1$ central gegen m, so dass m und $m_1$ mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich begegnen, so wechseln sie ihre Geschwindigkeiten in umgekehrter Richtung.

Soll in Fig. 356, wenn die Kugel $m_1$ ruht, m dennoch zurücklaufen, so muss man bekanntlich tief stossen (recoussée), damit die Kugel eine

Fig. 357.



entgegengesetzte Rotation erhält; beim Hochstoss auf m läuft diese Kugel der andern $m_1$ nach.

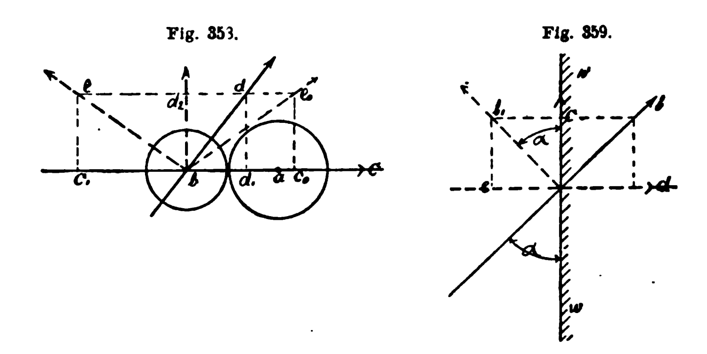
Stellt man mehrere gleich grosse Kugeln in einer Linie hintereinander, Fig. 357, $m_1$ bis $m_7$ und stösst mit der Kugel m central auf die erste $m_1$, so überträgt sich der Stoss von einer Kugel zur andern, sie bleiben alle in Ruhe bis auf die letzte $m_7$, welche mit der Geschwindigkeit C von m abgestossen wird, während m selbst vor $m_1$ stehen bleibt.

Auf den schiefen Stoss und die anderen Stossarten wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen, wir begnügen uns mit den in den Fig. 358 und 359 gezeichneten Andeutungen, einen elastischen Stoss zu Grunde gelegt.

Die Kugel a habe die Geschwindigkeit $\overline{ac}$, auf dieselbe stösst b in der Richtung bd mit der Geschwindigkeit $\overline{bd}$.

Zerlegen wir bd in $bd_1$ und $bd_2$, so bilden $bd_1$ und ac einen Centralstoss, a läuft weiter mit der Geschwindigkeit $bd_1$; b aber läuft weiter mit der Geschwindigkeit $be_1$, die resultiert aus $bc_0 = ac$ und $bd_2$.

Fig. 353. Fig. 359.



Würde a mit der Geschwindigkeit ac entgegenstossen, dann übernimmt a die Teilgeschwindigkeit $bd_1$ und läuft damit zurück, b läuft nach be, welche resultiert aus $-ac = bc_1$ und $bd_2$.

In Fig. 359 ist ww eine feststehende Wand, die Geschwindigkeit der Kugel a, ab, zerlegt sich in ad und ac; a schlägt mit der Geschwindigkeit $ad = ae$ zurück und gelangt nach $ab_1$, welche resultiert aus ae und ac. Die beiden Winkel $\alpha$ und $\alpha_1$ sind abgesehen von allen Nebenhindernissen gleich, da sie symmetrisch liegen müssen.

---

## Die Stosswirkungen.

Im Vorhergehenden interessierten wir uns besonders für die Geschwindigkeitsverhältnisse nach dem Stoss, und beim schiefen Stoss deuteten wir auch die etwaigen Richtungen an, die der Körper nach dem Stoss nehmen wird.

Auf die Nützlichkeit und Schädlichkeit des Stosses konnten wir bisher noch keine Rücksicht nehmen, weil wir uns noch wenig über die Wirkung der Stosskräfte klar waren. Ob der Stoss nützlich oder schädlich ist, bleibt sich für die Wirkung gleich. In beiden Fällen ist es von Wichtigkeit für uns die Wirkung zu kennen, um sie bei der Nützlichkeit des Stosses zu unterstützen und bei der Schädlichkeit den Stoss durch geeignete Massregeln zu verhindern zu suchen. In den meisten Fällen sind wir gar nicht in der Lage die Stosskräfte ermitteln zu können, die

Anhaltepunkte entgehen uns; die Stosswirkung muss mit in den Kauf genommen werden, ihre Indensität taxieren wir, die Empirik, die Erfahrung zeigt uns dann, ob wir in den Anwendungen das richtige getroffen haben, ob die beobachteten sogenannten empirischen Koefficienten für alle Fälle genügen, oder nach weiteren Erfahrungen erneuert werden müssen.

Selbst wenn wir uns über die Wirkungen des Stosses in allen Fällen klar wären, so sind diese aber so sehr specialisiert, in den einzelnen Fällen der Anwendung, und hängen so viele Elemente in den besonderen Fällen davon ab, dass wir auf eine nähere detaillierte Betrachtung an dieser Stelle verzichten müssen. Im allgemeinen können wir wohl den Satz aufstellen, dass der elastische Stoss stets günstiger, willkommener ist, als der unelastische. Beim ersteren weichen die stossenden Körper zurück oder entfernen sich voneinander, die veränderte Körpergestalt sucht ihre frühere Form wieder auf; die stossenden Körper werden nachgiebiger, wenn sie elastisch sind oder so konstruiert, eingerichtet werden, wenn es sich vereinbaren lässt; wie viele derartige Beispiele bietet uns die Natur selbst; in erster Linie unser Körper, die gasförmigen Körper, die Luft u. a. sind zu unserem Vorteil sämtlich elastisch. Starke Stösse und Schläge vermindern wir durch Holzeinlagen, Federn, überhaupt elastische Körper. Gegen den Stoss können wir uns aber auch schützen durch starke Massen, die den Stoss in sich aufnehmen.

Ein Schlag mit einem Hammer auf die Hand oder das Bein dürfte immerhin fühlbarer sein, als wenn man den Schlag erst durch eine grosse Holz-, Eisen- oder Steinmasse auffangen lässt; wir führten oben schon als ein derartiges extremes Beispiel die Bewegung einer Erbse gegen eine eiserne schwere Kugel an. Die Arbeit, die Masse der Erbse mal ihrem Weg, nimmt die schwere Kugel auf, weil sie infolge ihrer schweren oder grossen Masse, der Erbse gegenüber, einen unendlich kleinen Weg, der gar nicht fühlbar ist, zurückzulegen hätte, der eigentliche Stoss- oder Schlagdruck wird also dann auf das Minimum reduciert.

Setzen wir unelastische Körper voraus, dann ist bei centraler Bewegung nach Gl. 171 und 171a die Geschwindigkeit beider nach dem Stoss

$$v = \frac{MC \mp mc}{M + m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

Vor dem Stoss hatten beide Massen die lebendige Kraft $\frac{MC^2}{2}$ und $\frac{mc^2}{2}$, nach dem Stoss ist diese $\frac{Mv^2}{2}$ und $\frac{mv^2}{2}$.

Infolge des Stosses haben beide Massen an Arbeit geleistet die lebendige Kraft, welche der Differenz der obigen vor und nach dem Stoss entspricht

$$A = \frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2} - \left(\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right).$$

Setzt man Gl. (i) ein, so findet man nach entsprechender Reduktion

(176) . . . . . $$A = \frac{Mm}{2(M+m)}(C \pm c)^2.$$

Hierin gilt das obere Zeichen für Gegenstoss, das untere, wenn sich die Körper einander folgen.

Nennt man Q und q die Gewichte der Körper, deren Geschwindigkeiten vor dem Stoss also C und c sind, so wird $Q = Mg$ und $q = mg$ eingesetzt, die Stosswirkung oder Stossarbeit

(176a) . . . . . $$A = \frac{Qq}{2(Q+q)g}(C \pm c)^2.$$

Ist die eine Masse in Ruhe, $C = 0$ beispielsweise, dann ist die Stossarbeit

(176b) . . $$A = \frac{Qq}{2g(Q+q)}c^2 = \frac{Qq}{Q+q}\frac{c^2}{2g} = \frac{Qq}{Q+q}h,$$

wenn h die Fallhöhe der Geschwindigkeit c entsprechend.

Kann oder will man die eine Masse der andern gegenüber in diesem Fall vernachlässigen, so wird zunächst

$$A = \frac{Qqh}{q\left(\frac{Q}{q}+1\right)},$$

woraus, wenn q gegenüber Q sehr gross allerdings annähernd

(176c) . . . . . . . $$A = Q\frac{c^2}{2g} = Qh.$$

**Beispiel I.** Stossen zwei Wagen von $Q = 6000$ und $q = 4000$ Klg. Gewicht gegeneinander mit den Geschwindigkeiten $C = 6^m$ und $c = 5^m$, dann ist die Stossarbeit nach Gl. 176a

$$A = \frac{6000 \cdot 4000}{2 \cdot 9.81 \cdot 10000}(6-5)^2 = 14762 \text{ Klgm.}$$

Würde diese Arbeit in einer Sekunde geleistet werden, dann entspräche sie

$$N = \frac{14762}{75} = 197 \text{ PS}.$$

Folgen sich beide Wagen, dann wird der Stoss bedeutend abgeschwächt, er beträgt dann nur noch

$$A = \frac{6000 \cdot 4000}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10000} (6 - 5)^2 = 122 \text{ Klgm.}$$

Ist $C = c$, dann findet überhaupt kein Stoss statt.

Befindet sich die eine Masse in Ruhe $C = 0$, so ist die fragliche Stossarbeit nach Gl. 176b

$$A = \frac{6000 \cdot 4000}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10000} 25 = 3060 \text{ Klgm.}$$

Aus diesen einfachen Fällen lässt sich wohl schon folgern, was für gewaltige Arbeiten der Stoss grösserer Massen ausführen kann. Selbst kleine Massen oder kleine Geschwindigkeiten absorbieren in ihren Stosswirkungen, namentlich wenn sie sich immer wiederholen, ein oft nennenswertes Arbeitsquantum auf Kosten der Betriebskraft.

**II.** Folgen sich zwei gleiche Massen einander in irgend einem sich drehenden oder fortschreitenden Maschinenteil mit gleicher Geschwindigkeit $C = c = 4^m$, lässt aber ab und zu die eine oder andere Masse nach oder nimmt die andere an Geschwindigkeit zu um $1^{ctm}$, dann ist die jedesmalige Stossarbeit

$$A = \frac{Q^2}{2g \cdot 2Q} (4{,}01 - 4)^2 = \frac{Q}{400000} \text{ Klgm. oder}$$

$$A = \frac{Q}{400} \text{ Klg}^{mm}.$$

Würde $Q = 4000$ Klg. sein, dann wäre jedesmal $A = 10$ Klg$^{mm}$; sie würde beispielsweise einer Leistung entsprechen von $^1/_5$ Pfd., welches $100^{mm}$ tief fällt.

**III.** Will man mit einem Hammer von $Q = 2$ Klg. Gewicht einen Nagel eintreiben, dessen Gewicht nicht in Betracht kommt, und schlägt man mit $c = 5^m$ Geschwindigkeit, so ist nach Gl. 176c die Stossarbeit

$$A = \frac{5^2}{2 \cdot 9{,}81} 2 = 2^1/_2 \text{ Klgm. abg.}$$

Dringt der Nagel bei einem Schlage $s = 5^{mm}$ ein, dann ist der Stossdruck

$$P = \frac{2{,}5}{s} = \frac{2{,}5}{0{,}005} = 500 \text{ Klg.}$$

Dasselbe kann man leisten, wenn das Hammergewicht $h = 1{,}3^m$ herunterfällt, weil $c = \sqrt{2\,g \cdot 1{,}3} = \sqrt{25{,}5} = 5^m$ abg.

**IV.** Um einen Pfahl*), dessen Gewicht nicht in Betracht kommt, einzutreiben mit einen Rammbär von Q = 500 Klg., welcher h = 6$^m$ hoch fällt, ist eine Arbeitsleistung erforderlich

$$A = Qh = 500 \cdot 6 = 3000 \text{ Klg.}$$

Sollte der Pfahl jedesmal 0,25$^m$ eindringen, dann ist

$$P = \frac{3000}{0{,}25} = 12000 \text{ Klg.}$$

---

*) Über Rammmaschinen s. d. Anwendungen.

# I. Tabelle der 2. und 3. Potenzen und Wurzeln, Reciproken, Kreisumfänge und Inhalte und der Logarithmen.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $\log n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1/12$ = 0,083333 | 0,00694 | 0,00058 | 0,28868 | 0,43679 | 12,00000 | 0,2618 | 0,00545 | 0,92082 — 2 |
| $5/12$ = 0,416667 | 0,17360 | 0,07234 | 0,64550 | 0,74690 | 2,40000 | 1,3090 | 0,13636 | 0,61979 — 1 |
| $7/12$ = 0,583333 | 0,34028 | 0,19849 | 0,76377 | 0,83555 | 1,71429 | 1,8326 | 0,26787 | 0,76592 — 1 |
| $1/10$ = 0,100000 | 0,01000 | 0,00100 | 0,31623 | 0,46416 | 10,00000 | 0,3142 | 0,00785 | 0,00000 — 1 |
| $3/10$ = 0,300000 | 0,09000 | 0,02700 | 0,54899 | 0,66943 | 3,33333 | 0,9425 | 0,06858 | 0,47712 — 1 |
| $7/10$ = 0,700000 | 0,49000 | 0,34300 | 0,83666 | 0,86769 | 1,42857 | 2,1991 | 0,38485 | 0,84510 — 1 |
| $9/10$ = 0,900000 | 0,81000 | 0,72900 | 0,94869 | 0,96325 | 1,11111 | 2,8274 | 0,63617 | 0,95424 — 1 |
| $1/9$ = 0,111111 | 0,01235 | 0,00137 | 0,33333 | 0,48075 | 9,00000 | 0,3491 | 0,09696 | 0,04576 — 1 |
| $2/9$ = 0,222222 | 0,04938 | 0,01098 | 0,47141 | 0,60571 | 4,50000 | 0,6981 | 0,03879 | 0,34679 — 1 |
| $4/9$ = 0,444444 | 0,19753 | 0,08779 | 0,66667 | 0,76314 | 2,25000 | 1,3963 | 0,15514 | 0,64782 — 1 |
| $5/9$ = 0,555556 | 0,30864 | 0,17147 | 0,74536 | 0,82206 | 1,80000 | 1,7453 | 0,24241 | 0,74473 — 1 |
| $7/9$ = 0,777778 | 0,60494 | 0,47051 | 0,88192 | 0,91964 | 1,28571 | 2,4434 | 0,47512 | 0,89086 — 1 |
| $8/9$ = 0,888889 | 0,79012 | 0,70233 | 0,94281 | 0,96150 | 1,12500 | 2,7925 | 0,62056 | 0,94885 — 1 |
| $1/8$ = 0,125000 | 0,01563 | 0,00195 | 0,36179 | 0,50000 | 8,00000 | 0,3927 | 0,01227 | 0,09691 — 1 |
| $3/8$ = 0,375000 | 0,14063 | 0,05273 | 0,61237 | 0,68867 | 2,66667 | 1,1781 | 0,11045 | 0,57403 — 1 |
| $5/8$ = 0,625000 | 0,39063 | 0,24414 | 0,79057 | 0,85499 | 1,60000 | 1,9635 | 0,30680 | 0,79588 — 1 |
| $7/8$ = 0,875000 | 0,76563 | 0,66992 | 0,93541 | 0,95647 | 1,14286 | 2,7489 | 0,60132 | 0,94201 — 1 |
| $1/7$ = 0,142857 | 0,02041 | 0,00292 | 0,37796 | 0,52276 | 7,00000 | 0,4488 | 0,01603 | 0,15490 — 1 |
| $2/7$ = 0,285714 | 0,08168 | 0,02332 | 0,53576 | 0,65964 | 3,50000 | 0,8976 | 0,06471 | 0,45793 — 1 |
| $3/7$ = 0,428571 | 0,18367 | 0,07871 | 0,65465 | 0,75395 | 2,33333 | 1,3464 | 0,14426 | 0,63202 — 1 |
| $4/7$ = 0,571428 | 0,32653 | 0,18659 | 0,75593 | 0,82983 | 1,75000 | 1,7952 | 0,25646 | 0,75696 — 1 |
| $5/7$ = 0,714285 | 0,51020 | 0,36443 | 0,84516 | 0,89391 | 1,40000 | 2,2440 | 0,40071 | 0,85387 — 1 |
| $6/7$ = 0,857142 | 0,73469 | 0,62974 | 0,92582 | 0,94992 | 1,16667 | 2,6928 | 0,57703 | 0,93305 — 1 |
| $1/6$ = 0,166667 | 0,02778 | 0,00463 | 0,40825 | 0,55032 | 6,00000 | 0,5236 | 0,02182 | 0,22185 — 1 |
| $5/6$ = 0,833333 | 0,69444 | 0,57850 | 0,91287 | 0,94104 | 1,20000 | 2,6180 | 0,54542 | 0,92082 — 1 |
| $1/5$ = 0,200000 | 0,04000 | 0,00800 | 0,44721 | 0,58480 | 5,00000 | 0,6283 | 0,03142 | 0,30103 — 1 |
| $2/5$ = 0,400000 | 0,16000 | 0,06400 | 0,63246 | 0,73681 | 2,50000 | 1,2566 | 0,12566 | 0,60206 — 1 |
| $3/5$ = 0,600000 | 0,36000 | 0,21600 | 0,77460 | 0,84343 | 1,66667 | 1,8850 | 0,28274 | 0,77815 — 1 |
| $4/5$ = 0,800000 | 0,64000 | 0,51200 | 0,89443 | 0,92832 | 1,25000 | 2,5132 | 0,50265 | 0,90309 — 1 |
| $1/4$ = 0,250000 | 0,06250 | 0,01563 | 0,50000 | 0,62996 | 4,00000 | 0,7854 | 0,04909 | 0,39794 — 1 |
| $3/4$ = 0,750000 | 0,56250 | 0,42188 | 0,86603 | 0,90856 | 1,33333 | 2,3562 | 0,44179 | 0,87506 — 1 |
| $1/3$ = 0,333333 | 0,11111 | 0,03704 | 0,57735 | 0,69336 | 3,00000 | 1,0472 | 0,08727 | 0,52288 — 1 |
| $2/3$ = 0,666667 | 0,44444 | 0,29630 | 0,81650 | 0,87358 | 1,50000 | 2,0944 | 0,34907 | 0,82391 — 1 |
| $1/2$ = 0,500000 | 0,25000 | 0,12500 | 0,70711 | 0,79370 | 2,00000 | 1,5708 | 0,19635 | 0,69897 — 1 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n | lognat n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1,0000 | 1,0000 | 1,000000 | 3,142 | 0,7854 | 0,00000 | 0,0000 |
| 2 | 4 | 8 | 1,4142 | 1,2599 | 0,500000 | 6,283 | 3,1416 | 0,30103 | 0,6931 |
| 3 | 9 | 27 | 1,7321 | 1,4422 | 0,333333 | 9,425 | 7,0686 | 0,47712 | 1,0986 |
| 4 | 16 | 64 | 2,0000 | 1,5874 | 0,250000 | 12,566 | 12,5664 | 0,60206 | 1,3863 |
| 5 | 25 | 125 | 2,2361 | 1,7100 | 0,200000 | 15,708 | 19,6350 | 0,69897 | 1,6094 |
| 6 | 36 | 216 | 2,4495 | 1,8171 | 0,166667 | 18,850 | 28,2743 | 0,77815 | 1,7918 |
| 7 | 49 | 343 | 2,6458 | 1,9129 | 0,142857 | 21,991 | 38,4845 | 0,84510 | 1,9459 |
| 8 | 64 | 512 | 2,8284 | 2,0000 | 0,125000 | 25,133 | 50,2655 | 0,90309 | 2,0794 |
| 9 | 81 | 729 | 3,0000 | 2,0801 | 0,111111 | 28,274 | 63,6173 | 0,95424 | 2,1972 |
| 10 | 100 | 1000 | 3,1623 | 2,1544 | 0,100000 | 31,416 | 78,5398 | 1,00000 | 2,3026 |
| 11 | 121 | 1331 | 3,3166 | 2,2240 | 0,090909 | 34,558 | 95,0332 | 1,04139 | 2,3979 |
| 12 | 144 | 1728 | 3,4641 | 2,2894 | 0,083333 | 37,699 | 113,0973 | 1,07918 | 2,4849 |
| 13 | 169 | 2197 | 3,6056 | 2,3513 | 0,076923 | 40,841 | 132,7323 | 1,11394 | 2,5649 |
| 14 | 196 | 2744 | 3,7417 | 2,4101 | 0,071429 | 43,982 | 153,9380 | 1,14613 | 2,6391 |
| 15 | 225 | 3375 | 3,8730 | 2,4662 | 0,066667 | 47,124 | 176,7146 | 1,17609 | 2,7081 |
| 16 | 256 | 4096 | 4,0000 | 2,5198 | 0,062500 | 50,266 | 201,0619 | 1,20412 | 2,7726 |
| 17 | 289 | 4913 | 4,1231 | 2,5713 | 0,058824 | 53,407 | 226,9801 | 1,23045 | 2,8332 |
| 18 | 324 | 5832 | 4,2426 | 2,6207 | 0,055556 | 56,549 | 254,4689 | 1,25527 | 2,8904 |
| 19 | 361 | 6859 | 4,3589 | 2,6684 | 0,052632 | 59,690 | 283,5287 | 1,27875 | 2,9444 |
| 20 | 400 | 8000 | 4,4721 | 2,7144 | 0,050000 | 62,832 | 314,1592 | 1,30103 | 2,9957 |
| 21 | 441 | 9261 | 4,5826 | 2,7589 | 0,047619 | 65,973 | 346,3605 | 1,32222 | 3,0445 |
| 22 | 484 | 10648 | 4,6904 | 2,8020 | 0,045455 | 69,115 | 380,1326 | 1,34242 | 3,0910 |
| 23 | 529 | 12167 | 4,7958 | 2,8439 | 0,043478 | 72,257 | 415,4755 | 1,36173 | 3,1355 |
| 24 | 576 | 13824 | 4,8990 | 2,8845 | 0,041667 | 75,398 | 452,3893 | 1,38021 | 3,1781 |
| 25 | 625 | 15625 | 5,0000 | 2,9240 | 0,040000 | 78,540 | 490,8738 | 1,39794 | 3,2189 |
| 26 | 676 | 17576 | 5,0990 | 2,9625 | 0,038462 | 81,681 | 530,9291 | 1,41497 | 3,2581 |
| 27 | 729 | 19683 | 5,1962 | 3,0000 | 0,037037 | 84,823 | 572,5552 | 1,43136 | 3,2958 |
| 28 | 784 | 21952 | 5,2915 | 3,0366 | 0,035714 | 87,965 | 615,7521 | 1,44716 | 3,3322 |
| 29 | 841 | 24389 | 5,3852 | 3,0723 | 0,034483 | 91,106 | 660,5198 | 1,46240 | 3,3673 |
| 30 | 900 | 27000 | 5,4772 | 3,1072 | 0,033333 | 94,248 | 706,8582 | 1,47712 | 3,4012 |
| 31 | 961 | 29791 | 5,5678 | 3,1414 | 0,032258 | 97,389 | 754,7675 | 1,49136 | 3,4340 |
| 32 | 1024 | 32768 | 5,6569 | 3,1748 | 0,031250 | 100,531 | 804,2476 | 1,50515 | 3,4657 |
| 33 | 1089 | 35937 | 5,7446 | 3,2075 | 0,030303 | 103,673 | 855,2985 | 1,51851 | 3,4965 |
| 34 | 1156 | 39304 | 5,8310 | 3,2396 | 0,029412 | 106,814 | 907,9202 | 1,53148 | 3,5264 |
| 35 | 1225 | 42875 | 5,9161 | 3,2711 | 0,028571 | 109,956 | 962,1126 | 1,54407 | 3,5553 |
| 36 | 1296 | 46656 | 6,0000 | 3,3019 | 0,027778 | 113,097 | 1017,876 | 1,55630 | 3,5835 |
| 37 | 1369 | 50653 | 6,0828 | 3,3322 | 0,027027 | 116,239 | 1075,210 | 1,56820 | 3,6109 |
| 38 | 1444 | 54872 | 6,1644 | 3,3620 | 0,026316 | 119,381 | 1134,115 | 1,57978 | 3,6376 |
| 39 | 1521 | 59319 | 6,2450 | 3,3912 | 0,025641 | 122,522 | 1194,590 | 1,59106 | 3,6636 |
| 40 | 1600 | 64000 | 6,3246 | 3,4200 | 0,025000 | 125,664 | 1256,637 | 1,60206 | 3,6889 |
| 41 | 1681 | 68921 | 6,4031 | 3,4482 | 0,024390 | 128,805 | 1320,252 | 1,61278 | 3,7136 |
| 42 | 1764 | 74088 | 6,4807 | 3,4760 | 0,023810 | 131,947 | 1385,442 | 1,62325 | 3,7377 |
| 43 | 1849 | 79507 | 6,5574 | 3,5034 | 0,023256 | 135,088 | 1452,201 | 1,63347 | 3,7612 |
| 44 | 1936 | 85184 | 6,6332 | 3,5303 | 0,022727 | 138,230 | 1520,530 | 1,64345 | 3,7842 |
| 45 | 2025 | 91125 | 6,7082 | 3,5569 | 0,022222 | 141,372 | 1590,431 | 1,65321 | 3,8067 |
| 46 | 2116 | 97336 | 6,7823 | 3,5830 | 0,021739 | 144,513 | 1661,902 | 1,66276 | 3,8286 |
| 47 | 2209 | 103823 | 6,8557 | 3,6088 | 0,021277 | 147,655 | 1734,944 | 1,67210 | 3,8501 |
| 48 | 2304 | 110592 | 6,9282 | 3,6342 | 0,020833 | 150,796 | 1809,557 | 1,68124 | 3,8712 |
| 49 | 2401 | 117649 | 7,0000 | 3,6593 | 0,020408 | 153,938 | 1885,741 | 1,69020 | 3,8918 |
| 50 | 2500 | 125000 | 7,0711 | 3,6840 | 0,020000 | 157,080 | 1963,495 | 1,69897 | 3,9120 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n | lognat n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 2601 | 132651 | 7,1414 | 3,7084 | 0,019608 | 160,22 | 2042,82 | 1,70757 | 3,9318 |
| 52 | 2704 | 140608 | 7,2111 | 3,7325 | 0,019231 | 163,36 | 2123,72 | 1,71600 | 3,9512 |
| 53 | 2809 | 148877 | 7,2801 | 3,7563 | 0,018868 | 166,50 | 2206,18 | 1,72428 | 3,9703 |
| 54 | 2916 | 157464 | 7,3485 | 3,7798 | 0,018519 | 169,65 | 2290,22 | 1,73239 | 3,9890 |
| 55 | 3025 | 166375 | 7,4162 | 3,8030 | 0,018182 | 172,79 | 2375,83 | 1,74036 | 4,0073 |
| 56 | 3136 | 175616 | 7,4833 | 3,8259 | 0,017857 | 175,93 | 2463,01 | 1,74819 | 4,0254 |
| 57 | 3249 | 185193 | 7,5498 | 3,8485 | 0,017544 | 179,07 | 2551,76 | 1,75587 | 4,0431 |
| 58 | 3364 | 195112 | 7,6158 | 3,8709 | 0,017241 | 182,21 | 2642,08 | 1,76343 | 4.0604 |
| 59 | 3481 | 205379 | 7,6811 | 3,8930 | 0,016949 | 185,35 | 2733,97 | 1,77085 | 4,0775 |
| 60 | 3600 | 216000 | 7,7460 | 3,9149 | 0,016667 | 188,50 | 2827,43 | 1,77815 | 4,0943 |
| 61 | 3721 | 226981 | 7,8102 | 3,9365 | 0,016393 | 191,64 | 2922,47 | 1,78533 | 4,1109 |
| 62 | 3844 | 238328 | 7,8740 | 3,9579 | 0,016129 | 194,78 | 3019,07 | 1,79239 | 4,1271 |
| 63 | 3969 | 250047 | 7,9373 | 3,9791 | 0,015873 | 197,92 | 3117,25 | 1,79934 | 4,1431 |
| 64 | 4096 | 262144 | 8,0000 | 4,0000 | 0,015625 | 201,06 | 3216,99 | 1,80618 | 4,1589 |
| 65 | 4225 | 274625 | 8,0623 | 4,0207 | 0,015385 | 204,20 | 3318,31 | 1,81291 | 4,1744 |
| 66 | 4356 | 287496 | 8,1240 | 4,0412 | 0,015152 | 207,35 | 3421,19 | 1,81954 | 4,1897 |
| 67 | 4489 | 300763 | 8,1854 | 4,0615 | 0,014925 | 210,49 | 3525,66 | 1,82607 | 4,2047 |
| 68 | 4624 | 314432 | 8,2462 | 4,0817 | 0,014706 | 213,63 | 3631,69 | 1,83251 | 4,2195 |
| 69 | 4761 | 328509 | 8,3066 | 4,1016 | 0,014493 | 216,77 | 3739,29 | 1,83885 | 4,2341 |
| 70 | 4900 | 343000 | 8,3666 | 4,1213 | 0,014286 | 219,91 | 3848,46 | 1,84510 | 4,2485 |
| 71 | 5041 | 357911 | 8,4261 | 4,1408 | 0,014085 | 223,05 | 3959,19 | 1,85126 | 4,2627 |
| 72 | 5184 | 373248 | 8,4853 | 4,1602 | 0,013889 | 226,19 | 4071,50 | 1,85733 | 4,2767 |
| 73 | 5329 | 389017 | 8,5440 | 4,1793 | 0,013699 | 229,34 | 4185,39 | 1,86332 | 4,2905 |
| 74 | 5476 | 405224 | 8,6023 | 4,1983 | 0,013514 | 232,48 | 4300,84 | 1,86923 | 4,3041 |
| 75 | 5625 | 421875 | 8,6603 | 4,2172 | 0,013333 | 235,62 | 4417,86 | 1,87506 | 4,3175 |
| 76 | 5776 | 438976 | 8,7178 | 4,2358 | 0,013158 | 238,76 | 4536,46 | 1,88081 | 4,3307 |
| 77 | 5929 | 456533 | 8,7750 | 4,2543 | 0,012987 | 241,90 | 4656,63 | 1,88649 | 4,3438 |
| 78 | 6084 | 474552 | 8,8318 | 4,2727 | 0,012821 | 245,04 | 4778,36 | 1,89209 | 4,3567 |
| 79 | 6241 | 493039 | 8,8882 | 4,2908 | 0,012658 | 248,19 | 4901,67 | 1,89763 | 4,3694 |
| 80 | 6400 | 512000 | 8,9443 | 4,3089 | 0,012500 | 251,33 | 5026,55 | 1,90309 | 4,3820 |
| 81 | 6561 | 531441 | 9,0000 | 4,3267 | 0,012346 | 254,47 | 5153,00 | 1,90849 | 4,3944 |
| 82 | 6724 | 551368 | 9,0554 | 4,3445 | 0,012195 | 257,61 | 5281,02 | 1,91381 | 4,4067 |
| 83 | 6889 | 571787 | 9,1104 | 4,3621 | 0,012048 | 260,75 | 5410,61 | 1,91908 | 4,4188 |
| 84 | 7056 | 592704 | 9,1652 | 4,3795 | 0,011905 | 263,89 | 5541,77 | 1,92428 | 4,4308 |
| 85 | 7225 | 614125 | 9,2195 | 4,3968 | 0,011765 | 267,04 | 5674,50 | 1,92942 | 4,4427 |
| 86 | 7396 | 636056 | 9,2736 | 4,4140 | 0,011628 | 270,18 | 5808,80 | 1,93450 | 4,4543 |
| 87 | 7569 | 658503 | 9,3274 | 4,4310 | 0,011494 | 273,32 | 5944,68 | 1,93952 | 4,4659 |
| 88 | 7744 | 681472 | 9,3808 | 4,4480 | 0,011364 | 276,46 | 6082,12 | 1,94448 | 4,4773 |
| 89 | 7921 | 704969 | 9,4340 | 4,4647 | 0,011236 | 279,60 | 6221,14 | 1,94939 | 4,4886 |
| 90 | 8100 | 729000 | 9,4868 | 4,4814 | 0,011111 | 282,74 | 6361,73 | 1,95424 | 4,4998 |
| 91 | 8281 | 753571 | 9,5394 | 4,4979 | 0,010989 | 285,88 | 6503,88 | 1,95904 | 4,5109 |
| 92 | 8464 | 778688 | 9,5917 | 4,5144 | 0,010870 | 289,03 | 6647,61 | 1,96379 | 4,5218 |
| 93 | 8649 | 804357 | 9,6437 | 4,5307 | 0,010753 | 292,17 | 6792,91 | 1,96848 | 4,5326 |
| 94 | 8836 | 830584 | 9,6954 | 4,5468 | 0,010638 | 295,31 | 6939,78 | 1,97313 | 4,5433 |
| 95 | 9025 | 857375 | 9,7468 | 4,5629 | 0,010526 | 298,45 | 7088,22 | 1,97772 | 4,5539 |
| 96 | 9216 | 884736 | 9,7980 | 4,5789 | 0,010417 | 301,59 | 7238,23 | 1,98227 | 4,5643 |
| 97 | 9409 | 912673 | 9,8489 | 4,5947 | 0,010309 | 304,73 | 7389,81 | 1,98677 | 4,5747 |
| 98 | 9604 | 941192 | 9,8995 | 4,6104 | 0,010204 | 307,88 | 7542,96 | 1,99123 | 4,5850 |
| 99 | 9801 | 970299 | 9,9499 | 4,6261 | 0,010101 | 311,02 | 7697,69 | 1,99564 | 4,5951 |
| 100 | 10000 | 1000000 | 10,0000 | 4,6416 | 0,010000 | 314,16 | 7853,98 | 2,00000 | 4,6052 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 101 | 10201 | 1030301 | 10,0499 | 4,6570 | 0,009901 | 317,30 | 8011,85 | 2,00432 |
| 102 | 10404 | 1061208 | 10,0995 | 4,6723 | 0,009804 | 320,44 | 8171,28 | 2,00860 |
| 103 | 10609 | 1092727 | 10,1489 | 4,6875 | 0,009709 | 323,58 | 8332,29 | 2,01284 |
| 104 | 10816 | 1124864 | 10,1980 | 4,7027 | 0,009615 | 326,73 | 8494,87 | 2,01703 |
| 105 | 11025 | 1157625 | 10,2470 | 4,7177 | 0,009524 | 329,87 | 8659,01 | 2,02119 |
| 106 | 11236 | 1191016 | 10,2956 | 4,7326 | 0,009434 | 333,01 | 8824,73 | 2,02531 |
| 107 | 11449 | 1225043 | 10,3441 | 4,7475 | 0,009346 | 336,15 | 8992,02 | 2,02938 |
| 108 | 11664 | 1259712 | 10,3923 | 4,7622 | 0,009259 | 339,29 | 9160,88 | 2,03342 |
| 109 | 11881 | 1295029 | 10,4403 | 4,7769 | 0,009174 | 342,43 | 9331,32 | 2,03743 |
| 110 | 12100 | 1331000 | 10,4881 | 4,7914 | 0,009091 | 345,58 | 9503,32 | 2,04139 |
| 111 | 12321 | 1367631 | 10,5357 | 4,8059 | 0,009009 | 348,72 | 9676,89 | 2,04532 |
| 112 | 12544 | 1404928 | 10,5830 | 4,8203 | 0,008929 | 351,86 | 9852,03 | 2,04922 |
| 113 | 12769 | 1442897 | 10,6301 | 4,8346 | 0,008850 | 355,00 | 10028,7 | 2,05308 |
| 114 | 12996 | 1481544 | 10,6771 | 4,8488 | 0,008772 | 358,14 | 10207,0 | 2,05690 |
| 115 | 13225 | 1520875 | 10,7238 | 4,8629 | 0,008696 | 361,28 | 10386,9 | 2,06070 |
| 116 | 13456 | 1560896 | 10,7703 | 4,8770 | 0,008621 | 364,42 | 10568,3 | 2,06446 |
| 117 | 13689 | 1601613 | 10,8167 | 4,8910 | 0,008547 | 367,57 | 10751,3 | 2,06819 |
| 118 | 13924 | 1643032 | 10,8628 | 4,9049 | 0,008475 | 370,71 | 10935,9 | 2,07188 |
| 119 | 14161 | 1685159 | 10,9087 | 4,9187 | 0,008403 | 373,85 | 11122,0 | 2,07555 |
| 120 | 14400 | 1728000 | 10,9545 | 4,9324 | 0,008333 | 376,99 | 11309,7 | 2,07918 |
| 121 | 14641 | 1771561 | 11,0000 | 4,9461 | 0,008264 | 380,13 | 11499,0 | 2,08279 |
| 122 | 14884 | 1815848 | 11,0454 | 4,9597 | 0,008197 | 383,27 | 11689,9 | 2,08636 |
| 123 | 15129 | 1860867 | 11,0905 | 4,9732 | 0,008130 | 386,42 | 11882,3 | 2,08991 |
| 124 | 15376 | 1906624 | 11,1355 | 4,9866 | 0,008065 | 389,56 | 12076,3 | 2,09342 |
| 125 | 15625 | 1953125 | 11,1803 | 5,0000 | 0,008000 | 392,70 | 12271,8 | 2,09691 |
| 126 | 15876 | 2000376 | 11,2250 | 5,0133 | 0,007937 | 395,84 | 12469,0 | 2,10037 |
| 127 | 16129 | 2048383 | 11,2694 | 5,0265 | 0,007874 | 398,98 | 12667,7 | 2,10380 |
| 128 | 16384 | 2097152 | 11,3137 | 5,0397 | 0,007813 | 402,12 | 12868,0 | 2,10721 |
| 129 | 16641 | 2146689 | 11,3578 | 5,0528 | 0,007752 | 405,27 | 13069,8 | 2,11059 |
| 130 | 16900 | 2197000 | 11,4018 | 5,0658 | 0,007692 | 408,41 | 13273,2 | 2,11394 |
| 131 | 17161 | 2248091 | 11,4455 | 5,0788 | 0,007634 | 411,55 | 13478,2 | 2,11727 |
| 132 | 17424 | 2299968 | 11,4891 | 5,0916 | 0,007576 | 414,69 | 13684,8 | 2,12057 |
| 133 | 17689 | 2352637 | 11,5326 | 5,1045 | 0,007519 | 417,83 | 13892,9 | 2,12385 |
| 134 | 17956 | 2406104 | 11,5758 | 5,1172 | 0,007463 | 420,97 | 14102,6 | 2,12710 |
| 135 | 18225 | 2460375 | 11,6190 | 5,1299 | 0,007407 | 424,12 | 14313,9 | 2,13033 |
| 136 | 18496 | 2515456 | 11,6619 | 5,1426 | 0,007353 | 427,26 | 14526,7 | 2,13354 |
| 137 | 18769 | 2571353 | 11,7047 | 5,1551 | 0,007299 | 430,40 | 14741,1 | 2,13672 |
| 138 | 19044 | 2628072 | 11,7473 | 5,1676 | 0,007246 | 433,54 | 14957,1 | 2,13988 |
| 139 | 19321 | 2685619 | 11,7898 | 5,1801 | 0,007194 | 436,68 | 15174,7 | 2,14301 |
| 140 | 19600 | 2744000 | 11,8322 | 5,1925 | 0,007143 | 439,82 | 15393,8 | 2,14613 |
| 141 | 19881 | 2803221 | 11,8743 | 5,2048 | 0,007092 | 442,96 | 15614,5 | 2,14922 |
| 142 | 20164 | 2863288 | 11,9164 | 5,2171 | 0,007042 | 446,11 | 15836,8 | 2,15229 |
| 143 | 20449 | 2924207 | 11,9583 | 5,2293 | 0,006993 | 449,25 | 16060,6 | 2,15534 |
| 144 | 20736 | 2985984 | 12,0000 | 5,2415 | 0,006944 | 452,39 | 16286,0 | 2,15836 |
| 145 | 21025 | 3048625 | 12,0416 | 5,2536 | 0,006897 | 455,53 | 16513,0 | 2,16137 |
| 146 | 21316 | 3112136 | 12,0830 | 5,2656 | 0,006849 | 458,67 | 16741,5 | 2,16435 |
| 147 | 21609 | 3176523 | 12,1244 | 5,2776 | 0,006803 | 461,81 | 16971,7 | 2,16732 |
| 148 | 21904 | 3241792 | 12,1655 | 5,2896 | 0,006757 | 464,96 | 17203,4 | 2,17026 |
| 149 | 22201 | 3307949 | 12,2066 | 5,3015 | 0,006711 | 468,10 | 17436,6 | 2,17319 |
| 150 | 22500 | 3375000 | 12,2474 | 5,3133 | 0,006667 | 471,24 | 17671,5 | 2,17609 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 151 | 22801 | 3442951 | 12,2882 | 5,3251 | 0,006623 | 474,38 | 17907,9 | 2,17898 |
| 152 | 23104 | 3511808 | 12,3288 | 5,3368 | 0,006579 | 477,52 | 18145,8 | 2,18184 |
| 153 | 23409 | 3581577 | 12,3693 | 5,3485 | 0,006536 | 480,66 | 18385,4 | 2,18469 |
| 154 | 23716 | 3652264 | 12,4097 | 5,3601 | 0,006494 | 483,81 | 18626,5 | 2,18752 |
| 155 | 24025 | 3723875 | 12,4499 | 5,3717 | 0,006452 | 486,95 | 18869,2 | 2,19033 |
| 156 | 24336 | 3796416 | 12,4900 | 5,3832 | 0,006410 | 490,09 | 19113,4 | 2,19312 |
| 157 | 24649 | 3869893 | 12,5300 | 5,3947 | 0,006369 | 493,23 | 19359,3 | 2,19590 |
| 158 | 24964 | 3944312 | 12,5698 | 5,4061 | 0,006329 | 496,37 | 19606,7 | 2,19866 |
| 159 | 25281 | 4019679 | 12,6095 | 5,4175 | 0,006289 | 499,51 | 19855,7 | 2,20140 |
| 160 | 25600 | 4096000 | 12,6491 | 5,4288 | 0,006250 | 502,65 | 20106,2 | 2,20412 |
| 161 | 25921 | 4173281 | 12,6886 | 5,4401 | 0,006211 | 505,80 | 20358,3 | 2,20683 |
| 162 | 26244 | 4251528 | 12,7279 | 5,4514 | 0,006173 | 508,94 | 20612,0 | 2,20952 |
| 163 | 26569 | 4330747 | 12,7671 | 5,4626 | 0,006135 | 512,08 | 20867,2 | 2,21219 |
| 164 | 26896 | 4410944 | 12,8062 | 5,4737 | 0,006098 | 515,22 | 21124,1 | 2,21484 |
| 165 | 27225 | 4492125 | 12,8452 | 5,4848 | 0,006061 | 518,36 | 21382,5 | 2,21748 |
| 166 | 27556 | 4574296 | 12,8841 | 5,4959 | 0,006024 | 521,50 | 21642,4 | 2,22011 |
| 167 | 27889 | 4657463 | 12,9228 | 5,5069 | 0,005988 | 524,65 | 21904,0 | 2,22272 |
| 168 | 28224 | 4741632 | 12,9615 | 5,5178 | 0,005952 | 527,79 | 22167,1 | 2,22531 |
| 169 | 28561 | 4826809 | 13,0000 | 5,5288 | 0,005917 | 530,93 | 22431,8 | 2,22789 |
| 170 | 28900 | 4913000 | 13,0384 | 5,5397 | 0,005882 | 534,07 | 22698,0 | 2,23045 |
| 171 | 29241 | 5000211 | 13,0767 | 5,5505 | 0,005848 | 537,21 | 22965,8 | 2,23300 |
| 172 | 29584 | 5088448 | 13,1149 | 5,5613 | 0,005814 | 540,35 | 23235,2 | 2,23553 |
| 173 | 29929 | 5177717 | 13,1529 | 5,5721 | 0,005780 | 543,50 | 23506,2 | 2,23805 |
| 174 | 30276 | 5268024 | 13,1909 | 5,5828 | 0,005747 | 546,64 | 23778,7 | 2,24055 |
| 175 | 30625 | 5359375 | 13,2288 | 5,5934 | 0,005714 | 549,78 | 24052,8 | 2,24304 |
| 176 | 30976 | 5451776 | 13,2665 | 5,6041 | 0,005682 | 552,92 | 24328,5 | 2,24551 |
| 177 | 31329 | 5545233 | 13,3041 | 5,6147 | 0,005650 | 556,06 | 24605,7 | 2,24797 |
| 178 | 31684 | 5639752 | 13,3417 | 5,6252 | 0,005618 | 559,20 | 24884,6 | 2,25042 |
| 179 | 32041 | 5735339 | 13,3791 | 5,6357 | 0,005587 | 562,35 | 25164,9 | 2,25285 |
| 180 | 32400 | 5832000 | 13,4164 | 5,6462 | 0,005556 | 565,49 | 25446,9 | 2,25527 |
| 181 | 32761 | 5929741 | 13,4536 | 5,6567 | 0,005525 | 568,63 | 25730,4 | 2,25768 |
| 182 | 33124 | 6028568 | 13,4907 | 5,6671 | 0,005495 | 571,77 | 26015,5 | 2,26007 |
| 183 | 33489 | 6128487 | 13,5277 | 5,6774 | 0,005465 | 574,91 | 26302,2 | 2,26245 |
| 184 | 33856 | 6229504 | 13,5647 | 5,6877 | 0,005435 | 578,05 | 26590,4 | 2,26482 |
| 185 | 34225 | 6331625 | 13,6015 | 5,6980 | 0,005405 | 581,19 | 26880,3 | 2,26717 |
| 186 | 34596 | 6434856 | 13,6382 | 5,7083 | 0,005376 | 584,34 | 27171,6 | 2,26951 |
| 187 | 34969 | 6539203 | 13,6748 | 5,7185 | 0,005348 | 587,48 | 27464,6 | 2,27184 |
| 188 | 35344 | 6644672 | 13,7113 | 5,7287 | 0,005319 | 590,62 | 27759,1 | 2,27416 |
| 189 | 35721 | 6751269 | 13,7477 | 5,7388 | 0,005291 | 593,76 | 28055,2 | 2,27646 |
| 190 | 36100 | 6859000 | 13,7840 | 5,7489 | 0,005263 | 596,90 | 28352,9 | 2,27875 |
| 191 | 36481 | 6967871 | 13,8203 | 5,7590 | 0,005236 | 600,04 | 28652,1 | 2,28103 |
| 192 | 36864 | 7077888 | 13,8564 | 5,7690 | 0,005208 | 603,19 | 28952,9 | 2,28330 |
| 193 | 37249 | 7189057 | 13,8924 | 5,7790 | 0,005181 | 606,33 | 29255,3 | 2,28556 |
| 194 | 37636 | 7301384 | 13,9284 | 5,7890 | 0,005155 | 609,47 | 29559,2 | 2,28780 |
| 195 | 38025 | 7414875 | 13,9642 | 5,7989 | 0,005128 | 612,61 | 29864,8 | 2,29003 |
| 196 | 38416 | 7529536 | 14,0000 | 5,8088 | 0,005102 | 615,75 | 30171,9 | 2,29226 |
| 197 | 38809 | 7645373 | 14,0357 | 5,8186 | 0,005076 | 618,89 | 30480,5 | 2,29447 |
| 198 | 39204 | 7762392 | 14,0712 | 5,8285 | 0,005051 | 622,04 | 30790,7 | 2,29667 |
| 199 | 39601 | 7880599 | 14,1067 | 5,8383 | 0,005025 | 625,18 | 31102,6 | 2,29885 |
| 200 | 40000 | 8000000 | 14,1421 | 5,8480 | 0,005000 | 628,32 | 31415,9 | 2,30103 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 201 | 40401 | 8120601 | 14,1774 | 5,8578 | 0,004975 | 631,46 | 31730,9 | 2,30320 |
| 202 | 40804 | 8242408 | 14,2127 | 5,8675 | 0,004951 | 634,60 | 32047,4 | 2,30535 |
| 203 | 41209 | 8365427 | 14,2478 | 5,8771 | 0,004926 | 637,74 | 32365,5 | 2,30750 |
| 204 | 41616 | 8489664 | 14,2829 | 5,8868 | 0,004902 | 640,88 | 32685,1 | 2,30963 |
| 205 | 42025 | 8615125 | 14,3178 | 5,8964 | 0,004878 | 644,03 | 33006,4 | 2,31175 |
| 206 | 42436 | 8741816 | 14,3527 | 5,9059 | 0,004854 | 647,17 | 33329,2 | 2,31387 |
| 207 | 42849 | 8869743 | 14,3875 | 5,9155 | 0,004831 | 650,31 | 33653,5 | 2,31597 |
| 208 | 43264 | 8998912 | 14,4222 | 5,9250 | 0,004808 | 653,45 | 33979,5 | 2,31806 |
| 209 | 43681 | 9129329 | 14,4568 | 5,9345 | 0,004785 | 656,59 | 34307,0 | 2,32015 |
| 210 | 44100 | 9261000 | 14,4914 | 5,9439 | 0,004719 | 659,73 | 34636,1 | 2,32222 |
| 211 | 44521 | 9393931 | 14,5258 | 5,9533 | 0,004739 | 662,88 | 34966,7 | 2,32428 |
| 212 | 44944 | 9528128 | 14,5602 | 5,9627 | 0,004717 | 666,02 | 35298,9 | 2,32634 |
| 213 | 45369 | 9663597 | 14,5945 | 5,9721 | 0,004695 | 669,16 | 35632,7 | 2,32838 |
| 214 | 45796 | 9800344 | 14,6287 | 5,9814 | 0,004673 | 672,30 | 35968,1 | 2,33041 |
| 215 | 46225 | 9938375 | 14,6629 | 5,9907 | 0,004651 | 675,44 | 36305,0 | 2,33244 |
| 216 | 46656 | 10077696 | 14,6969 | 6,0000 | 0,004630 | 678,58 | 36643,5 | 2,33445 |
| 217 | 47089 | 10218313 | 14,7309 | 6,0092 | 0,004608 | 681,73 | 36983,6 | 2,33646 |
| 218 | 47524 | 10360232 | 14,7648 | 6,0185 | 0,004587 | 684,87 | 37325,3 | 2,33846 |
| 219 | 47961 | 10503459 | 14,7986 | 6,0277 | 0,004566 | 688 01 | 37668,5 | 2,34044 |
| 220 | 48400 | 10648000 | 14,8324 | 6,0368 | 0,004545 | 691,15 | 38013,3 | 2,34242 |
| 221 | 48841 | 10793861 | 14,8661 | 6,0459 | 0,004525 | 694,29 | 38359,6 | 2,34439 |
| 222 | 49284 | 10941048 | 14,8997 | 6,0550 | 0,004505 | 697,43 | 38707,6 | 2,34635 |
| 223 | 49729 | 11089567 | 14,9332 | 6,0641 | 0,004484 | 700,58 | 39057,1 | 2,34830 |
| 224 | 50176 | 11239424 | 14,9666 | 6,0732 | 0,004464 | 703,72 | 39408,1 | 2,35025 |
| 225 | 50625 | 11390625 | 15,0000 | 6,0822 | 0,004444 | 706,86 | 39760,8 | 2,35218 |
| 226 | 51076 | 11543176 | 15,0333 | 6,0912 | 0,004425 | 710,00 | 40115,0 | 2,35411 |
| 227 | 51529 | 11697083 | 15,0665 | 6,1002 | 0,004405 | 713,14 | 40470,8 | 2,35603 |
| 228 | 51984 | 11852352 | 15,0997 | 6,1091 | 0,004386 | 716,28 | 40828,1 | 2,35793 |
| 229 | 52441 | 12008989 | 15,1327 | 6,1180 | 0,004367 | 719,42 | 41187,1 | 2,35984 |
| 230 | 52900 | 12167000 | 15,1658 | 6,1269 | 0,004348 | 722,57 | 41547,6 | 2,36173 |
| 231 | 53361 | 12326391 | 15,1987 | 6,1358 | 0,004329 | 725,71 | 41909,6 | 2,36361 |
| 232 | 53824 | 12487168 | 15,2315 | 6,1446 | 0,004310 | 728,85 | 42273,3 | 2,36549 |
| 233 | 54289 | 12649337 | 15,2643 | 6,1534 | 0,004292 | 731,99 | 42638,5 | 2,36736 |
| 234 | 54756 | 12812904 | 15,2971 | 6,1622 | 0,004274 | 735,13 | 43005,3 | 2,36922 |
| 235 | 55225 | 12977875 | 15,3297 | 6,1710 | 0,004255 | 738,27 | 43373,6 | 2,37107 |
| 236 | 55696 | 13144256 | 15,3623 | 6,1797 | 0,004237 | 741,42 | 43743,5 | 2,37291 |
| 237 | 56169 | 13312053 | 15,3948 | 6,1885 | 0,004219 | 744,56 | 44115,0 | 2,37475 |
| 238 | 56644 | 13481272 | 15,4272 | 6,1972 | 0,004202 | 747,70 | 44488,1 | 2,37658 |
| 239 | 57121 | 13651919 | 15,4596 | 6,2058 | 0,004184 | 750,84 | 44862,7 | 2,37840 |
| 240 | 57600 | 13824000 | 15,4919 | 6,2145 | 0,004167 | 753,98 | 45238,9 | 2,38021 |
| 241 | 58081 | 13997521 | 15,5242 | 6,2231 | 0,004149 | 757,12 | 45616,7 | 2,38202 |
| 242 | 58564 | 14172488 | 15,5563 | 6,2317 | 0,004132 | 760,27 | 45996,1 | 2,38382 |
| 243 | 59049 | 14348907 | 15,5885 | 6,2403 | 0,004115 | 763,41 | 46377,0 | 2,38561 |
| 244 | 59536 | 14526784 | 15,6205 | 6,2488 | 0,004098 | 766,55 | 46759,5 | 2,38739 |
| 245 | 60025 | 14706125 | 15,6525 | 6,2573 | 0,004082 | 769,69 | 47143,5 | 2,38917 |
| 246 | 60516 | 14886936 | 15,6844 | 6,2658 | 0,004065 | 772,83 | 47529,2 | 2,39094 |
| 247 | 61009 | 15069223 | 15,7162 | 6,2743 | 0,004049 | 775,97 | 47916,4 | 2,39270 |
| 248 | 61504 | 15252992 | 15,7480 | 6,2828 | 0,004032 | 779,11 | 48305,1 | 2,39445 |
| 249 | 62001 | 15438249 | 15,7797 | 6,2912 | 0,004016 | 782,26 | 48695,5 | 2,39620 |
| 250 | 62500 | 15625000 | 15,8114 | 6,2996 | 0,004000 | 785,40 | 49087,4 | 2,39794 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 251 | 63001 | 15813251 | 15,8430 | 6,3080 | 0,003984 | 788,54 | 49480,9 | 2,39967 |
| 252 | 63504 | 16003008 | 15,8745 | 6,3164 | 0,003968 | 791,68 | 49875,9 | 2,40140 |
| 253 | 64009 | 16194277 | 15,9060 | 6,3247 | 0,003953 | 794,82 | 50272,6 | 2,40312 |
| 254 | 64516 | 16387064 | 15,9374 | 6,3330 | 0,003937 | 797,96 | 50670,7 | 2,40483 |
| 255 | 65025 | 16581375 | 15,9687 | 6,3413 | 0,003922 | 801,11 | 51070,5 | 2,40654 |
| 256 | 65536 | 16777216 | 16,0000 | 6,3496 | 0,003906 | 804,25 | 51471,9 | 2,40824 |
| 257 | 66049 | 16974593 | 16,0312 | 6,3579 | 0,003891 | 807,39 | 51874,8 | 2,40993 |
| 258 | 66564 | 17173512 | 16,0624 | 6,3661 | 0,003876 | 810,53 | 52279,2 | 2,41162 |
| 259 | 67081 | 17373979 | 16,0935 | 6,3743 | 0,003861 | 813,67 | 52685,3 | 2,41330 |
| 260 | 67600 | 17576000 | 16,1245 | 6,3825 | 0,003846 | 816,81 | 53092,9 | 2,41497 |
| 261 | 68121 | 17779581 | 16,1555 | 6,3907 | 0,003831 | 819,96 | 53502,1 | 2,41664 |
| 262 | 68644 | 17984728 | 16,1864 | 6,3988 | 0,003817 | 823,10 | 53912,9 | 2,41830 |
| 263 | 69169 | 18191447 | 16,2173 | 6,4070 | 0,003802 | 826,24 | 54325,2 | 2,41996 |
| 264 | 69696 | 18399744 | 16,2481 | 6,4151 | 0,003788 | 829,38 | 54739,1 | 2,42160 |
| 265 | 70225 | 18609625 | 16,2788 | 6,4232 | 0,003774 | 832,52 | 55154,6 | 2,42325 |
| 266 | 70756 | 18821096 | 16,3095 | 6,4312 | 0,003759 | 835,66 | 55571,6 | 2,42488 |
| 267 | 71289 | 19034163 | 16,3401 | 6,4393 | 0,003745 | 838,81 | 55990,2 | 2,42651 |
| 268 | 71824 | 19248832 | 16,3707 | 6,4473 | 0,003731 | 841,95 | 56410,4 | 2,42813 |
| 269 | 72361 | 19465109 | 16,4012 | 6,4553 | 0,003717 | 845,09 | 56832,2 | 2,42975 |
| 270 | 72900 | 19683000 | 16,4317 | 6,4633 | 0,003704 | 848,23 | 57255,5 | 2,43136 |
| 271 | 73441 | 19902511 | 16,4621 | 6,4713 | 0,003690 | 851,37 | 57680,4 | 2,43297 |
| 272 | 73984 | 20123648 | 16,4924 | 6,4792 | 0,003677 | 854,51 | 58106,9 | 2,43457 |
| 273 | 74529 | 20346417 | 16,5227 | 6,4872 | 0,003663 | 857,65 | 58534,9 | 2,43616 |
| 274 | 75076 | 20570824 | 16,5529 | 6,4951 | 0,003650 | 860,80 | 58964,6 | 2,43775 |
| 275 | 75625 | 20796875 | 16,5831 | 6,5030 | 0,003636 | 863,94 | 59395,7 | 2,43933 |
| 276 | 76176 | 21024576 | 16,6132 | 6,5108 | 0,003623 | 867,08 | 59828,5 | 2,44091 |
| 277 | 76729 | 21253933 | 16,6433 | 6,5187 | 0,003610 | 870,22 | 60262,8 | 2,44248 |
| 278 | 77284 | 21484952 | 16,6733 | 6,5265 | 0,003597 | 873,36 | 60698,7 | 2,44404 |
| 279 | 77841 | 21717639 | 16,7033 | 5,5343 | 0,003584 | 876,50 | 61136,2 | 2,44560 |
| 280 | 78400 | 21952000 | 16,7332 | 5,5421 | 0,003571 | 879,65 | 61575,2 | 2,44716 |
| 281 | 78961 | 22188041 | 16,7631 | 6,5499 | 0,003559 | 882,79 | 62015,8 | 2,44871 |
| 282 | 79524 | 22425768 | 16,7929 | 6,5577 | 0,003546 | 885,93 | 62458,0 | 2,45025 |
| 283 | 80089 | 22665187 | 16,8226 | 6,5654 | 0,003534 | 889,07 | 62901,8 | 2,45179 |
| 284 | 80656 | 22906304 | 16,8523 | 6,5731 | 0,003521 | 892,21 | 63347,1 | 2,45332 |
| 285 | 81225 | 23149125 | 16,8819 | 6,5808 | 0,003509 | 895,35 | 63794,0 | 2,45484 |
| 286 | 81796 | 23393656 | 16,9115 | 6,5885 | 0,003497 | 898,50 | 64242,4 | 2,45637 |
| 287 | 82369 | 23639903 | 16,9411 | 6,5962 | 0,003484 | 901,64 | 64692,5 | 2,45788 |
| 288 | 82944 | 23887872 | 16,9706 | 6,6039 | 0,003472 | 904,78 | 65144,1 | 2,45939 |
| 289 | 83521 | 24137569 | 17,0000 | 6,6115 | 0,003460 | 907,92 | 65597,2 | 2,46090 |
| 290 | 84100 | 24389000 | 17,0294 | 6,6191 | 0,003448 | 911,06 | 66052,0 | 2,46240 |
| 291 | 84681 | 24642171 | 17,0587 | 6,6267 | 0,003436 | 914,20 | 66508,3 | 2,46389 |
| 292 | 85264 | 24897088 | 17,0880 | 6,6343 | 0,003425 | 917,35 | 66966,2 | 2,46538 |
| 293 | 85849 | 25153757 | 17,1172 | 6,6419 | 0,003413 | 920,49 | 67425,6 | 2,46687 |
| 294 | 86436 | 25412184 | 17,1464 | 6,6494 | 0,003401 | 923,63 | 67886,7 | 2,46835 |
| 295 | 87025 | 25672375 | 17,1756 | 6,6569 | 0,003390 | 926,77 | 68349,3 | 2,46982 |
| 296 | 87616 | 25934336 | 17,2047 | 6,6644 | 0,003378 | 929,91 | 68813,4 | 2,47129 |
| 297 | 88209 | 26198073 | 17,2337 | 6,6719 | 0,003367 | 933,05 | 69279,2 | 2,47276 |
| 298 | 88804 | 26463592 | 17,2627 | 6,6794 | 0,003356 | 936,19 | 69746,5 | 2,47422 |
| 299 | 89401 | 26730899 | 17,2916 | 6,6869 | 0,003344 | 939,34 | 70215,4 | 2,47567 |
| 300 | 90000 | 27000000 | 17,3205 | 6,6943 | 0,003333 | 942,48 | 70685,8 | 2,47712 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 301 | 90601 | 27270901 | 17,3494 | 6,7018 | 0,003322 | 945,62 | 71157,9 | 2,47857 |
| 302 | 91204 | 27543608 | 17,3781 | 6,7092 | 0,003311 | 948,76 | 71631,5 | 2,48001 |
| 303 | 91809 | 27818127 | 17,4069 | 6,7166 | 0,003300 | 951,90 | 72106,6 | 2,48144 |
| 304 | 92416 | 28094464 | 17,4356 | 6,7240 | 0,003289 | 955,04 | 72583,4 | 2,48287 |
| 305 | 93025 | 28372625 | 17,4642 | 6,7313 | 0,003279 | 958,19 | 73061,7 | 2,48430 |
| 306 | 93636 | 28652616 | 17,4929 | 6,7387 | 0,003268 | 961,33 | 73541,5 | 2,48572 |
| 307 | 94249 | 28934443 | 17,5214 | 6,7460 | 0,003257 | 964,47 | 74023,0 | 2,48714 |
| 308 | 94864 | 29218112 | 17,5499 | 6,7533 | 0,003247 | 967,61 | 74506,0 | 2,48855 |
| 309 | 95481 | 29503629 | 17,5784 | 6,7606 | 0,003236 | 970,75 | 74990,6 | 2,48996 |
| 310 | 96100 | 29791000 | 17,6068 | 6,7679 | 0,003226 | 973,89 | 75476,8 | 2,49136 |
| 311 | 96721 | 30080231 | 17,6352 | 6,7752 | 0,003215 | 977,04 | 75964,5 | 2,49276 |
| 312 | 97344 | 30371328 | 17,6635 | 6,7824 | 0,003205 | 980,18 | 76453,8 | 2,49415 |
| 313 | 97969 | 30664297 | 17,6918 | 6,7897 | 0,003195 | 983,32 | 76944,7 | 2,49554 |
| 314 | 98596 | 30959144 | 17,7200 | 6,7969 | 0,003185 | 986,46 | 77437,1 | 2,49693 |
| 315 | 99225 | 31255875 | 17,7482 | 6,8041 | 0,003175 | 989,60 | 77931,1 | 2,49831 |
| 316 | 99856 | 31554496 | 17,7764 | 6,8113 | 0,003165 | 992,74 | 78426,7 | 2,49969 |
| 317 | 100489 | 31855013 | 17,8045 | 6,8185 | 0,003155 | 995,88 | 78923,9 | 2,50106 |
| 318 | 101124 | 32157432 | 17,8326 | 6,8256 | 0,003145 | 999,03 | 79422,6 | 2,50243 |
| 319 | 101761 | 32461759 | 17,8606 | 6,8328 | 0,003135 | 1002,2 | 79922,9 | 2,50379 |
| 320 | 102400 | 32768000 | 17,8885 | 6,8399 | 0,003125 | 1005,3 | 80424,8 | 2,50515 |
| 321 | 103041 | 33076161 | 17,9165 | 6,8470 | 0,003115 | 1008,5 | 80928,2 | 2,50651 |
| 322 | 103684 | 33386248 | 17,9444 | 6,8541 | 0,003106 | 1011,6 | 81433,2 | 2,50786 |
| 323 | 104329 | 33698267 | 17,9722 | 6,8612 | 0,003096 | 1014,7 | 81939,8 | 2,50920 |
| 324 | 104976 | 34012224 | 18,0000 | 6,8683 | 0,003086 | 1017,9 | 82448,0 | 2,51055 |
| 325 | 105625 | 34328125 | 18,0278 | 6,8753 | 0,003077 | 1021,0 | 82957,7 | 2,51188 |
| 326 | 106276 | 34645976 | 18,0555 | 6,8824 | 0,003067 | 1024,2 | 83469,0 | 2,51322 |
| 327 | 106929 | 34965783 | 18,0831 | 6,8894 | 0,003058 | 1027,3 | 83981,8 | 2,51455 |
| 328 | 107584 | 35287552 | 18,1108 | 6,8964 | 0,003049 | 1030,4 | 84496,3 | 2,51587 |
| 329 | 108241 | 35611289 | 18,1384 | 6,9034 | 0,003040 | 1033,6 | 85012,3 | 2,51720 |
| 330 | 108900 | 35937000 | 18,1659 | 6,9104 | 0,003030 | 1036,7 | 85529,9 | 2,51851 |
| 331 | 109561 | 36264691 | 18,1934 | 6,9174 | 0,003021 | 1039,9 | 86049,0 | 2,51983 |
| 332 | 110224 | 36594368 | 18,2209 | 6,9244 | 0,003012 | 1043,0 | 86569,7 | 2,52114 |
| 333 | 110889 | 36926037 | 18,2483 | 6,9313 | 0,003003 | 1046,2 | 87092,0 | 2,52244 |
| 334 | 111556 | 37259704 | 18,2757 | 6,9382 | 0,002994 | 1049,3 | 87615,9 | 2,52375 |
| 335 | 112225 | 37595375 | 18,3030 | 6,9451 | 0,002985 | 1052,4 | 88141,3 | 2,52504 |
| 336 | 112896 | 37933056 | 18,3303 | 6,9521 | 0,002976 | 1055,6 | 88668,3 | 2,52634 |
| 337 | 113569 | 38272753 | 18,3576 | 6,9589 | 0,002967 | 1058,7 | 89196,9 | 2,52763 |
| 338 | 114244 | 38614472 | 18,3848 | 6,9658 | 0,002959 | 1061,9 | 89727,0 | 2,52892 |
| 339 | 114921 | 38958219 | 18,4120 | 6,9727 | 0,002950 | 1065,0 | 90258,7 | 2,53020 |
| 340 | 115600 | 39304000 | 18,4391 | 6,9795 | 0,002941 | 1068,1 | 90792,0 | 2,53148 |
| 341 | 116281 | 39651821 | 18,4662 | 6,9864 | 0,002933 | 1071,3 | 91326,9 | 2,53275 |
| 342 | 116964 | 40001688 | 18,4932 | 6,9932 | 0,002924 | 1074,4 | 91863,3 | 2,53403 |
| 343 | 117649 | 40353607 | 18,5203 | 7,0000 | 0,002915 | 1077,6 | 92401,3 | 2,53529 |
| 344 | 118336 | 40707584 | 18,5472 | 7,0068 | 0,002907 | 1080,7 | 92940,9 | 2,53656 |
| 345 | 119025 | 41063625 | 18,5742 | 7,0136 | 0,002899 | 1083,8 | 93482,0 | 2,53782 |
| 346 | 119716 | 41421736 | 18,6011 | 7,0203 | 0,002890 | 1087,0 | 94024,7 | 2,53908 |
| 347 | 120409 | 41781923 | 18,6279 | 7,0271 | 0,002882 | 1090,1 | 94569,0 | 2,54033 |
| 348 | 121104 | 42144192 | 18,6548 | 7,0338 | 0,002874 | 1093,3 | 95114,9 | 2,54158 |
| 349 | 121801 | 42508549 | 18,6815 | 7,0406 | 0,002865 | 1096,4 | 95662,3 | 2,54283 |
| 350 | 122500 | 42875000 | 18,7083 | 7,0473 | 0,002857 | 1099,6 | 96211,3 | 2,54407 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 351 | 123201 | 43243551 | 18,7350 | 7,0540 | 0,002849 | 1102,7 | 96761,8 | 2,54531 |
| 352 | 123904 | 43614208 | 18,7617 | 7,0607 | 0,002841 | 1105,8 | 97314,0 | 2,54654 |
| 353 | 124609 | 43986977 | 18,7883 | 7,0674 | 0,002833 | 1109,0 | 97867,7 | 2,54777 |
| 354 | 125316 | 44361864 | 18,8149 | 7,0740 | 0,002825 | 1112,1 | 98423,0 | 2,54900 |
| 355 | 126025 | 44738875 | 18,8414 | 7,0807 | 0,002817 | 1115,3 | 98979,8 | 2,55023 |
| 356 | 126736 | 45118016 | 18,8680 | 7,0873 | 0,002809 | 1118,4 | 99538,2 | 2,55145 |
| 357 | 127449 | 45499293 | 18,8944 | 7,0940 | 0,002801 | 1121,5 | 100098 | 2,55267 |
| 358 | 128164 | 45882712 | 18,9209 | 7,1006 | 0,002793 | 1124,7 | 100660 | 2,55388 |
| 359 | 128881 | 46268279 | 18,9473 | 7,1072 | 0,002786 | 1127,8 | 101223 | 2,55509 |
| 360 | 129600 | 46656000 | 18,9737 | 7,1138 | 0,002778 | 1131,0 | 101788 | 2,55630 |
| 361 | 130321 | 47045881 | 19,0000 | 7,1204 | 0,002770 | 1134,1 | 102354 | 2,55751 |
| 362 | 131044 | 47437928 | 19,0263 | 7,1269 | 0,002762 | 1137,3 | 102922 | 2,55871 |
| 363 | 131769 | 47832147 | 19,0526 | 7,1335 | 0,002755 | 1140,4 | 103491 | 2,55991 |
| 364 | 132496 | 48228544 | 19,0788 | 7,1400 | 0,002747 | 1143,5 | 104062 | 2,56110 |
| 365 | 133225 | 48627125 | 19,1050 | 7,1466 | 0,002740 | 1146,7 | 104635 | 2,56229 |
| 366 | 133956 | 49027896 | 19,1311 | 7,1531 | 0,002732 | 1149,8 | 105209 | 2,56348 |
| 367 | 134689 | 49430863 | 19,1572 | 7,1596 | 0,002725 | 1153,0 | 105784 | 2,56467 |
| 368 | 135424 | 49836032 | 19,1833 | 7,1661 | 0,002717 | 1156,1 | 106362 | 2,56585 |
| 369 | 136161 | 50243409 | 19,2094 | 7,1726 | 0,002710 | 1159,2 | 106941 | 2,56703 |
| 370 | 136900 | 50653000 | 19,2354 | 7,1791 | 0,002703 | 1162,4 | 107521 | 2,56820 |
| 371 | 137641 | 51064811 | 19,2614 | 7,1855 | 0,002695 | 1165,5 | 108103 | 2,56937 |
| 372 | 138384 | 51478848 | 19,2873 | 7,1920 | 0,002688 | 1168,7 | 108687 | 2,57054 |
| 373 | 139129 | 51895117 | 19,3132 | 7,1984 | 0,002681 | 1171,8 | 109272 | 2,57171 |
| 374 | 139876 | 52313624 | 19,3391 | 7,2048 | 0,002674 | 1175,0 | 109858 | 2,57287 |
| 375 | 140625 | 52734375 | 19,3649 | 7,2112 | 0,002667 | 1178,1 | 110447 | 2,57403 |
| 376 | 141376 | 53157376 | 19,3907 | 7,2177 | 0,002660 | 1181,2 | 111036 | 2,57519 |
| 377 | 142129 | 53582633 | 19,4165 | 7,2240 | 0,002653 | 1184,4 | 111628 | 2,57634 |
| 378 | 142884 | 54010152 | 19,4422 | 7,2304 | 0,002646 | 1187,5 | 112221 | 2,57749 |
| 379 | 143641 | 54439939 | 19,4679 | 7,2368 | 0,002639 | 1190,7 | 112815 | 2,57864 |
| 380 | 144400 | 54872000 | 19,4936 | 7,2432 | 0,002632 | 1193,8 | 113411 | 2,57978 |
| 381 | 145161 | 55306341 | 19,5192 | 7,2495 | 0,002625 | 1196,9 | 114009 | 2,58093 |
| 382 | 145924 | 55742968 | 19,5448 | 7,2558 | 0,002618 | 1200,1 | 114608 | 2,58206 |
| 383 | 146689 | 56181887 | 19,5704 | 7,2622 | 0,002611 | 1203,2 | 115209 | 2,58320 |
| 384 | 147456 | 56623104 | 19,5959 | 7,2685 | 0,002604 | 1206,4 | 115812 | 2,58433 |
| 385 | 148225 | 57066625 | 19,6214 | 7,2748 | 0,002597 | 1209,5 | 116416 | 2,58546 |
| 386 | 148996 | 57512456 | 19,6469 | 7,2811 | 0,002591 | 1212,7 | 117021 | 2,58659 |
| 387 | 149769 | 57960603 | 19,6723 | 7,2874 | 0,002584 | 1215,8 | 117628 | 2,58771 |
| 388 | 150544 | 58411072 | 19,6977 | 7,2936 | 0,002577 | 1218,9 | 118237 | 2,58883 |
| 389 | 151321 | 58863869 | 19,7231 | 7,2999 | 0,002571 | 1222,1 | 118847 | 2,58995 |
| 390 | 152100 | 59319000 | 19,7484 | 7,3061 | 0,002564 | 1225,2 | 119459 | 2,59106 |
| 391 | 152881 | 59776471 | 19,7737 | 7,3124 | 0,002558 | 1228,4 | 120072 | 2,59218 |
| 392 | 153664 | 60236288 | 19,7990 | 7,3186 | 0,002551 | 1231,5 | 120687 | 2,59329 |
| 393 | 154449 | 60698457 | 19,8242 | 7,3248 | 0,002545 | 1234,6 | 121304 | 2,59439 |
| 394 | 155236 | 61162984 | 19,8494 | 7,3310 | 0,002538 | 1237,8 | 121922 | 2,59550 |
| 395 | 156025 | 61629875 | 19,8746 | 7,3372 | 0,002532 | 1240,9 | 122542 | 2,59660 |
| 396 | 156816 | 62099136 | 19,8997 | 7,3434 | 0,002525 | 1244,1 | 123163 | 2,59770 |
| 397 | 157609 | 62570773 | 19,9249 | 7,3496 | 0,002519 | 1247,2 | 123786 | 2,59879 |
| 398 | 158404 | 63044792 | 19,9499 | 7,3558 | 0,002526 | 1250,4 | 124410 | 2,59988 |
| 399 | 159201 | 63521199 | 19,9750 | 7,3619 | 0,002506 | 1253,5 | 125036 | 2,60097 |
| 400 | 160000 | 64000000 | 20,0000 | 7,3681 | 0,002500 | 1256,6 | 125664 | 2,60206 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 401 | 160801 | 64481201 | 20,0250 | 7,3742 | 0,002494 | 1259,8 | 126293 | 2,60314 |
| 402 | 161604 | 64964808 | 20,0499 | 7,3803 | 0,002488 | 1262,9 | 126923 | 2,60423 |
| 403 | 162409 | 65450827 | 20,0749 | 7,3864 | 0,002481 | 1266,1 | 127556 | 2,60531 |
| 404 | 163216 | 65939264 | 20,0998 | 7,3925 | 0,002475 | 1269,2 | 128190 | 2,60638 |
| 405 | 164025 | 66430125 | 20,1246 | 7,3986 | 0,002469 | 1272,3 | 128825 | 2,60746 |
| 406 | 164836 | 66923416 | 20,1494 | 7,4047 | 0,002463 | 1275,5 | 129462 | 2,60853 |
| 407 | 165649 | 67419143 | 20,1742 | 7,4108 | 0,002457 | 1278,6 | 130100 | 2,60959 |
| 408 | 166464 | 67917312 | 20,1990 | 7,4169 | 0,002451 | 1281,8 | 130741 | 2,61066 |
| 409 | 167281 | 68417929 | 20,2237 | 7,4229 | 0,002445 | 1284,9 | 131382 | 2,61172 |
| 410 | 168100 | 68921000 | 20,2485 | 7,4290 | 0,002439 | 1288,1 | 132025 | 2,61278 |
| 411 | 168921 | 69426531 | 20,2731 | 7,4350 | 0,002433 | 1291,2 | 132670 | 2,61384 |
| 412 | 169744 | 69934528 | 20,2978 | 7,4410 | 0,002427 | 1294,3 | 133317 | 2,61490 |
| 413 | 170569 | 70444997 | 20,3224 | 7,4470 | 0,002421 | 1297,5 | 133965 | 2,61595 |
| 414 | 171396 | 70957944 | 20,3470 | 7,4530 | 0,002415 | 1300,6 | 134614 | 2,61700 |
| 415 | 172225 | 71473375 | 20,3715 | 7,4590 | 0,002410 | 1303,8 | 135265 | 2,61805 |
| 416 | 173056 | 71991296 | 20,3961 | 7,4650 | 0,002404 | 1306,9 | 135918 | 2,61909 |
| 417 | 173889 | 72511713 | 20,4206 | 7,4710 | 0,002398 | 1310,0 | 136572 | 2,62014 |
| 418 | 174724 | 73034632 | 20,4450 | 7,4770 | 0,002392 | 1313,2 | 137228 | 2,62118 |
| 419 | 175561 | 73560059 | 20,4695 | 7,4829 | 0,002387 | 1316,3 | 137885 | 2,62221 |
| 420 | 176400 | 74088000 | 20,4939 | 7,4889 | 0,002381 | 1319,5 | 138544 | 2,62325 |
| 421 | 177241 | 74618461 | 20,5183 | 7,4948 | 0,002375 | 1322,6 | 139205 | 2,62428 |
| 422 | 178084 | 75151448 | 20,5426 | 7,5007 | 0,002370 | 1325,8 | 139867 | 2,62531 |
| 423 | 178929 | 75686967 | 20,5670 | 7,5067 | 0,002364 | 1328,9 | 140531 | 2,62634 |
| 424 | 179776 | 76225024 | 20,5913 | 7,5126 | 0,002358 | 1332,0 | 141196 | 2,62737 |
| 425 | 180625 | 76765625 | 20,6155 | 7,5185 | 0,002353 | 1335,2 | 141863 | 2,62839 |
| 426 | 181476 | 77308776 | 20,6398 | 7,5244 | 0,002347 | 1338,3 | 142531 | 2,62941 |
| 427 | 182329 | 77854483 | 20,6640 | 7,5302 | 0,002342 | 1341,5 | 143201 | 2,63043 |
| 428 | 183184 | 78402752 | 20,6882 | 7,5361 | 0,002336 | 1344,6 | 143872 | 2,63144 |
| 429 | 184041 | 78953589 | 20,7123 | 7,5420 | 0,002331 | 1347,7 | 144545 | 2,63246 |
| 430 | 184900 | 79507000 | 20,7364 | 7,5478 | 0,002326 | 1350,9 | 145220 | 2,63347 |
| 431 | 185761 | 80062991 | 20,7605 | 7,5537 | 0,002320 | 1354,0 | 145896 | 2,63448 |
| 432 | 186624 | 80621568 | 20,7846 | 7,5595 | 0,002315 | 1357,2 | 146574 | 2,63548 |
| 433 | 187489 | 81182737 | 20,8087 | 7,5654 | 0,002309 | 1360,3 | 147254 | 2,63649 |
| 434 | 188356 | 81746504 | 20,8327 | 7,5712 | 0,002304 | 1363,5 | 147934 | 2,63749 |
| 435 | 189225 | 82312875 | 20,8567 | 7,5770 | 0,002299 | 1366,6 | 148617 | 2,63849 |
| 436 | 190096 | 82881856 | 20,8806 | 7,5828 | 0,002294 | 1369,7 | 149301 | 2,63949 |
| 437 | 190969 | 83453453 | 20,9045 | 7,5886 | 0,002288 | 1372,9 | 149987 | 2,64048 |
| 438 | 191844 | 84027672 | 20,9284 | 7,5944 | 0,002283 | 1376,0 | 150674 | 2,64147 |
| 439 | 192721 | 84604519 | 20,9523 | 7,6001 | 0,002278 | 1379,2 | 151363 | 2,64246 |
| 440 | 193600 | 85184000 | 20,9762 | 7,6059 | 0,002273 | 1382,3 | 152053 | 2,64345 |
| 441 | 194481 | 85766121 | 21,0000 | 7,6117 | 0,002268 | 1385,4 | 152745 | 2,64444 |
| 442 | 195364 | 86350888 | 21,0238 | 7,6174 | 0,002262 | 1388,6 | 153439 | 2,64542 |
| 443 | 196249 | 86938307 | 21,0476 | 7,6232 | 0,002257 | 1391,7 | 154134 | 2,64640 |
| 444 | 197136 | 87528384 | 21,0713 | 7,6289 | 0,002252 | 1394,9 | 154830 | 2,64738 |
| 445 | 198025 | 88121125 | 21,0950 | 7,6346 | 0,002247 | 1398,0 | 155528 | 2,64836 |
| 446 | 198916 | 88716536 | 21,1187 | 7,6403 | 0,002242 | 1401,2 | 156228 | 2,64933 |
| 447 | 199809 | 89314623 | 21,1424 | 7,6460 | 0,002237 | 1404,3 | 156930 | 2,65031 |
| 448 | 200704 | 89915392 | 21,1660 | 7,6517 | 0,002232 | 1407,4 | 157633 | 2,65128 |
| 449 | 201601 | 90518849 | 21,1896 | 7,6574 | 0,002227 | 1410,6 | 158337 | 2,65225 |
| 450 | 202500 | 91125000 | 21,2132 | 7,6631 | 0,002222 | 1413,7 | 159043 | 2,65321 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 451 | 203401 | 91733851 | 21,2368 | 7,6688 | 0,002217 | 1416,9 | 159751 | 2,65418 |
| 452 | 204304 | 92345408 | 21,2603 | 7,6744 | 0,002212 | 1420,0 | 160460 | 2,65514 |
| 453 | 205209 | 92959677 | 21,2838 | 7,6801 | 0,002208 | 1423,1 | 161171 | 2,65610 |
| 454 | 206116 | 93576664 | 21,3073 | 7,6857 | 0,002203 | 1426,3 | 161883 | 2,65706 |
| 455 | 207025 | 94196375 | 21,3307 | 7,6914 | 0,002198 | 1429,4 | 162597 | 2,65801 |
| 456 | 207936 | 94818816 | 21,3542 | 7,6970 | 0,002193 | 1432,6 | 163313 | 2,65896 |
| 457 | 208849 | 95443993 | 21,3776 | 7,7026 | 0,002188 | 1435,7 | 164030 | 2,65992 |
| 458 | 209764 | 96071912 | 21,4009 | 7,7082 | 0,002183 | 1438,8 | 164748 | 2,66087 |
| 459 | 210681 | 96702579 | 21,4243 | 7,7138 | 0,002179 | 1442,0 | 165468 | 2,66181 |
| 460 | 211600 | 97336000 | 21,4476 | 7,7194 | 0,002174 | 1445,1 | 166190 | 2,66276 |
| 461 | 212521 | 97972181 | 21,4709 | 7,7250 | 0,002169 | 1448,3 | 166914 | 2,66370 |
| 462 | 213444 | 98611128 | 21,4942 | 7,7306 | 0,002165 | 1451,4 | 167639 | 2,66464 |
| 463 | 214369 | 99252847 | 21,5174 | 7,7362 | 0,002160 | 1454,6 | 168365 | 2,66558 |
| 464 | 215296 | 99897344 | 21,5407 | 7,7418 | 0,002155 | 1457,7 | 169093 | 2,66652 |
| 465 | 216225 | 100544625 | 21,5639 | 7,7473 | 0,002151 | 1460,8 | 169823 | 2,66745 |
| 466 | 217156 | 101194696 | 21,5870 | 7,7529 | 0,002146 | 1464,0 | 170554 | 2,66839 |
| 467 | 218089 | 101847563 | 21,6102 | 7,7584 | 0,002141 | 1467,1 | 171287 | 2,66932 |
| 468 | 219024 | 102503232 | 21,6333 | 7,7639 | 0,002137 | 1470,3 | 172021 | 2,67025 |
| 469 | 219961 | 103161709 | 21,6564 | 7,7695 | 0,002132 | 1473,4 | 172757 | 2,67117 |
| 470 | 220900 | 103823000 | 21,6795 | 7,7750 | 0,002128 | 1476,5 | 173494 | 2,67210 |
| 471 | 221841 | 104487111 | 21,7025 | 7,7805 | 0,002123 | 1479,7 | 174234 | 2,67302 |
| 472 | 222784 | 105154048 | 21,7256 | 7,7860 | 0,002119 | 1482,8 | 174974 | 2,67394 |
| 473 | 223729 | 105823817 | 21,7486 | 7,7915 | 0,002114 | 1486,0 | 175716 | 2,67486 |
| 474 | 224676 | 106496424 | 21,7715 | 7,7970 | 0,002110 | 1489,1 | 176460 | 2,67578 |
| 475 | 225625 | 107171875 | 21,7945 | 7,8025 | 0,002105 | 1492,3 | 177205 | 2,67669 |
| 476 | 226576 | 107850176 | 21,8174 | 7,8079 | 0,002101 | 1495,4 | 177952 | 2,67761 |
| 477 | 227529 | 108531333 | 21,8403 | 7,8134 | 0,002096 | 1498,5 | 178701 | 2,67852 |
| 478 | 228484 | 109215352 | 21,8632 | 7,8188 | 0,002092 | 1501,7 | 179451 | 2,67943 |
| 479 | 229441 | 109902239 | 21,8861 | 7,8243 | 0,002088 | 1504,8 | 180203 | 2,68034 |
| 480 | 230400 | 110592000 | 21,9089 | 7,8297 | 0,002083 | 1508,0 | 180956 | 2,68124 |
| 481 | 231361 | 111284641 | 21,9317 | 7,8352 | 0,002079 | 1511,1 | 181711 | 2,68215 |
| 482 | 232324 | 111980168 | 21,9545 | 7,8406 | 0,002075 | 1514,2 | 182467 | 2,68305 |
| 483 | 233289 | 112678587 | 21,9773 | 7,8460 | 0,002070 | 1517,4 | 183225 | 2,68395 |
| 484 | 234256 | 113379904 | 22,0000 | 7,8514 | 0,002066 | 1520,5 | 183984 | 2,68485 |
| 485 | 235225 | 114084125 | 22,0227 | 7,8568 | 0,002062 | 1523,7 | 184745 | 2,68574 |
| 486 | 236196 | 114791256 | 22,0454 | 7,8622 | 0,002058 | 1526,8 | 185508 | 2,68664 |
| 487 | 237169 | 115501303 | 22,0681 | 7,8676 | 0,002053 | 1530,0 | 186272 | 2,68753 |
| 488 | 238144 | 116214272 | 22,0907 | 7,8730 | 0,002049 | 1533,1 | 187038 | 2,68842 |
| 489 | 239121 | 116930169 | 22,1133 | 7,8784 | 0,002045 | 1536,2 | 187805 | 2,68931 |
| 490 | 240100 | 117649000 | 22,1359 | 7,8837 | 0,002041 | 1539,4 | 188574 | 2,69020 |
| 491 | 241081 | 118370771 | 22,1585 | 7,8891 | 0,002037 | 1542,5 | 189345 | 2,69108 |
| 492 | 242064 | 119095488 | 22,1811 | 7,8944 | 0,002033 | 1545,7 | 190117 | 2,69197 |
| 493 | 243049 | 119823157 | 22,2036 | 7,8998 | 0,002028 | 1548,8 | 190890 | 2,69285 |
| 494 | 244036 | 120553784 | 22,2261 | 7,9051 | 0,002024 | 1551,9 | 191665 | 2,69373 |
| 495 | 245025 | 121287375 | 22,2486 | 7,9105 | 0,002020 | 1555,1 | 192442 | 2,69461 |
| 496 | 246016 | 122023936 | 22,2711 | 7,9158 | 0,002016 | 1558,2 | 193221 | 2,69548 |
| 497 | 247009 | 122763473 | 22,2935 | 7,9211 | 0,002012 | 1561,4 | 194000 | 2,69636 |
| 498 | 248004 | 123505992 | 22,3159 | 7,9264 | 0,002008 | 1564,5 | 194782 | 2,69723 |
| 499 | 249001 | 124251499 | 22,3383 | 7,9317 | 0,002004 | 1567,7 | 195565 | 2,69810 |
| 500 | 250000 | 125000000 | 22,3607 | 7,9370 | 0,002000 | 1570,8 | 196350 | 2,69897 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 501 | 251001 | 125751501 | 22,3830 | 7,9423 | 0,001996 | 1573,9 | 197136 | 2,69984 |
| 502 | 252004 | 126506008 | 22,4054 | 7,9476 | 0,001992 | 1577,1 | 197923 | 2,70070 |
| 503 | 253009 | 127263527 | 22,4277 | 7,9528 | 0,001988 | 1580,2 | 198713 | 2,70157 |
| 504 | 254016 | 128024064 | 22,4499 | 7,9581 | 0,001984 | 1583,4 | 199504 | 2,70243 |
| 505 | 255025 | 128787625 | 22,4722 | 7,9634 | 0,001980 | 1586,5 | 200296 | 2,70329 |
| 506 | 256036 | 129554216 | 22,4944 | 7,9686 | 0,001976 | 1589,6 | 201090 | 2,70415 |
| 507 | 257049 | 130323843 | 22,5167 | 7,9739 | 0,001972 | 1592,8 | 201886 | 2,70501 |
| 508 | 258064 | 131096512 | 22,5389 | 7,9791 | 0,001969 | 1595,9 | 202683 | 2,70586 |
| 509 | 259081 | 131872229 | 22,5610 | 7,9843 | 0,001965 | 1599,1 | 203482 | 2,70672 |
| 510 | 260100 | 132651000 | 22,5832 | 7,9896 | 0,001961 | 1602,2 | 204282 | 2,70757 |
| 511 | 261121 | 133432831 | 22,6053 | 7,9948 | 0,001957 | 1605,4 | 205084 | 2,70842 |
| 512 | 262144 | 134217728 | 22,6274 | 8,0000 | 0,001953 | 1608,5 | 205887 | 2,70927 |
| 513 | 263169 | 135005697 | 22,6495 | 8,0052 | 0,001949 | 1611,6 | 206692 | 2,71012 |
| 514 | 264196 | 135796744 | 22,6716 | 8,0104 | 0,001946 | 1614,8 | 207499 | 2,71096 |
| 515 | 265225 | 136590875 | 22,6936 | 8,0156 | 0,001942 | 1617,9 | 208307 | 2,71181 |
| 516 | 266256 | 137388096 | 22,7156 | 8,0208 | 0,001938 | 1621,1 | 209117 | 2,71265 |
| 517 | 267289 | 138188413 | 22,7376 | 8,0260 | 0,001934 | 1624,2 | 209928 | 2,71349 |
| 518 | 268324 | 138991832 | 22,7596 | 8,0311 | 0,001931 | 1627,3 | 210741 | 2,71433 |
| 519 | 269361 | 139798359 | 22,7816 | 8,0363 | 0,001927 | 1630,5 | 211556 | 2,71517 |
| 520 | 270400 | 140608000 | 22,8035 | 8,0415 | 0,001923 | 1633,6 | 212372 | 2,71600 |
| 521 | 271441 | 141420761 | 22,8254 | 8,0466 | 0,001919 | 1636,8 | 213189 | 2,71684 |
| 522 | 272484 | 142236648 | 22,8473 | 8,0517 | 0,001916 | 1639,9 | 214008 | 2,71767 |
| 523 | 273529 | 143055667 | 22,8692 | 8,0569 | 0,001912 | 1643,1 | 214829 | 2,71850 |
| 524 | 274576 | 143877824 | 22,8910 | 8,0620 | 0,001908 | 1646,2 | 215651 | 2,71933 |
| 525 | 275625 | 144703125 | 22,9129 | 8,0671 | 0,001905 | 1649,3 | 216475 | 2,72016 |
| 526 | 276676 | 145531576 | 22,9347 | 8,0723 | 0,001901 | 1652,5 | 217301 | 2,72099 |
| 527 | 277729 | 146363183 | 22,9565 | 8,0774 | 0,001898 | 1655,6 | 218128 | 2,72181 |
| 528 | 278784 | 147197952 | 22,9783 | 8,0825 | 0,001894 | 1658,8 | 218956 | 2,72263 |
| 529 | 279841 | 148035889 | 23,0000 | 8,0876 | 0,001890 | 1661,9 | 219787 | 2,72346 |
| 530 | 280900 | 148877000 | 23,0217 | 8,0927 | 0,001887 | 1665,0 | 220618 | 2,72428 |
| 531 | 281961 | 149721291 | 23,0434 | 8,0978 | 0,001883 | 1668,2 | 221452 | 2,72509 |
| 532 | 283024 | 150568768 | 23,0651 | 8,1028 | 0,001880 | 1671,3 | 222287 | 2,72591 |
| 533 | 284089 | 151419437 | 23,0868 | 8,1079 | 0,001876 | 1674,5 | 223123 | 2,72673 |
| 534 | 285156 | 152273304 | 23,1084 | 8,1130 | 0,001873 | 1677,6 | 223961 | 2,72754 |
| 535 | 286225 | 153130375 | 23,1301 | 8,1180 | 0,001869 | 1680,8 | 224801 | 2,72835 |
| 536 | 287296 | 153990656 | 23,1517 | 8,1231 | 0,001866 | 1683,9 | 225642 | 2,72916 |
| 537 | 288369 | 154854153 | 23,1733 | 8,1281 | 0,001862 | 1687,0 | 226484 | 2,72997 |
| 538 | 289444 | 155720872 | 23,1948 | 8,1332 | 0,001859 | 1690,2 | 227329 | 2,73078 |
| 539 | 290521 | 156590819 | 23,2164 | 8,1382 | 0,001855 | 1693,3 | 228175 | 2,73159 |
| 540 | 291600 | 157464000 | 23,2379 | 8,1433 | 0,001852 | 1696,5 | 229022 | 2,73239 |
| 541 | 292681 | 158340421 | 23,2594 | 8,1483 | 0,001848 | 1699,6 | 229871 | 2,73320 |
| 542 | 293764 | 159220088 | 23,2809 | 8,1533 | 0,001845 | 1702,7 | 230722 | 2,73400 |
| 543 | 294849 | 160103007 | 23,3024 | 8,1583 | 0,001842 | 1705,9 | 231574 | 2,73480 |
| 544 | 295936 | 160989184 | 23,3238 | 8,1633 | 0,001838 | 1709,0 | 232428 | 2,73560 |
| 545 | 297025 | 161878625 | 23,3452 | 8,1683 | 0,001835 | 1712,2 | 233283 | 2,73640 |
| 546 | 298116 | 162771336 | 23,3666 | 8,1733 | 0,001832 | 1715,3 | 234140 | 2,73719 |
| 547 | 299209 | 163667323 | 23,3880 | 8,1783 | 0,001828 | 1718,5 | 234998 | 2,73799 |
| 548 | 300304 | 164566592 | 23,4094 | 8,1833 | 0,001825 | 1721,6 | 235858 | 2,73878 |
| 549 | 301401 | 165469149 | 23,4307 | 8,1882 | 0,001822 | 1724,7 | 236720 | 2,73957 |
| 550 | 302500 | 166375000 | 23,4521 | 8,1932 | 0,001818 | 1727,9 | 237583 | 2,74036 |

| $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 303601 | 167284151 | 23,4734 | 8,1982 | 0,001815 | 1731,0 | 238448 | 2,74115 |
| 304704 | 168196608 | 23,4947 | 8,2031 | 0,001812 | 1734,2 | 239314 | 2,74194 |
| 305809 | 169112377 | 23,5160 | 8,2081 | 0,001808 | 1737,3 | 240182 | 2,74273 |
| 306916 | 170031464 | 23,5372 | 8,2130 | 0,001805 | 1740,4 | 241051 | 2,74351 |
| 308025 | 170953875 | 23,5584 | 8,2180 | 0,001802 | 1743,6 | 241922 | 2,74429 |
| 309136 | 171879616 | 23,5797 | 8,2229 | 0,001799 | 1746,7 | 242795 | 2,74507 |
| 310249 | 172808693 | 23,6008 | 8,2278 | 0,001795 | 1749,9 | 243669 | 2,74586 |
| 311364 | 173741112 | 23,6220 | 8,2327 | 0,001792 | 1753,0 | 244545 | 2,74663 |
| 312481 | 174676879 | 23,6432 | 8,2377 | 0,001789 | 1756,2 | 245422 | 2,74741 |
| 313600 | 175616000 | 23,6643 | 8,2426 | 0,001786 | 1759,3 | 246301 | 2,74819 |
| 314721 | 176558481 | 23,6854 | 8,2475 | 0,001783 | 1762,4 | 247181 | 2,74896 |
| 315844 | 177504328 | 23,7065 | 8,2524 | 0,001779 | 1765,6 | 248063 | 2,74974 |
| 316969 | 178453547 | 23,7276 | 8,2573 | 0,001776 | 1768,7 | 248947 | 2,75051 |
| 318096 | 179406144 | 23,7487 | 8,2621 | 0,001773 | 1771,9 | 249832 | 2,75128 |
| 319225 | 180362125 | 23,7697 | 8,2670 | 0,001770 | 1775,0 | 250719 | 2,75205 |
| 320356 | 181321496 | 23,7908 | 8,2719 | 0,001767 | 1778,1 | 251607 | 2,75282 |
| 321489 | 182284263 | 23,8118 | 8,2768 | 0,001764 | 1781,3 | 252497 | 2,75358 |
| 322624 | 183250432 | 23,8328 | 8,2816 | 0,001761 | 1784,4 | 253388 | 2,75435 |
| 323761 | 184220009 | 23,8537 | 8,2865 | 0,001757 | 1787,6 | 254281 | 2,75511 |
| 324900 | 185193000 | 23,8747 | 8,2913 | 0,001754 | 1790,7 | 255176 | 2,75587 |
| 326041 | 186169411 | 23,8956 | 8,2962 | 0,001751 | 1793,8 | 256072 | 2,75664 |
| 327184 | 187149248 | 23,9165 | 8,3010 | 0,001748 | 1797,0 | 256970 | 2,75740 |
| 328329 | 188132517 | 23,9374 | 8,3059 | 0,001745 | 1800,1 | 257869 | 2,75815 |
| 329476 | 189119224 | 23,9583 | 8,3107 | 0,001742 | 1803,3 | 258770 | 2,75891 |
| 330625 | 190109375 | 23,9792 | 8,3155 | 0,001739 | 1806,4 | 259672 | 2,75967 |
| 331776 | 191102976 | 24,0000 | 8,3203 | 0,001736 | 1809,6 | 260576 | 2,76042 |
| 332929 | 192100033 | 24,0208 | 8,3251 | 0,001733 | 1812,7 | 261482 | 2,76118 |
| 334084 | 193100552 | 24,0416 | 8,3300 | 0,001730 | 1815,8 | 262389 | 2,76193 |
| 335241 | 194104539 | 24,0624 | 8,3348 | 0,001727 | 1819,0 | 263298 | 2,76268 |
| 336400 | 195112000 | 24,0832 | 8,3396 | 0,001724 | 1822,1 | 264208 | 2,76343 |
| 337561 | 196122941 | 24 1039 | 8,3443 | 0,001721 | 1825,3 | 265120 | 2,76418 |
| 338724 | 197137368 | 24,1247 | 8,3491 | 0,001718 | 1828,4 | 266033 | 2,76492 |
| 339889 | 198155287 | 24,1454 | 8,3539 | 0,001715 | 1831,5 | 266948 | 2,76567 |
| 341056 | 199176704 | 24,1661 | 8,3587 | 0,001712 | 1834,7 | 267865 | 2,76641 |
| 342225 | 200201625 | 24,1868 | 8,3634 | 0,001709 | 1837,8 | 268783 | 2,76716 |
| 343396 | 201230056 | 24,2074 | 8,3682 | 0,001706 | 1841,0 | 269703 | 2,76790 |
| 344569 | 202262003 | 24,2281 | 8,3730 | 0,001704 | 1844,1 | 270624 | 2,76864 |
| 345744 | 203297472 | 24,2487 | 8,3777 | 0,001701 | 1847,3 | 271547 | 2,76938 |
| 346921 | 204336469 | 24,2693 | 8,3825 | 0,001698 | 1850,4 | 272471 | 2,77012 |
| 348100 | 205379000 | 24,2899 | 8,3872 | 0,001695 | 1853,5 | 273397 | 2,77085 |
| 349281 | 206425071 | 24,3105 | 8,3919 | 0,001692 | 1856,7 | 274325 | 2,77159 |
| 350464 | 207474688 | 24,3311 | 8,3967 | 0,001689 | 1859,8 | 275254 | 2,77232 |
| 351649 | 208527857 | 24,3516 | 8,4014 | 0,001686 | 1863,0 | 276184 | 2,77305 |
| 352836 | 209584584 | 24,3721 | 8,4061 | 0,001684 | 1866,1 | 277117 | 2,77379 |
| 354025 | 210644875 | 24,3926 | 8,4108 | 0,001681 | 1869,2 | 278051 | 2,77452 |
| 355216 | 211708736 | 24,4131 | 8,4155 | 0,001678 | 1872,4 | 278986 | 2,77525 |
| 356409 | 212776173 | 24,4336 | 8,4202 | 0,001675 | 1875,5 | 279923 | 2,77597 |
| 357604 | 213847192 | 24,4540 | 8,4249 | 0,001672 | 1878,7 | 280862 | 2,77670 |
| 358801 | 214921799 | 24,4745 | 8,4296 | 0,001669 | 1881,8 | 281802 | 2,77743 |
| 360000 | 216000000 | 24,4949 | 8,4343 | 0,001667 | 1885,0 | 282743 | 2,77815 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 601 | 361201 | 217081801 | 24,5153 | 8,4390 | 0,001664 | 1888,1 | 283687 | 2,77887 |
| 602 | 362404 | 218167208 | 24,5357 | 8,4437 | 0,001661 | 1891,2 | 284631 | 2,77960 |
| 603 | 363609 | 219256227 | 24,5561 | 8,4484 | 0,001658 | 1894,4 | 285578 | 2,78032 |
| 604 | 364816 | 220348864 | 24,5764 | 8,4530 | 0,001656 | 1897,5 | 286526 | 2,78104 |
| 605 | 366025 | 221445125 | 24,5967 | 8,4577 | 0,001653 | 1900,7 | 287475 | 2,78176 |
| 606 | 367236 | 222545016 | 24,6171 | 8,4623 | 0,001650 | 1903,8 | 288426 | 2,78247 |
| 607 | 368449 | 223648543 | 24,6374 | 8,4670 | 0,001647 | 1906,9 | 289379 | 2,78319 |
| 608 | 369664 | 224755712 | 24,6577 | 8,4716 | 0,001645 | 1910,1 | 290333 | 2,78390 |
| 609 | 370881 | 225866529 | 24,6779 | 8,4763 | 0,001642 | 1913,2 | 291289 | 2,78462 |
| 610 | 372100 | 226981000 | 24,6982 | 8,4809 | 0,001639 | 1916,4 | 292247 | 2,78533 |
| 611 | 373321 | 228099131 | 24,7184 | 8,4856 | 0,001637 | 1919,5 | 293206 | 2,78604 |
| 612 | 374544 | 229220928 | 24,7386 | 8,4902 | 0,001634 | 1922,7 | 294166 | 2,78675 |
| 613 | 375769 | 230346397 | 24,7588 | 8,4948 | 0,001631 | 1925,8 | 295128 | 2,78746 |
| 614 | 376996 | 231475544 | 24,7790 | 8,4994 | 0,001629 | 1928,9 | 296092 | 2,78817 |
| 615 | 378225 | 232608375 | 24,7992 | 8,5040 | 0,001626 | 1932,1 | 297057 | 2,78888 |
| 616 | 379456 | 233744896 | 24,8193 | 8,5086 | 0,001623 | 1935,2 | 298024 | 2,78958 |
| 617 | 380689 | 234885113 | 24,8395 | 8,5132 | 0,001621 | 1938,4 | 298992 | 2,79029 |
| 618 | 381924 | 236029032 | 24,8596 | 8,5178 | 0,001618 | 1941,5 | 299962 | 2,79099 |
| 619 | 383161 | 237176659 | 24,8797 | 8,5224 | 0,001616 | 1944,6 | 300934 | 2,79169 |
| 620 | 384400 | 238328000 | 24,8998 | 8,5270 | 0,001613 | 1947,8 | 301907 | 2,79239 |
| 621 | 385641 | 239483061 | 24,9199 | 8,5316 | 0,001610 | 1950,9 | 302882 | 2,79309 |
| 622 | 386884 | 240641848 | 24,9399 | 8,5362 | 0,001608 | 1954,1 | 303858 | 2,79379 |
| 623 | 388129 | 241804367 | 24,9600 | 8,5408 | 0,001605 | 1957.2 | 304836 | 2,79449 |
| 624 | 389376 | 242970624 | 24,9800 | 8,5453 | 0,001603 | 1960,4 | 305815 | 2,79518 |
| 625 | 390625 | 244140625 | 25,0000 | 8,5499 | 0,001600 | 1963,5 | 306796 | 2,79588 |
| 626 | 391876 | 245314376 | 25,0200 | 8,5544 | 0,001597 | 1966,6 | 307779 | 2,79657 |
| 627 | 393129 | 246491883 | 25,0400 | 8,5590 | 0,001595 | 1969,8 | 308763 | 2,79727 |
| 628 | 394384 | 247673152 | 25,0599 | 8,5635 | 0,001592 | 1972,9 | 309748 | 2,79796 |
| 629 | 395641 | 248858189 | 25,0799 | 8,5681 | 0,001590 | 1976,1 | 310736 | 2,79865 |
| 630 | 396900 | 250047000 | 25,0998 | 8,5726 | 0,001587 | 1979,2 | 311725 | 2,79934 |
| 631 | 398161 | 251239591 | 25,1197 | 8,5772 | 0,001585 | 1982,3 | 312715 | 2,80003 |
| 632 | 399424 | 252435968 | 25,1396 | 8,5817 | 0,001582 | 1985,5 | 313707 | 2,80072 |
| 633 | 400689 | 253636137 | 25,1595 | 8,5862 | 0,001580 | 1988.6 | 314700 | 2,80140 |
| 634 | 401956 | 254840104 | 25,1794 | 8,5907 | 0,001577 | 1991,8 | 315696 | 2,80209 |
| 635 | 403225 | 256047875 | 25,1992 | 8,5952 | 0,001575 | 1994,9 | 316692 | 2,80277 |
| 636 | 404496 | 257259456 | 25,2190 | 8,5997 | 0,001572 | 1998,1 | 317690 | 2,80346 |
| 637 | 405769 | 258474853 | 25,2389 | 8,6043 | 0,001570 | 2001,2 | 318690 | 2,80414 |
| 638 | 407044 | 259694072 | 25,2587 | 8,6088 | 0,001567 | 2004,3 | 319692 | 2,80482 |
| 639 | 408321 | 260917119 | 25,2784 | 8,6132 | 0,001565 | 2007,5 | 320695 | 2,80550 |
| 640 | 409600 | 262144000 | 25,2982 | 8,6177 | 0,001563 | 2010,6 | 321699 | 2,80618 |
| 641 | 410881 | 263374721 | 25,3180 | 8,6222 | 0,001560 | 2013,8 | 322705 | 2,80686 |
| 642 | 412164 | 264609288 | 25,3377 | 8,6267 | 0,001558 | 2016,9 | 323713 | 2,80754 |
| 643 | 413449 | 265847707 | 25,3574 | 8,6312 | 0,001555 | 2020,0 | 324722 | 2,80821 |
| 644 | 414736 | 267089984 | 25,3772 | 8,6357 | 0,001553 | 2023,2 | 325733 | 2,80889 |
| 645 | 416025 | 268336125 | 25,3969 | 8,6401 | 0,001550 | 2026,3 | 326745 | 2,80956 |
| 646 | 417316 | 269586136 | 25,4165 | 8,6446 | 0,001548 | 2029,5 | 327759 | 2,81023 |
| 647 | 418609 | 270840023 | 25,4362 | 8,6490 | 0,001546 | 2032,6 | 328775 | 2,81090 |
| 648 | 419904 | 272097792 | 25,4558 | 8,6535 | 0,001543 | 2035,8 | 329792 | 2,81158 |
| 649 | 421201 | 273359449 | 25,4755 | 8,6579 | 0,001541 | 2038,9 | 330810 | 2,81224 |
| 650 | 422500 | 274625000 | 25,4951 | 8,6624 | 0,001538 | 2042,0 | 331831 | 2,81291 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 651 | 423801 | 275894451 | 25,5147 | 8,6668 | 0,001536 | 2045,2 | 332853 | 2,81358 |
| 652 | 425104 | 277167808 | 25,5343 | 8,6713 | 0,001534 | 2048,3 | 333876 | 2,81425 |
| 653 | 426409 | 278445077 | 25,5539 | 8,6757 | 0,001531 | 2051,5 | 334901 | 2,81491 |
| 654 | 427716 | 279726264 | 25,5734 | 8,6801 | 0,001529 | 2054,6 | 335927 | 2,81558 |
| 655 | 429025 | 281011375 | 25,5930 | 8,6845 | 0,001527 | 2057,7 | 336955 | 2,81624 |
| 656 | 430336 | 282300416 | 25,6125 | 8,6890 | 0,001524 | 2060,9 | 337985 | 2,81690 |
| 657 | 431649 | 283593393 | 25,6320 | 8,6934 | 0,001522 | 2064,0 | 339016 | 2,81757 |
| 658 | 432964 | 284890312 | 25,6515 | 8,6978 | 0,001520 | 2067,2 | 340049 | 2,81823 |
| 659 | 434281 | 286191179 | 25,6710 | 8,7022 | 0,001517 | 2070,3 | 341084 | 2,81889 |
| 660 | 435600 | 287496000 | 25,6905 | 8,7066 | 0,001515 | 2073,5 | 342119 | 2,81954 |
| 661 | 436921 | 288804781 | 25,7099 | 8,7110 | 0,001513 | 2076,6 | 343157 | 2,82020 |
| 662 | 438244 | 290117528 | 25,7294 | 8,7154 | 0,001511 | 2079,7 | 344196 | 2,82086 |
| 663 | 439569 | 291434247 | 25,7488 | 8,7198 | 0,001508 | 2082,9 | 345237 | 2,82151 |
| 664 | 440896 | 292754944 | 25,7682 | 8,7241 | 0,001506 | 2086,0 | 346279 | 2,82217 |
| 665 | 442225 | 294079625 | 25,7876 | 8,7285 | 0,001504 | 2089,2 | 347323 | 2,82282 |
| 666 | 443556 | 295408296 | 25,8070 | 8,7329 | 0,001502 | 2092,3 | 348368 | 2,82347 |
| 667 | 444889 | 296740963 | 25,8263 | 8,7373 | 0,001499 | 2095,4 | 349415 | 2,82413 |
| 668 | 446224 | 298077632 | 25,8457 | 8,7416 | 0,001497 | 2098,6 | 350464 | 2,82478 |
| 669 | 447561 | 299418309 | 25,8650 | 8,7460 | 0,001495 | 2101,7 | 351514 | 2,82543 |
| 670 | 448900 | 300763000 | 25,8844 | 8,7503 | 0,001493 | 2104,9 | 352565 | 2,82607 |
| 671 | 450241 | 302111711 | 25,9037 | 8,7547 | 0,001490 | 2108,0 | 353618 | 2,82672 |
| 672 | 451584 | 303464448 | 25,9230 | 8,7590 | 0,001488 | 2111,2 | 354673 | 2,82737 |
| 673 | 452929 | 304821217 | 25,9422 | 8,7634 | 0,001486 | 2114,3 | 355730 | 2,82802 |
| 674 | 454276 | 306182024 | 25,9615 | 8,7677 | 0,001484 | 2117,4 | 356788 | 2,82866 |
| 675 | 455625 | 307546875 | 25,9808 | 8,7721 | 0,001481 | 2120,6 | 357847 | 2,82930 |
| 676 | 456976 | 308915776 | 26,0000 | 8,7764 | 0,001479 | 2123,7 | 358908 | 2,82995 |
| 677 | 458329 | 310288733 | 26,0192 | 8,7807 | 0,001477 | 2126,9 | 359971 | 2,83059 |
| 678 | 459684 | 311665752 | 26,0384 | 8,7850 | 0,001475 | 2130,0 | 361035 | 2,83123 |
| 679 | 461041 | 313046839 | 26,0576 | 8,7893 | 0,001473 | 2133,1 | 362101 | 2,83187 |
| 680 | 462400 | 314432000 | 26,0768 | 8,7937 | 0,001471 | 2136,3 | 363168 | 2,83251 |
| 681 | 463761 | 315821241 | 26,0960 | 8,7980 | 0,001468 | 2139,4 | 364237 | 2,83315 |
| 682 | 465124 | 317214568 | 26,1151 | 8,8023 | 0,001466 | 2142,6 | 365308 | 2,83378 |
| 683 | 466489 | 318611987 | 26,1343 | 8,8066 | 0,001464 | 2145,7 | 366380 | 2,83442 |
| 684 | 467856 | 320013504 | 26,1534 | 8,8109 | 0,001462 | 2148,9 | 367453 | 2,83506 |
| 685 | 469225 | 321419125 | 26,1725 | 8,8152 | 0,001460 | 2152,0 | 368528 | 2,83569 |
| 686 | 470596 | 322828856 | 26,1916 | 8,8194 | 0,001458 | 2155,1 | 369605 | 2,83632 |
| 687 | 471969 | 324242703 | 26,2107 | 8,8237 | 0,001456 | 2158,3 | 370684 | 2,83696 |
| 688 | 473344 | 325660672 | 26,2298 | 8,8280 | 0,001453 | 2161,4 | 371764 | 2,83759 |
| 689 | 474721 | 327082769 | 26,2488 | 8,8323 | 0,001451 | 2164,6 | 372845 | 2,83822 |
| 690 | 476100 | 328509000 | 26,2679 | 8,8366 | 0,001449 | 2167,7 | 373928 | 2,83885 |
| 691 | 477481 | 329939371 | 26,2869 | 8,8408 | 0,001447 | 2170,8 | 375013 | 2,83948 |
| 692 | 478864 | 331373888 | 26,3059 | 8,8451 | 0,001445 | 2174,0 | 376099 | 2,84011 |
| 693 | 480249 | 332812557 | 26,3249 | 8,8493 | 0,001443 | 2177,1 | 377187 | 2,84073 |
| 694 | 481636 | 334255384 | 26,3439 | 8,8536 | 0,001441 | 2180,3 | 378276 | 2,84136 |
| 695 | 483025 | 335702375 | 26,3629 | 8,8578 | 0,001439 | 2183,4 | 379367 | 2,84198 |
| 696 | 484416 | 337153536 | 26,3818 | 8,8621 | 0,001437 | 2186,5 | 380459 | 2,84261 |
| 697 | 485809 | 338608873 | 26,4008 | 8,8663 | 0,001435 | 2189,7 | 381554 | 2,84323 |
| 698 | 487204 | 340068392 | 26,4197 | 8,8706 | 0,001433 | 2192,8 | 382649 | 2,84386 |
| 699 | 488601 | 341532099 | 26,4386 | 8,8748 | 0,001431 | 2196,0 | 383746 | 2,84448 |
| 700 | 490000 | 343000000 | 26,4575 | 8,8790 | 0,001429 | 2199,1 | 384845 | 2,84510 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log.n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 701 | 491401 | 344472101 | 26,4764 | 8,8833 | 0,001427 | 2202,3 | 385945 | 2,84572 |
| 702 | 492804 | 345948408 | 26,4953 | 8,8875 | 0,001425 | 2205,4 | 387047 | 2,84634 |
| 703 | 494209 | 347428927 | 26,5141 | 8,8917 | 0,001422 | 2208,5 | 388151 | 2,84696 |
| 704 | 495616 | 348913664 | 26,5330 | 8,8959 | 0,001420 | 2211,7 | 389256 | 2,84757 |
| 705 | 497025 | 350402625 | 26,5518 | 8,9001 | 0,001418 | 2214,8 | 390363 | 2,84819 |
| 706 | 498436 | 351895816 | 26,5707 | 8,9043 | 0,001416 | 2218,0 | 391471 | 2,84880 |
| 707 | 499849 | 353393243 | 26,5895 | 8,9085 | 0,001414 | 2221,1 | 392580 | 2,84942 |
| 708 | 501264 | 354894912 | 26,6083 | 8,9127 | 0,001412 | 2224,2 | 393692 | 2,85003 |
| 709 | 502681 | 356400829 | 26,6271 | 8,9169 | 0,001410 | 2227,4 | 394805 | 2,85065 |
| 710 | 504100 | 357911000 | 26,6458 | 8,9211 | 0,001408 | 2230,5 | 395919 | 2,85126 |
| 711 | 505521 | 359425431 | 26,6646 | 8,9253 | 0,001406 | 2233,7 | 397035 | 2,85187 |
| 712 | 506944 | 360944128 | 26,6833 | 8,9295 | 0,001404 | 2236.8 | 398153 | 2,85248 |
| 713 | 508369 | 362467097 | 26,7021 | 8,9337 | 0,001403 | 2240,0 | 399272 | 2,85309 |
| 714 | 509796 | 363994344 | 26,7208 | 8,9378 | 0,001401 | 2243,1 | 400393 | 2,85370 |
| 715 | 511225 | 365525875 | 26,7395 | 8,9420 | 0,001399 | 2246,2 | 401515 | 2,85431 |
| 716 | 512656 | 367061696 | 26,7582 | 8,9462 | 0,001397 | 2249,4 | 402639 | 2,85491 |
| 717 | 514089 | 368601813 | 26,7769 | 8,9503 | 0,001395 | 2252,5 | 403765 | 2,85552 |
| 718 | 515524 | 370146232 | 26,7955 | 8,9545 | 0,001393 | 2255,7 | 404892 | 2,85612 |
| 719 | 516961 | 371694959 | 26,8142 | 8,9587 | 0,001391 | 2258,8 | 406020 | 2,85673 |
| 720 | 518400 | 373248000 | 26,8328 | 8,9628 | 0,001389 | 2261,9 | 407150 | 2,85733 |
| 721 | 519841 | 374805361 | 26,8514 | 8,9670 | 0,001387 | 2265,1 | 408282 | 2,85794 |
| 722 | 521284 | 376367048 | 26,8701 | 8,9711 | 0,001385 | 2268,2 | 409415 | 2,85854 |
| 723 | 522729 | 377933067 | 26,8887 | 8,9752 | 0,001383 | 2271,4 | 410550 | 2,85914 |
| 724 | 524176 | 379503424 | 26,9072 | 8,9794 | 0,001381 | 2274,5 | 411687 | 2,85974 |
| 725 | 525625 | 381078125 | 26,9258 | 8,9835 | 0,001379 | 2277,7 | 412825 | 2,86034 |
| 726 | 527076 | 382657176 | 26,9444 | 8,9876 | 0,001377 | 2280,8 | 413965 | 2,86094 |
| 727 | 528529 | 384240583 | 26,9629 | 8,9918 | 0,001376 | 2283,9 | 415106 | 2,86153 |
| 728 | 529984 | 385828352 | 26,9815 | 8,9959 | 0,001374 | 2287,1 | 416248 | 2,86213 |
| 729 | 531441 | 387420489 | 27,0000 | 9,0000 | 0,001372 | 2290,2 | 417393 | 2,86273 |
| 730 | 532900 | 389017000 | 27,0185 | 9,0041 | 0,001370 | 2293,4 | 418539 | 2,86332 |
| 731 | 534361 | 390617891 | 27,0370 | 9,0082 | 0,001368 | 2296,5 | 419686 | 2,86392 |
| 732 | 535824 | 392223168 | 27,0555 | 9,0123 | 0,001366 | 2299,6 | 420835 | 2,86451 |
| 733 | 537289 | 393832837 | 27,0740 | 9,0164 | 0,001364 | 2302,8 | 421986 | 2,86510 |
| 734 | 538756 | 395446904 | 27,0924 | 9,0205 | 0,001362 | 2305,9 | 423138 | 2,86570 |
| 735 | 540225 | 397065375 | 27,1109 | 9,0246 | 0,001361 | 2309,1 | 424292 | 2,86629 |
| 736 | 541696 | 398688256 | 27,1293 | 9,0287 | 0,001359 | 2312,2 | 425447 | 2,86688 |
| 737 | 543169 | 400315553 | 27,1477 | 9,0328 | 0.001357 | 2315,4 | 426604 | 2,86747 |
| 738 | 544644 | 401947272 | 27,1662 | 9,0369 | 0,001355 | 2318,5 | 427762 | 2,86806 |
| 739 | 546121 | 403583419 | 27,1846 | 9,0410 | 0,001353 | 2321,6 | 428922 | 2,86864 |
| 740 | 547600 | 405224000 | 27,2029 | 9,0450 | 0,001351 | 2324,8 | 430084 | 2,86923 |
| 741 | 549081 | 406869021 | 27,2213 | 9,0491 | 0,001350 | 2327,9 | 431247 | 2,86982 |
| 742 | 550564 | 408518488 | 27,2397 | 9,0532 | 0,001348 | 2331,1 | 432412 | 2,87040 |
| 743 | 552049 | 410172407 | 27,2580 | 9,0572 | 0,001346 | 2334,2 | 433578 | 2,87099 |
| 744 | 553536 | 411830784 | 27,2764 | 9,0613 | 0,001344 | 2337,3 | 434746 | 2,87157 |
| 745 | 555025 | 413493625 | 27,2947 | 9,0654 | 0,001342 | 2340,5 | 435916 | 2,87216 |
| 746 | 556516 | 415160936 | 27,3130 | 9,0694 | 0,001340 | 2343,6 | 437087 | 2,87274 |
| 747 | 558009 | 416832723 | 27,3313 | 9,0735 | 0,001339 | 2346,8 | 438259 | 2,87332 |
| 748 | 559504 | 418508992 | 27,3496 | 9,0775 | 0,001337 | 2349,9 | 439433 | 2,87390 |
| 749 | 561001 | 420189749 | 27,3679 | 9,0816 | 0,001335 | 2353,1 | 440609 | 2,87448 |
| 750 | 562500 | 421875000 | 27,3861 | 9,0856 | 0,001333 | 2356,2 | 441786 | 2,87506 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 751 | 564001 | 423564751 | 27,4044 | 9,0896 | 0,001332 | 2359,3 | 442965 | 2,87564 |
| 752 | 565504 | 425259008 | 27,4226 | 9,0937 | 0,001330 | 2362,5 | 444146 | 2,87622 |
| 753 | 567009 | 426957777 | 27,4408 | 9,0977 | 0,001328 | 2365,6 | 445328 | 2,87679 |
| 754 | 568516 | 428661064 | 27,4591 | 9,1017 | 0,001326 | 2368,8 | 446511 | 2,87737 |
| 755 | 570025 | 430368875 | 27,4773 | 9,1057 | 0,001325 | 2371,9 | 447697 | 2,87795 |
| 756 | 571536 | 432081216 | 27,4955 | 9,1098 | 0,001323 | 2375,0 | 448883 | 2,87852 |
| 757 | 573049 | 433798093 | 27,5136 | 9,1138 | 0,001321 | 2378,2 | 450072 | 2,87910 |
| 758 | 574564 | 435519512 | 27,5318 | 9,1178 | 0,001319 | 2381,3 | 451262 | 2,87967 |
| 759 | 576081 | 437245479 | 27,5500 | 9,1218 | 0,001318 | 2384,5 | 452453 | 2,88024 |
| 760 | 577600 | 438976000 | 27,5681 | 9,1258 | 0,001316 | 2387,6 | 453646 | 2,88081 |
| 761 | 579121 | 440711081 | 27,5862 | 9,1298 | 0,001314 | 2390,8 | 454841 | 2,88138 |
| 762 | 580644 | 442450728 | 27,6043 | 9,1338 | 0,001312 | 2393,9 | 456037 | 2,88195 |
| 763 | 582169 | 444194947 | 27,6225 | 9,1378 | 0,001311 | 2397,0 | 457234 | 2,88252 |
| 764 | 583696 | 445943744 | 27,6405 | 9,1418 | 0,001309 | 2400,2 | 458434 | 2,88309 |
| 765 | 585225 | 447697125 | 27,6586 | 9,1458 | 0,001307 | 2403,3 | 459635 | 2,88366 |
| 766 | 586756 | 449455096 | 27,6767 | 9,1498 | 0,001306 | 2406,5 | 460837 | 2,88423 |
| 767 | 588289 | 451217663 | 27,6948 | 9,1537 | 0,001304 | 2409,6 | 462041 | 2,88480 |
| 768 | 589824 | 452984832 | 27,7128 | 9,1577 | 0,001302 | 2412,7 | 463247 | 2,88536 |
| 769 | 591361 | 454756609 | 27,7308 | 9,1617 | 0,001300 | 2415,9 | 464454 | 2,88593 |
| 770 | 592900 | 456533000 | 27,7489 | 9,1657 | 0,001299 | 2419,0 | 465663 | 2,88649 |
| 771 | 594441 | 458314011 | 27,7669 | 9,1696 | 0,001297 | 2422,2 | 466873 | 2,88705 |
| 772 | 595984 | 460099648 | 27,7849 | 9,1736 | 0,001295 | 2425,3 | 468085 | 2,88762 |
| 773 | 597529 | 461889917 | 27,8029 | 9,1775 | 0,001294 | 2428,5 | 469298 | 2,88818 |
| 774 | 599076 | 463684824 | 27,8209 | 9,1815 | 0,001292 | 2431,6 | 470513 | 2,88874 |
| 775 | 600625 | 465484375 | 27,8388 | 9,1855 | 0,001290 | 2434,7 | 471730 | 2,88930 |
| 776 | 602176 | 467288576 | 27,8568 | 9,1894 | 0,001289 | 2437,9 | 472948 | 2,88986 |
| 777 | 603729 | 469097433 | 27,8747 | 9,1933 | 0,001287 | 2441,0 | 474168 | 2,89042 |
| 778 | 605284 | 470910952 | 27,8927 | 9,1973 | 0,001285 | 2444,2 | 475389 | 2,89098 |
| 779 | 606841 | 472729139 | 27,9106 | 9,2012 | 0,001284 | 2447,3 | 476612 | 2,89154 |
| 780 | 608400 | 474552000 | 27,9285 | 9,2052 | 0,001282 | 2450,4 | 477836 | 2,89209 |
| 781 | 609961 | 476379541 | 27,9464 | 9,2091 | 0,001280 | 2453,6 | 479062 | 2,89265 |
| 782 | 611524 | 478211768 | 27,9643 | 9,2130 | 0,001279 | 2456,7 | 480290 | 2,89321 |
| 783 | 613089 | 480048687 | 27,9821 | 9,2170 | 0,001277 | 2459,9 | 481519 | 2,89376 |
| 784 | 614656 | 481890304 | 28,0000 | 9,2209 | 0,001276 | 2463,0 | 482750 | 2,89432 |
| 785 | 616225 | 483736625 | 28,0179 | 9,2248 | 0,001274 | 2466,2 | 483982 | 2,89487 |
| 786 | 617796 | 485587656 | 28,0357 | 9,2287 | 0,001272 | 2469,3 | 485216 | 2,89542 |
| 787 | 619369 | 487443403 | 28,0535 | 9,2326 | 0,001271 | 2472,4 | 486451 | 2,89597 |
| 788 | 620944 | 489303872 | 28,0713 | 9,2365 | 0,001269 | 2475,6 | 487688 | 2,89653 |
| 789 | 622521 | 491169069 | 28,0891 | 9,2404 | 0,001267 | 2478,7 | 488927 | 2,89708 |
| 790 | 624100 | 493039000 | 28,1069 | 9,2443 | 0,001266 | 2481,9 | 490167 | 2,89763 |
| 791 | 625681 | 494913671 | 28,1247 | 9,2482 | 0,001264 | 2485,0 | 491409 | 2,89818 |
| 792 | 627264 | 496793088 | 28,1425 | 9,2521 | 0,001263 | 2488,1 | 492652 | 2,89873 |
| 793 | 628849 | 498677257 | 28,1603 | 9,2560 | 0,001261 | 2491,3 | 493897 | 2,89927 |
| 794 | 630436 | 500566184 | 28,1780 | 9,2599 | 0,001259 | 2494,4 | 495143 | 2,89982 |
| 795 | 632025 | 502459875 | 28,1957 | 9,2638 | 0,001258 | 2497,6 | 496391 | 2,90037 |
| 796 | 633616 | 504358336 | 28,2135 | 9,2677 | 0,001256 | 2500,7 | 497641 | 2,90091 |
| 797 | 635209 | 506261573 | 28,2312 | 9,2716 | 0,001255 | 2503,8 | 498892 | 2,90146 |
| 798 | 636804 | 508169592 | 28,2489 | 9,2754 | 0,001253 | 2507,0 | 500145 | 2,90200 |
| 799 | 638401 | 510082399 | 28,2666 | 9,2793 | 0,001252 | 2510,1 | 501399 | 2,90255 |
| 800 | 640000 | 512000000 | 28,2843 | 9,2832 | 0,001250 | 2513,3 | 502655 | 2,90309 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 801 | 641601 | 513922401 | 28,3019 | 9,2870 | 0,001248 | 2516,4 | 503912 | 2,90363 |
| 802 | 643204 | 515849608 | 28,3196 | 9,2909 | 0,001247 | 2519,6 | 505171 | 2,90417 |
| 803 | 644809 | 517781627 | 28,3373 | 9,2948 | 0,001245 | 2522,7 | 506432 | 2,90472 |
| 804 | 646416 | 519718464 | 28,3549 | 9,2986 | 0,001244 | 2525,8 | 507694 | 2,90526 |
| 805 | 648025 | 521660125 | 28,3725 | 9,3025 | 0,001242 | 2529,0 | 508958 | 2,90580 |
| 806 | 649636 | 523606616 | 28,3901 | 9,3063 | 0,001241 | 2532,1 | 510223 | 2,90634 |
| 807 | 651249 | 525557943 | 28,4077 | 9,3102 | 0,001239 | 2535,3 | 511490 | 2,90687 |
| 808 | 652864 | 527514112 | 28,4253 | 9,3140 | 0,001238 | 2538,4 | 512758 | 2,90741 |
| 809 | 654481 | 529475129 | 28,4429 | 9,3179 | 0,001236 | 2541,5 | 514028 | 2,90795 |
| 810 | 656100 | 531441000 | 28,4605 | 9,3217 | 0,001235 | 2544,7 | 515300 | 2,90849 |
| 811 | 657721 | 533411731 | 28,4781 | 9,3255 | 0,001233 | 2547,8 | 516573 | 2,90902 |
| 812 | 659344 | 535387328 | 28,4956 | 9,3294 | 0,001232 | 2551,0 | 517848 | 2,90956 |
| 813 | 660969 | 537367797 | 28,5132 | 9,3332 | 0,001230 | 2554,1 | 519124 | 2,91009 |
| 814 | 662596 | 539353144 | 28,5307 | 9,3370 | 0,001229 | 2557,3 | 520402 | 2,91062 |
| 815 | 664225 | 541343375 | 28,5482 | 9,3408 | 0,001227 | 2560,4 | 521681 | 2,91116 |
| 816 | 665856 | 543338496 | 28,5657 | 9,3447 | 0,001225 | 2563,5 | 522962 | 2,91169 |
| 817 | 667489 | 545338513 | 28,5832 | 9,3485 | 0,001224 | 2566,7 | 524245 | 2,91222 |
| 818 | 669124 | 547343432 | 28,6007 | 9,3523 | 0,001222 | 2569,8 | 525529 | 2,91275 |
| 819 | 670761 | 549353259 | 28,6182 | 9,3561 | 0,001221 | 2573,0 | 526814 | 2,91328 |
| 820 | 672400 | 551368000 | 28,6356 | 9,3599 | 0,001220 | 2576,1 | 528102 | 2,91381 |
| 821 | 674041 | 553387661 | 28,6531 | 9,3637 | 0,001218 | 2579,2 | 529391 | 2,91434 |
| 822 | 675684 | 555412248 | 28,6705 | 9,3675 | 0,001217 | 2582,4 | 530681 | 2,91487 |
| 823 | 677329 | 557441767 | 28,6880 | 9,3713 | 0,001215 | 2585,5 | 531973 | 2,91540 |
| 824 | 678976 | 559476224 | 28,7054 | 9,3751 | 0,001214 | 2588,7 | 533267 | 2,91593 |
| 825 | 680625 | 561515625 | 28,7228 | 9,3789 | 0,001212 | 2591,8 | 534562 | 2,91645 |
| 826 | 682276 | 563559976 | 28,7402 | 9,3827 | 0,001211 | 2595,0 | 535858 | 2,91698 |
| 827 | 683929 | 565609283 | 28,7576 | 9,3865 | 0,001209 | 2598,1 | 537157 | 2,91751 |
| 828 | 685584 | 567663552 | 28,7750 | 9,3902 | 0,001208 | 2601,2 | 538456 | 2,91803 |
| 829 | 687241 | 569722789 | 28,7924 | 9,3940 | 0,001206 | 2604,4 | 539758 | 2,91855 |
| 830 | 688900 | 571787000 | 28,8097 | 9,3978 | 0,001205 | 2607,5 | 541061 | 2,91908 |
| 831 | 690561 | 573856191 | 28,8271 | 9,4016 | 0,001203 | 2610,7 | 542365 | 2,91960 |
| 832 | 692224 | 575930368 | 28,8444 | 9,4053 | 0,001202 | 2613,8 | 543671 | 2,92012 |
| 833 | 693889 | 578009537 | 28,8617 | 9,4091 | 0,001200 | 2616,9 | 544979 | 2,92065 |
| 834 | 695556 | 580093704 | 28,8791 | 9,4129 | 0,001199 | 2620,1 | 546288 | 2,92117 |
| 835 | 697225 | 582182875 | 28,8964 | 9,4166 | 0,001198 | 2623,2 | 547599 | 2,92169 |
| 836 | 698896 | 584277056 | 28,9137 | 9,4204 | 0,001196 | 2626,4 | 548912 | 2,92221 |
| 837 | 700569 | 586376253 | 28,9310 | 9,4241 | 0,001195 | 2629,5 | 550226 | 2,92273 |
| 838 | 702244 | 588480472 | 28,9482 | 9,4279 | 0,001193 | 2632,7 | 551541 | 2,92324 |
| 839 | 703921 | 590589719 | 28,9655 | 9,4316 | 0,001192 | 2635,8 | 552858 | 2,92376 |
| 840 | 705600 | 592704000 | 28,9828 | 9,4354 | 0,001190 | 2638,9 | 554177 | 2,92428 |
| 841 | 707281 | 594823321 | 29,0000 | 9,4391 | 0,001189 | 2642,1 | 555497 | 2,92480 |
| 842 | 708964 | 596947688 | 29,0172 | 9,4429 | 0,001188 | 2645,2 | 556819 | 2,92531 |
| 843 | 710649 | 599077107 | 29,0345 | 9,4466 | 0,001186 | 2648,4 | 558142 | 2,92583 |
| 844 | 712336 | 601211584 | 29,0517 | 9,4503 | 0,001185 | 2651,5 | 559467 | 2,92634 |
| 845 | 714025 | 603351125 | 29,0689 | 9,4541 | 0,001183 | 2654,6 | 560794 | 2,92686 |
| 846 | 715716 | 605495736 | 29,0861 | 9,4578 | 0,001182 | 2657,8 | 562122 | 2,92737 |
| 847 | 717409 | 607645423 | 29,1033 | 9,4615 | 0,001181 | 2660,9 | 563452 | 2,92788 |
| 848 | 719104 | 609800192 | 29,1204 | 9,4652 | 0,001179 | 2664,1 | 564783 | 2,92840 |
| 849 | 720801 | 611960049 | 29,1376 | 9,4690 | 0,001178 | 2667,2 | 566116 | 2,92891 |
| 850 | 722500 | 614125000 | 29,1548 | 9,4727 | 0,001176 | 2670,4 | 567450 | 2,92942 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 851 | 724201 | 616295051 | 29,1719 | 9,4764 | 0,001175 | 2673,5 | 568786 | 2,92993 |
| 852 | 725904 | 618470208 | 29,1890 | 9,4801 | 0,001174 | 2676,6 | 570124 | 2,93044 |
| 853 | 727609 | 620650477 | 29,2062 | 9,4838 | 0,001172 | 2679,8 | 571463 | 2,93095 |
| 854 | 729316 | 622835864 | 29,2233 | 9,4875 | 0,001171 | 2682,9 | 572803 | 2,93146 |
| 855 | 731025 | 625026375 | 29,2404 | 9,4912 | 0,001170 | 2686,1 | 574146 | 2,93197 |
| 856 | 732736 | 627222016 | 29,2575 | 9,4949 | 0,001168 | 2689,2 | 575490 | 2,93247 |
| 857 | 734449 | 629422793 | 29,2746 | 9,4986 | 0,001167 | 2692,3 | 576835 | 2,93298 |
| 858 | 736164 | 631628712 | 29,2916 | 9,5023 | 0,001166 | 2695,5 | 578182 | 2,93349 |
| 859 | 737881 | 633839779 | 29,3087 | 9,5060 | 0,001164 | 2698,6 | 579530 | 2,93399 |
| 860 | 739600 | 636056000 | 29,3258 | 9,5097 | 0,001163 | 2701,8 | 580880 | 2,93450 |
| 861 | 741321 | 638277381 | 29,3428 | 9,5134 | 0,001161 | 2704,9 | 582232 | 2,93500 |
| 862 | 743044 | 640503928 | 29,3598 | 9,5171 | 0,001160 | 2708,1 | 583585 | 2,93551 |
| 863 | 744769 | 642735647 | 29,3769 | 9,5207 | 0,001159 | 2711,2 | 584940 | 2,93601 |
| 864 | 746496 | 644972544 | 29,3939 | 9,5244 | 0,001157 | 2714,3 | 586297 | 2,93651 |
| 865 | 748225 | 647214625 | 29,4109 | 9,5281 | 0,001156 | 2717,5 | 587655 | 2,93702 |
| 866 | 749956 | 649461896 | 29,4279 | 9,5317 | 0,001155 | 2720,6 | 589014 | 2,93752 |
| 867 | 751689 | 651714363 | 29,4449 | 9,5354 | 0,001153 | 2723,8 | 590375 | 2,93802 |
| 868 | 753424 | 653972032 | 29,4618 | 9,5391 | 0,001152 | 2726,9 | 591738 | 2,93852 |
| 869 | 755161 | 656234909 | 29,4788 | 9,5427 | 0,001151 | 2730,0 | 593102 | 2,93902 |
| 870 | 756900 | 658503000 | 29,4958 | 9,5464 | 0,001149 | 2733,2 | 594468 | 2,93952 |
| 871 | 758641 | 660776311 | 29,5127 | 9,5501 | 0,001148 | 2736,3 | 595835 | 2,94002 |
| 872 | 760384 | 663054848 | 29,5296 | 9,5537 | 0,001147 | 2739,5 | 597204 | 2,94052 |
| 873 | 762129 | 665338617 | 29,5466 | 9,5574 | 0,001145 | 2742,6 | 598575 | 2,94101 |
| 874 | 763876 | 667627624 | 29,5635 | 9,5610 | 0,001144 | 2745,8 | 599947 | 2,94151 |
| 875 | 765625 | 669921875 | 29,5804 | 9,5647 | 0,001143 | 2748,9 | 601320 | 2,94201 |
| 876 | 767376 | 672221376 | 29,5973 | 9,5683 | 0,001142 | 2752,0 | 602696 | 2,94250 |
| 877 | 769129 | 674526133 | 29,6142 | 9,5719 | 0,001140 | 2755,2 | 604073 | 2,94300 |
| 878 | 770884 | 676836152 | 29,6311 | 9,5756 | 0,001139 | 2758,3 | 605451 | 2,94349 |
| 879 | 772641 | 679151439 | 29,6479 | 9,5792 | 0,001138 | 2761,5 | 606831 | 2,94399 |
| 880 | 774400 | 681472000 | 29,6648 | 9,5828 | 0,001136 | 2764,6 | 608212 | 2,94448 |
| 881 | 776161 | 683797841 | 29,6816 | 9,5865 | 0,001135 | 2767,7 | 609595 | 2,94498 |
| 882 | 777924 | 686128968 | 29,6985 | 9,5901 | 0,001134 | 2770,9 | 610980 | 2,94547 |
| 883 | 779689 | 688465387 | 29,7153 | 9,5937 | 0,001133 | 2774,0 | 612366 | 2,94596 |
| 884 | 781456 | 690807104 | 29,7321 | 9,5973 | 0,001131 | 2777,2 | 613754 | 2,94645 |
| 885 | 783225 | 693154125 | 29,7489 | 9,6010 | 0,001130 | 2780,3 | 615143 | 2,94694 |
| 886 | 784996 | 695506456 | 29,7658 | 9,6046 | 0,001129 | 2783,5 | 616534 | 2,94743 |
| 887 | 786769 | 697864103 | 29,7825 | 9,6082 | 0,001127 | 2786,6 | 617927 | 2,94792 |
| 888 | 788544 | 700227072 | 29,7993 | 9,6118 | 0,001126 | 2789,7 | 619321 | 2,94841 |
| 889 | 790321 | 702595369 | 29,8161 | 9,6154 | 0,001125 | 2792,9 | 620717 | 2,94890 |
| 890 | 792100 | 704969000 | 29,8329 | 9,6190 | 0,001124 | 2796,0 | 622114 | 2,94939 |
| 891 | 793881 | 707347971 | 29,8496 | 9,6226 | 0,001122 | 2799,2 | 623513 | 2,94988 |
| 892 | 795664 | 709732288 | 29,8664 | 9,6262 | 0,001121 | 2802,3 | 624913 | 2,95036 |
| 893 | 797449 | 712121957 | 29,8831 | 9,6298 | 0,001120 | 2805,4 | 626315 | 2,95085 |
| 894 | 799236 | 714516984 | 29,8998 | 9,6334 | 0,001119 | 2808,6 | 627718 | 2,95134 |
| 895 | 801025 | 716917375 | 29,9166 | 9,6370 | 0,001117 | 2811,7 | 629124 | 2,95182 |
| 896 | 802816 | 719323136 | 29,9333 | 9,6406 | 0,001116 | 2814,9 | 630530 | 2,95231 |
| 897 | 804609 | 721734273 | 29,9500 | 9,6442 | 0,001115 | 2818,0 | 631938 | 2,95279 |
| 898 | 806404 | 724150792 | 29,9666 | 9,6477 | 0,001114 | 2821,2 | 633348 | 2,95328 |
| 899 | 808201 | 726572699 | 29,9833 | 9,6513 | 0,001112 | 2824,3 | 634760 | 2,95376 |
| 900 | 810000 | 729000000 | 30,0000 | 9,6549 | 0,001111 | 2827,4 | 636173 | 2,95424 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 901 | 811801 | 731432701 | 30,0167 | 9,6585 | 0,001110 | 2830,6 | 637587 | 2,95472 |
| 902 | 813604 | 733870808 | 30,0333 | 9,6620 | 0,001109 | 2833,7 | 639003 | 2,95521 |
| 903 | 815409 | 736314327 | 30,0500 | 9,6656 | 0,001107 | 2836,9 | 640421 | 2,95569 |
| 904 | 817216 | 738763264 | 30,0666 | 9,6692 | 0,001106 | 2840,0 | 641840 | 2,95617 |
| 905 | 819025 | 741217625 | 30,0832 | 9,6727 | 0,001105 | 2843,1 | 643261 | 2,95665 |
| 906 | 820836 | 743677416 | 30,0998 | 9,6763 | 0,001104 | 2846,3 | 644683 | 2,95713 |
| 907 | 822649 | 746142643 | 30,1164 | 9,6799 | 0,001103 | 2849,4 | 646107 | 2,95761 |
| 908 | 824464 | 748613312 | 30,1330 | 9,6834 | 0,001101 | 2852,6 | 647533 | 2,95809 |
| 909 | 826281 | 751089429 | 30,1496 | 9,6870 | 0,001100 | 2855,7 | 648960 | 2,95856 |
| 910 | 828100 | 753571000 | 30,1662 | 9,6905 | 0,001099 | 2858,8 | 650388 | 2,95904 |
| 911 | 829921 | 756058031 | 30,1828 | 9,6941 | 0,001098 | 2862,0 | 651818 | 2,95952 |
| 912 | 831744 | 758550528 | 30,1993 | 9,6976 | 0,001096 | 2865,1 | 653250 | 2,95999 |
| 913 | 833569 | 761048497 | 30,2159 | 9,7012 | 0,001095 | 2868,3 | 654684 | 2,96047 |
| 914 | 835396 | 763551944 | 30,2324 | 9,7047 | 0,001094 | 2871,4 | 656118 | 2,96095 |
| 915 | 837225 | 766060875 | 30,2490 | 9,7082 | 0,001093 | 2874,6 | 657555 | 2,96142 |
| 916 | 839056 | 768575296 | 30,2655 | 9,7118 | 0,001092 | 2877,7 | 658993 | 2,96190 |
| 917 | 840889 | 771095213 | 30,2820 | 9,7153 | 0,001091 | 2880,8 | 660433 | 2,96237 |
| 918 | 842724 | 773620632 | 30,2985 | 9,7188 | 0,001089 | 2884,0 | 661874 | 2,96284 |
| 919 | 844561 | 776151559 | 30,3150 | 9,7224 | 0,001088 | 2887,1 | 663317 | 2,96332 |
| 920 | 846400 | 778688000 | 30,3315 | 9,7259 | 0,001087 | 2890,3 | 664761 | 2,96379 |
| 921 | 848241 | 781229961 | 30,3480 | 9,7294 | 0,001086 | 2893,4 | 666207 | 2,96426 |
| 922 | 850084 | 783777448 | 30,3645 | 9,7329 | 0,001085 | 2896,5 | 667654 | 2,96473 |
| 923 | 851929 | 786330467 | 30,3809 | 9,7364 | 0,001083 | 2899,7 | 669103 | 2,96520 |
| 924 | 853776 | 788889024 | 30,3974 | 9,7400 | 0,001082 | 2902,8 | 670554 | 2,96567 |
| 925 | 855625 | 791453125 | 30,4138 | 9,7435 | 0,001081 | 2906,0 | 672006 | 2,96614 |
| 926 | 857476 | 794022776 | 30,4302 | 9,7470 | 0,001080 | 2909,1 | 673460 | 2,96661 |
| 927 | 859329 | 796597983 | 30,4467 | 9,7505 | 0,001079 | 2912,3 | 674915 | 2,96708 |
| 928 | 861184 | 799178752 | 30,4631 | 9,7540 | 0,001078 | 2915,4 | 676372 | 2,96755 |
| 929 | 863041 | 801765089 | 30,4795 | 9,7575 | 0,001076 | 2918,5 | 677831 | 2,96802 |
| 930 | 864900 | 804357000 | 30,4959 | 9,7610 | 0,001075 | 2921,7 | 679291 | 2,96848 |
| 931 | 866761 | 806954491 | 30,5123 | 9,7645 | 0,001074 | 2924,8 | 680752 | 2,96895 |
| 932 | 868624 | 809557568 | 30,5287 | 9,7680 | 0,001073 | 2928,0 | 682216 | 2,96942 |
| 933 | 870489 | 812166237 | 30,5450 | 9,7715 | 0,001072 | 2931,1 | 683680 | 2,96988 |
| 934 | 872356 | 814780504 | 30,5614 | 9,7750 | 0,001071 | 2934,2 | 685147 | 2,97035 |
| 935 | 874225 | 817400375 | 30,5778 | 9,7785 | 0,001070 | 2937,4 | 686615 | 2,97081 |
| 936 | 876096 | 820025856 | 30,5941 | 9,7819 | 0,001068 | 2940,5 | 688084 | 2,97128 |
| 937 | 877969 | 822656953 | 30,6105 | 9,7854 | 0,001067 | 2943,7 | 689555 | 2,97174 |
| 938 | 879844 | 825293672 | 30,6268 | 9,7889 | 0,001066 | 2946,8 | 691028 | 2,97220 |
| 939 | 881721 | 827936019 | 30,6431 | 9,7924 | 0,001065 | 2950,0 | 692502 | 2,97267 |
| 940 | 883600 | 830584000 | 30,6594 | 9,7959 | 0,001064 | 2953,1 | 693978 | 2,97313 |
| 941 | 885481 | 833237621 | 30,6757 | 9,7993 | 0,001063 | 2956,2 | 695455 | 2,97359 |
| 942 | 887364 | 835896888 | 30,6920 | 9,8028 | 0,001062 | 2959,4 | 696984 | 2,97405 |
| 943 | 889249 | 838561807 | 30,7083 | 9,8063 | 0,001060 | 2962,5 | 698415 | 2,97451 |
| 944 | 891136 | 841232384 | 30,7246 | 9,8097 | 0,001059 | 2965,7 | 699897 | 2,97497 |
| 945 | 893025 | 843908625 | 30,7409 | 9,8132 | 0,001058 | 2968,8 | 701380 | 2,97543 |
| 946 | 894916 | 846590536 | 30,7571 | 9,8167 | 0,001057 | 2971,9 | 702865 | 2,97589 |
| 947 | 896809 | 849278123 | 30,7734 | 9,8201 | 0,001056 | 2975,1 | 704352 | 2,97635 |
| 948 | 898704 | 851971392 | 30,7896 | 9,8236 | 0,001055 | 2978,2 | 705840 | 2,97681 |
| 949 | 900601 | 854670349 | 30,8058 | 9,8270 | 0,001054 | 2981,4 | 707330 | 2,97727 |
| 950 | 902500 | 857375000 | 30,8221 | 9,8305 | 0,001053 | 2984,5 | 708822 | 2,97772 |

| n | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | log n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 951 | 904401 | 860085351 | 30,8383 | 9,8339 | 0,001052 | 2987,7 | 710315 | 2,97818 |
| 952 | 906304 | 862801408 | 30,8545 | 9,8374 | 0,001050 | 2990,8 | 711809 | 2,97864 |
| 953 | 908209 | 865523177 | 30,8707 | 9,8408 | 0,001049 | 2993,9 | 713306 | 2,97909 |
| 954 | 910116 | 868250664 | 30,8869 | 9,8443 | 0,001048 | 2997,1 | 714803 | 2,97955 |
| 955 | 912025 | 870983875 | 30,9031 | 9,8477 | 0,001047 | 3000,2 | 716303 | 2,98000 |
| 956 | 913936 | 873722816 | 30,9192 | 9,8511 | 0,001046 | 3003,4 | 717804 | 2,98046 |
| 957 | 915849 | 876467493 | 30,9354 | 9,8546 | 0,001045 | 3006,5 | 719306 | 2,98091 |
| 958 | 917764 | 879217912 | 30,9516 | 9,8580 | 0,001044 | 3009,6 | 720810 | 2,98137 |
| 959 | 919681 | 881974079 | 30,9677 | 9,8614 | 0,001043 | 3012,8 | 722316 | 2,98182 |
| 960 | 921600 | 884736000 | 30,9839 | 9,8648 | 0,001042 | 3015,9 | 723823 | 2,98227 |
| 961 | 923521 | 887503681 | 31,0000 | 9,8683 | 0,001041 | 3019,1 | 725332 | 2,98272 |
| 962 | 925444 | 890277128 | 31,0161 | 9,8717 | 0,001040 | 3022,2 | 726842 | 2,98318 |
| 963 | 927369 | 893056347 | 31,0322 | 9,8751 | 0,001038 | 3025,4 | 728354 | 2,98363 |
| 964 | 929296 | 895841344 | 31,0483 | 9,8785 | 0,001037 | 3028,5 | 729867 | 2,98408 |
| 965 | 931225 | 898632125 | 31,0644 | 9,8819 | 0,001036 | 3031,6 | 731382 | 2,98453 |
| 966 | 933156 | 901428696 | 31,0805 | 9,8854 | 0,001035 | 3034,8 | 732899 | 2,98498 |
| 967 | 935089 | 904231063 | 31,0966 | 9,8888 | 0,001034 | 3037,9 | 734417 | 2,98543 |
| 968 | 937024 | 907039232 | 31,1127 | 9,8922 | 0,001033 | 3041,1 | 735937 | 2,98588 |
| 969 | 938961 | 909853209 | 31,1288 | 9,8956 | 0,001032 | 3044,2 | 737458 | 2,98632 |
| 970 | 940900 | 912673000 | 31,1448 | 9,8990 | 0,001031 | 3047,3 | 738981 | 2,98677 |
| 971 | 942841 | 915498611 | 31,1609 | 9,9024 | 0,001030 | 3050,5 | 740506 | 2,98722 |
| 972 | 944784 | 918330048 | 31,1769 | 9,9058 | 0,001029 | 3053,6 | 742032 | 2,98767 |
| 973 | 946729 | 921167317 | 31,1929 | 9,9092 | 0,001028 | 3056,8 | 743559 | 2,98811 |
| 974 | 948676 | 924010424 | 31,2090 | 9,9126 | 0,001027 | 3059,9 | 745088 | 2,98856 |
| 975 | 950625 | 926859375 | 31,2250 | 9,9160 | 0,001026 | 3063,1 | 746619 | 2,98900 |
| 976 | 952576 | 929714176 | 31,2410 | 9,9194 | 0,001025 | 3066,2 | 748151 | 2,98945 |
| 977 | 954529 | 932574833 | 31,2570 | 9,9227 | 0,001024 | 3069,3 | 749685 | 2,98989 |
| 978 | 956484 | 935441352 | 31,2730 | 9,9261 | 0,001023 | 3072,5 | 751221 | 2,99034 |
| 979 | 958441 | 938313739 | 31,2890 | 9,9295 | 0,001022 | 3075,6 | 752758 | 2,99078 |
| 980 | 960400 | 941192000 | 31,3050 | 9,9329 | 0,001020 | 3078,8 | 754296 | 2,99123 |
| 981 | 962361 | 944076141 | 31,3209 | 9,9363 | 0,001019 | 3081,9 | 755837 | 2,99167 |
| 982 | 964324 | 946966168 | 31,3369 | 9,9396 | 0,001018 | 3085,0 | 757378 | 2,99211 |
| 983 | 966289 | 949862087 | 31,3528 | 9,9430 | 0,001017 | 3088,2 | 758922 | 2,99255 |
| 984 | 968256 | 952763904 | 31,3688 | 9,9464 | 0,001016 | 3091,3 | 760466 | 2,99300 |
| 985 | 970225 | 955671625 | 31,3847 | 9,9497 | 0,001015 | 3094,5 | 762013 | 2,99344 |
| 986 | 972196 | 958585256 | 31,4006 | 9,9531 | 0,001014 | 3097,6 | 763561 | 2,99388 |
| 987 | 974169 | 961504803 | 31,4166 | 9,9565 | 0,001013 | 3100,8 | 765111 | 2,99432 |
| 988 | 976144 | 964430272 | 31,4325 | 9,9598 | 0,001012 | 3103,9 | 766662 | 2,99476 |
| 989 | 978121 | 967361669 | 31,4484 | 9,9632 | 0,001011 | 3107,0 | 768214 | 2,99520 |
| 990 | 980100 | 970299000 | 31,4643 | 9,9666 | 0,001010 | 3110,2 | 769769 | 2,99564 |
| 991 | 982081 | 973242271 | 31,4802 | 9,9699 | 0,001009 | 3113,3 | 771325 | 2,99607 |
| 992 | 984064 | 976191488 | 31,4960 | 9,9733 | 0,001008 | 3116,5 | 772882 | 2,99651 |
| 993 | 986049 | 979146657 | 31,5119 | 9,9766 | 0,001007 | 3119,6 | 774441 | 2,99695 |
| 994 | 988036 | 982107784 | 31,5278 | 9,9800 | 0,001006 | 3122,7 | 776002 | 2,99739 |
| 995 | 990025 | 985074875 | 31,5436 | 9,9833 | 0,001005 | 3125,9 | 777564 | 2,99782 |
| 996 | 992016 | 988047936 | 31,5595 | 9,9866 | 0,001004 | 3129,0 | 779128 | 2,99826 |
| 997 | 994009 | 991026973 | 31,5753 | 9,9900 | 0,001003 | 3132,2 | 780693 | 2,99870 |
| 998 | 996004 | 994011992 | 31,5911 | 9,9933 | 0,001002 | 3135,3 | 782260 | 2,99913 |
| 999 | 998001 | 997002999 | 31,6070 | 9,9967 | 0,001001 | 3138,5 | 783828 | 2,99957 |
| 1000 | 1000000 | 1000000000 | 31,6228 | 10,0000 | 0,001000 | 3141,6 | 785398 | 3,00000 |

Die Winkel von 46° bis 90° sind

| Grad | Sinus | | | | | | Grad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | |
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01454 | 89 |
| 1 | 0,01745 | 0,02036 | 0,02327 | 0,02618 | 0,02908 | 0,03199 | 88 |
| 2 | 0,03490 | 0,03781 | 0,04071 | 0,04362 | 0,04653 | 0,04943 | 87 |
| 3 | 0,05234 | 0,05524 | 0,05814 | 0,06105 | 0,06395 | 0,06685 | 86 |
| 4 | 0,06976 | 0,07266 | 0,07556 | 0,07846 | 0,08136 | 0,08426 | 85 |
| 5 | 0,08716 | 0,09005 | 0,09295 | 0,09585 | 0,09874 | 0,10164 | 84 |
| 6 | 0,10453 | 0,10742 | 0,11031 | 0,11320 | 0,11609 | 0,11898 | 83 |
| 7 | 0,12187 | 0,12476 | 0,12764 | 0,13053 | 0,13341 | 0,13629 | 82 |
| 8 | 0,13917 | 0,14205 | 0,14493 | 0,14781 | 0,15069 | 0,15356 | 81 |
| 9 | 0,15643 | 0,15931 | 0,16218 | 0,16505 | 0,16792 | 0,17078 | 80 |
| 10 | 0,17365 | 0,17651 | 0,17937 | 0,18224 | 0,18509 | 0,18795 | 79 |
| 11 | 0,19081 | 0,19366 | 0,19652 | 0,19937 | 0,20222 | 0,20507 | 78 |
| 12 | 0,20791 | 0,21076 | 0,21360 | 0,21644 | 0,21928 | 0,22212 | 77 |
| 13 | 0,22495 | 0,22778 | 0,23062 | 0,23345 | 0,23627 | 0,23910 | 76 |
| 14 | 0,24192 | 0,24474 | 0,24756 | 0,25038 | 0,25320 | 0,25601 | 75 |
| 15 | 0,25882 | 0,26163 | 0,26443 | 0,26724 | 0,27004 | 0,27284 | 74 |
| 16 | 0,27564 | 0,27843 | 0,28123 | 0,28402 | 0,28680 | 0,28959 | 73 |
| 17 | 0,29237 | 0,29515 | 0,29793 | 0,30071 | 0,30348 | 0,30625 | 72 |
| 18 | 0,30902 | 0,31178 | 0,31454 | 0,31730 | 0,32006 | 0,32282 | 71 |
| 19 | 0,32557 | 0,32832 | 0,33106 | 0,33381 | 0,33655 | 0,33929 | 70 |
| 20 | 0,34202 | 0,34475 | 0,34748 | 0,35021 | 0,35293 | 0,35565 | 69 |
| 21 | 0,35837 | 0,36108 | 0,36379 | 0,36650 | 0,36921 | 0,37191 | 68 |
| 22 | 0,37461 | 0,37730 | 0,37999 | 0,38268 | 0,38537 | 0,38805 | 67 |
| 23 | 0,39073 | 0,39341 | 0,39608 | 0,39875 | 0,40141 | 0,40408 | 66 |
| 24 | 0,40674 | 0,40939 | 0,41204 | 0,41469 | 0,41734 | 0,41998 | 65 |
| 25 | 0,42262 | 0,42525 | 0,42788 | 0,43051 | 0,43313 | 0,43575 | 64 |
| 26 | 0,43837 | 0,44098 | 0,44359 | 0,44620 | 0,44880 | 0,45140 | 63 |
| 27 | 0,45399 | 0,45658 | 0,45917 | 0,46175 | 0,46433 | 0,46690 | 62 |
| 28 | 0,46947 | 0,47204 | 0,47460 | 0,47716 | 0,47971 | 0,48226 | 61 |
| 29 | 0,48481 | 0,48735 | 0,48989 | 0,49242 | 0,49495 | 0,49748 | 60 |
| 30 | 0,50000 | 0,50252 | 0,50503 | 0,50754 | 0,51004 | 0,51254 | 59 |
| 31 | 0,51504 | 0,51753 | 0,52002 | 0,52250 | 0,52498 | 0,52745 | 58 |
| 32 | 0,52992 | 0,53238 | 0,53484 | 0,53730 | 0,53975 | 0,54220 | 57 |
| 33 | 0,54464 | 0,54708 | 0,54951 | 0,55194 | 0,55436 | 0,55678 | 56 |
| 34 | 0,55919 | 0,56160 | 0,56401 | 0,56641 | 0,56880 | 0,57119 | 55 |
| 35 | 0,57358 | 0,57596 | 0,57833 | 0,58070 | 0,58307 | 0,58543 | 54 |
| 36 | 0,58779 | 0,59014 | 0,59248 | 0,59482 | 0,59716 | 0,59949 | 53 |
| 37 | 0,60182 | 0,60414 | 0,60645 | 0,60876 | 0,61107 | 0,61337 | 52 |
| 38 | 0,61566 | 0,61795 | 0,62024 | 0,62251 | 0,62479 | 0,62706 | 51 |
| 39 | 0,62932 | 0,63158 | 0,63383 | 0,63608 | 0,63832 | 0,64056 | 50 |
| 40 | 0,64279 | 0,64501 | 0,64723 | 0,64945 | 0,65166 | 0,65386 | 49 |
| 41 | 0,65606 | 0,65825 | 0,66044 | 0,66262 | 0,66480 | 0,66697 | 48 |
| 42 | 0,66913 | 0,67129 | 0,67344 | 0,67559 | 0,67773 | 0,67987 | 47 |
| 43 | 0,68200 | 0,68412 | 0,68624 | 0,68835 | 0,69046 | 0,69256 | 46 |
| 44 | 0,69466 | 0,69675 | 0,69883 | 0,70091 | 0,70298 | 0,70505 | 45 |
| 45 | 0,70711 | 0,70916 | 0,71121 | 0,71325 | 0,71529 | 0,71732 | 44 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Grad |
| | Cosinus | | | | | | |

unter 45° 60′ bis 89° 60′ zu suchen.

| Grad | Cosinus | | | | | | Grad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | |
| 0 | 1,00000 | 1,00000 | 0,99998 | 0,99996 | 0,99993 | 0,99989 | 89 |
| 1 | 0,99985 | 0,99979 | 0,99973 | 0,99966 | 0,99958 | 0,99949 | 88 |
| 2 | 0,99939 | 0,99929 | 0,99917 | 0,99905 | 0,99892 | 0,99878 | 87 |
| 3 | 0,99863 | 0,99847 | 0,99831 | 0,99813 | 0,99795 | 0,99776 | 86 |
| 4 | 0,99756 | 0,99736 | 0,99714 | 0,99692 | 0,99668 | 0,99644 | 85 |
| 5 | 0,99619 | 0,99594 | 0,99567 | 0,99540 | 0,99511 | 0,99482 | 84 |
| 6 | 0,99452 | 0,99421 | 0,99390 | 0,99357 | 0,99324 | 0,99290 | 83 |
| 7 | 0,99255 | 0,99219 | 0,99182 | 0,99144 | 0,99106 | 0,99067 | 82 |
| 8 | 0,99027 | 0,98986 | 0,98944 | 0,98902 | 0,98858 | 0,98814 | 81 |
| 9 | 0,98769 | 0,98723 | 0,98676 | 0,98629 | 0,98580 | 0,98531 | 80 |
| 10 | 0,98481 | 0,98430 | 0,98378 | 0,98325 | 0,98272 | 0,98218 | 79 |
| 11 | 0,98163 | 0,98107 | 0,98050 | 0,97992 | 0,97934 | 0,97875 | 78 |
| 12 | 0,97815 | 0,97754 | 0,97692 | 0,97630 | 0,97566 | 0,97502 | 77 |
| 13 | 0,97437 | 0,97371 | 0,97304 | 0,97237 | 0,97169 | 0,97100 | 76 |
| 14 | 0,97030 | 0,96959 | 0,96887 | 0,96815 | 0,96742 | 0,96667 | 75 |
| 15 | 0,96593 | 0,96517 | 0,96440 | 0,96363 | 0,96285 | 0,96206 | 74 |
| 16 | 0,96126 | 0,96046 | 0,95964 | 0,95882 | 0,95799 | 0,95715 | 73 |
| 17 | 0,95630 | 0,95545 | 0,95459 | 0,95372 | 0,95284 | 0,95195 | 72 |
| 18 | 0,95106 | 0,95015 | 0,94924 | 0,94832 | 0,94740 | 0,94646 | 71 |
| 19 | 0,94552 | 0,94457 | 0,94361 | 0,94264 | 0,94167 | 0,94068 | 70 |
| 20 | 0,93969 | 0,93869 | 0,93769 | 0,93667 | 0,93565 | 0,93462 | 69 |
| 21 | 0,93358 | 0,93253 | 0,93148 | 0,93042 | 0,92935 | 0,92827 | 68 |
| 22 | 0,92718 | 0,92609 | 0,92499 | 0,92388 | 0,92276 | 0,92164 | 67 |
| 23 | 0,92050 | 0,91936 | 0,91822 | 0,91706 | 0,91590 | 0,91472 | 66 |
| 24 | 0,91355 | 0,91236 | 0,91116 | 0,90996 | 0,90875 | 0,90753 | 65 |
| 25 | 0,90631 | 0,90507 | 0,90383 | 0,90259 | 0,90133 | 0,90007 | 64 |
| 26 | 0,89879 | 0,89752 | 0,89623 | 0,89493 | 0,89363 | 0,89232 | 63 |
| 27 | 0,89101 | 0,88968 | 0,88835 | 0,88701 | 0,88566 | 0,88431 | 62 |
| 28 | 0,88295 | 0,88158 | 0,88020 | 0,87882 | 0,87743 | 0,87603 | 61 |
| 29 | 0,87462 | 0,87321 | 0,87178 | 0,87036 | 0,86892 | 0,86748 | 60 |
| 30 | 0,86603 | 0,86457 | 0,86310 | 0,86163 | 0,86015 | 0,85866 | 59 |
| 31 | 0,85717 | 0,85567 | 0,85416 | 0,85264 | 0,85112 | 0,84959 | 58 |
| 32 | 0,84805 | 0,84650 | 0,84495 | 0,84339 | 0,84182 | 0,84025 | 57 |
| 33 | 0,83867 | 0,83708 | 0,83549 | 0,83389 | 0,83228 | 0,83066 | 56 |
| 34 | 0,82904 | 0,82741 | 0,82577 | 0,82413 | 0,82248 | 0,82082 | 55 |
| 35 | 0,81915 | 0,81748 | 0,81580 | 0,81412 | 0,81242 | 0,81072 | 54 |
| 36 | 0,80902 | 0,80730 | 0,80558 | 0,80386 | 0,80212 | 0,80038 | 53 |
| 37 | 0,79864 | 0,79688 | 0,79512 | 0,79335 | 0,79158 | 0,78980 | 52 |
| 38 | 0,78801 | 0,78622 | 0,78442 | 0,78261 | 0,78079 | 0,77897 | 51 |
| 39 | 0,77715 | 0,77531 | 0,77347 | 0,77162 | 0,76977 | 0,76791 | 50 |
| 40 | 0,76604 | 0,76417 | 0,76229 | 0,76041 | 0,75851 | 0,75661 | 49 |
| 41 | 0,75471 | 0,75280 | 0,75088 | 0,74896 | 0,74703 | 0,74509 | 48 |
| 42 | 0,74314 | 0,74120 | 0,73924 | 0,73728 | 0,73531 | 0,73333 | 47 |
| 43 | 0,73135 | 0,72937 | 0,72737 | 0,72537 | 0,72337 | 0,72136 | 46 |
| 44 | 0,71934 | 0,71732 | 0,71529 | 0,71325 | 0,71121 | 0,70916 | 45 |
| 45 | 0,70711 | 0,70505 | 0,70298 | 0,70091 | 0,69883 | 0,69675 | 44 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Grad |
| | Sinus | | | | | | |

Die Winkel von 46° bis 90° sind

| Grad | Tangens | | | | | | Grad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | |
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01455 | 89 |
| 1 | 0,01746 | 0,02036 | 0,02328 | 0,02619 | 0,02910 | 0,03201 | 88 |
| 2 | 0,03492 | 0,03783 | 0,04075 | 0,04366 | 0,04658 | 0,04949 | 87 |
| 3 | 0,05241 | 0,05533 | 0,05824 | 0,06116 | 0,06408 | 0,06700 | 86 |
| 4 | 0,06993 | 0,07285 | 0,07578 | 0,07870 | 0,08163 | 0,08456 | 85 |
| 5 | 0,08749 | 0,09042 | 0,09335 | 0,09629 | 0,09923 | 0,10216 | 84 |
| 6 | 0,10510 | 0,10805 | 0,11099 | 0,11394 | 0,11688 | 0,11983 | 83 |
| 7 | 0,12278 | 0,12574 | 0,12869 | 0,13165 | 0,13461 | 0,13758 | 82 |
| 8 | 0,14054 | 0,14351 | 0,14648 | 0,14945 | 0,15243 | 0,15540 | 81 |
| 9 | 0,15838 | 0,16137 | 0,16435 | 0,16734 | 0,17033 | 0,17333 | 80 |
| 10 | 0,17633 | 0,17933 | 0,18233 | 0,18534 | 0,18835 | 0,19136 | 79 |
| 11 | 0,19438 | 0,19740 | 0,20042 | 0,20345 | 0,20648 | 0,20952 | 78 |
| 12 | 0,21256 | 0,21560 | 0,21864 | 0,22169 | 0,22475 | 0,22781 | 77 |
| 13 | 0,23087 | 0,23393 | 0,23700 | 0,24008 | 0,24316 | 0,24624 | 76 |
| 14 | 0,24933 | 0,25242 | 0,25552 | 0,25862 | 0,26172 | 0,26483 | 75 |
| 15 | 0,26795 | 0,27107 | 0,27419 | 0,27732 | 0,28046 | 0,28360 | 74 |
| 16 | 0,28675 | 0,28990 | 0,29305 | 0,29621 | 0,29938 | 0,30255 | 73 |
| 17 | 0,30573 | 0,30891 | 0,31210 | 0,31530 | 0,31850 | 0,32171 | 72 |
| 18 | 0,32492 | 0,32814 | 0,33136 | 0,33460 | 0,33783 | 0,34108 | 71 |
| 19 | 0,34433 | 0,34758 | 0,35085 | 0,35412 | 0,35740 | 0,36068 | 70 |
| 20 | 0,36397 | 0,36727 | 0,37057 | 0,37388 | 0,37720 | 0,38053 | 69 |
| 21 | 0,38386 | 0,38721 | 0,39055 | 0,39391 | 0,39727 | 0,40065 | 68 |
| 22 | 0,40403 | 0,40741 | 0,41081 | 0,41421 | 0,41763 | 0,42105 | 67 |
| 23 | 0,42447 | 0,42791 | 0,43136 | 0,43481 | 0,43828 | 0,44175 | 66 |
| 24 | 0,44523 | 0,44872 | 0,45222 | 0,45573 | 0,45924 | 0,46277 | 65 |
| 25 | 0,46631 | 0,46985 | 0,47341 | 0,47698 | 0,48055 | 0,48414 | 64 |
| 26 | 0,48773 | 0,49134 | 0,49495 | 0,49858 | 0,50222 | 0,50587 | 63 |
| 27 | 0,50953 | 0,51319 | 0,51688 | 0,52057 | 0,52427 | 0,52798 | 62 |
| 28 | 0,53171 | 0,53545 | 0,53920 | 0,54296 | 0,54673 | 0,55051 | 61 |
| 29 | 0,55431 | 0,55812 | 0,56194 | 0,56577 | 0,56962 | 0,57348 | 60 |
| 30 | 0,57735 | 0,58124 | 0,58513 | 0,58905 | 0,59297 | 0,59691 | 59 |
| 31 | 0,60086 | 0,60483 | 0,60881 | 0,61280 | 0,61681 | 0,62083 | 58 |
| 32 | 0,62487 | 0,62892 | 0,63299 | 0,63707 | 0,64117 | 0,64528 | 57 |
| 33 | 0,64941 | 0,65355 | 0,65771 | 0,66189 | 0,66608 | 0,67028 | 56 |
| 34 | 0,67451 | 0,67875 | 0,68301 | 0,68728 | 0,69157 | 0,69588 | 55 |
| 35 | 0,70021 | 0,70455 | 0,70891 | 0,71329 | 0,71769 | 0,72211 | 54 |
| 36 | 0,72654 | 0,73100 | 0,73547 | 0,73996 | 0,74447 | 0,74900 | 53 |
| 37 | 0,75355 | 0,75812 | 0,76272 | 0,76733 | 0,77196 | 0,77661 | 52 |
| 38 | 0,78129 | 0,78598 | 0,79070 | 0,79544 | 0,80020 | 0,80498 | 51 |
| 39 | 0,80978 | 0,81461 | 0,81946 | 0,82434 | 0,82923 | 0,83415 | 50 |
| 40 | 0,83910 | 0,84407 | 0,84906 | 0,85408 | 0,85912 | 0,86419 | 49 |
| 41 | 0,86929 | 0,87441 | 0,87955 | 0,88473 | 0,88992 | 0,89515 | 48 |
| 42 | 0,90040 | 0,90569 | 0,91099 | 0,91633 | 0,92170 | 0,92709 | 47 |
| 43 | 0,93252 | 0,93797 | 0,94345 | 0,94896 | 0,95451 | 0,96008 | 46 |
| 44 | 0,96569 | 0,97133 | 0,97700 | 0,98270 | 0,98843 | 0,99420 | 45 |
| 45 | 1,00000 | 1,00583 | 1,01170 | 1,01761 | 1,02355 | 1,02951 | 44 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Grad |
| | Cotangens | | | | | | |

unter 45° 60′ bis 89° 60′ zu suchen.

| Grad | Cotangens | | | | | | Grad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | |
| 0 | ∞ | 343,77371 | 171,88540 | 114,58865 | 85,93979 | 68,75009 | 89 |
| 1 | 57,28996 | 49,10388 | 42,96408 | 38,18846 | 34,36777 | 31,24158 | 88 |
| 2 | 28,63625 | 26,43160 | 24,54176 | 22,90377 | 21,47040 | 20,20555 | 87 |
| 3 | 19,08114 | 18,07498 | 17,16934 | 16,34986 | 15,60478 | 14,92442 | 86 |
| 4 | 14,30067 | 13,72674 | 13,19688 | 12,70621 | 12,25051 | 11,82617 | 85 |
| 5 | 11,43005 | 11,05943 | 10,71191 | 10,38540 | 10,07803 | 9,78817 | 84 |
| 6 | 9,51436 | 9,25530 | 9,00983 | 8,77689 | 8,55555 | 8,34496 | 83 |
| 7 | 8,14435 | 7,95302 | 7,77035 | 7,59575 | 7,42871 | 7,26873 | 82 |
| 8 | 7,11537 | 6,96823 | 6,82694 | 6,69116 | 6,56055 | 6,43484 | 81 |
| 9 | 6,31375 | 6,19703 | 6,08444 | 5,97576 | 5,87080 | 5,76937 | 80 |
| 10 | 5,67128 | 5,57638 | 5,48451 | 5,39552 | 5,30928 | 5,22566 | 79 |
| 11 | 5,14455 | 5,06584 | 4,98940 | 4,91516 | 4,84301 | 4,77286 | 78 |
| 12 | 4,70463 | 4,63825 | 4,57363 | 4,51071 | 4,44942 | 4,38969 | 77 |
| 13 | 4,33148 | 4,27471 | 4,21933 | 4,16531 | 4,11256 | 4,06107 | 76 |
| 14 | 4,01078 | 3,96165 | 3,91364 | 3,86671 | 3,82083 | 3,77595 | 75 |
| 15 | 3,73205 | 3,68909 | 3,64705 | 3,60588 | 3,56557 | 3,52609 | 74 |
| 16 | 3,48741 | 3,44951 | 3,41236 | 3,37594 | 3,34023 | 3,30521 | 73 |
| 17 | 3,27085 | 3,23714 | 3,20406 | 3,17159 | 3,13972 | 3,10842 | 72 |
| 18 | 3,07768 | 3,04749 | 3,01783 | 2,98868 | 2,96004 | 2,93189 | 71 |
| 19 | 2,90421 | 2,87700 | 2,85023 | 2,82391 | 2,79802 | 2,77254 | 70 |
| 20 | 2,74748 | 2,72281 | 2,69853 | 2,67462 | 2,65109 | 2,62791 | 69 |
| 21 | 2,60509 | 2,58261 | 2,56046 | 2,53865 | 2,51715 | 2,49597 | 68 |
| 22 | 2,47509 | 2,45451 | 2,43422 | 2,41421 | 2,39449 | 2,37504 | 67 |
| 23 | 2,35585 | 2,33693 | 2,31826 | 2,29984 | 2,28167 | 2,26374 | 66 |
| 24 | 2,24604 | 2,22857 | 2,21132 | 2,19430 | 2,17749 | 2,16090 | 65 |
| 25 | 2,14451 | 2,12832 | 2,11233 | 2,09654 | 2,08094 | 2,06553 | 64 |
| 26 | 2,05030 | 2,03526 | 2,02039 | 2,00569 | 1,99116 | 1,97680 | 63 |
| 27 | 1,96261 | 1,94858 | 1,93470 | 1,92098 | 1,90741 | 1,89400 | 62 |
| 28 | 1,88073 | 1,86760 | 1,85462 | 1,84177 | 1,82906 | 1,81649 | 61 |
| 29 | 1,80405 | 1,79174 | 1,77955 | 1,76749 | 1,75556 | 1,74375 | 60 |
| 30 | 1,73205 | 1,72047 | 1,70901 | 1,69766 | 1,68643 | 1,67530 | 59 |
| 31 | 1,66428 | 1,65337 | 1,64256 | 1,63185 | 1,62125 | 1,61074 | 58 |
| 32 | 1,60033 | 1,59002 | 1,57981 | 1,56969 | 1,55966 | 1,54972 | 57 |
| 33 | 1,53987 | 1,53010 | 1,52043 | 1,51084 | 1,50133 | 1,49190 | 56 |
| 34 | 1,48256 | 1,47330 | 1,46411 | 1,45501 | 1,44598 | 1,43703 | 55 |
| 35 | 1,42815 | 1,41934 | 1,41061 | 1,40195 | 1,39336 | 1,38484 | 54 |
| 36 | 1,37638 | 1,36800 | 1,35968 | 1,35142 | 1,34323 | 1,33511 | 53 |
| 37 | 1,32704 | 1,31904 | 1,31110 | 1,30323 | 1,29541 | 1,28764 | 52 |
| 38 | 1,27994 | 1,27230 | 1,26471 | 1,25717 | 1,24969 | 1,24227 | 51 |
| 39 | 1,23490 | 1,22758 | 1,22031 | 1,21310 | 1,20593 | 1,19882 | 50 |
| 40 | 1,19175 | 1,18474 | 1,17777 | 1,17085 | 1,16398 | 1,15715 | 49 |
| 41 | 1,15037 | 1,14363 | 1,13694 | 1,13029 | 1,12369 | 1,11713 | 48 |
| 42 | 1,11061 | 1,10414 | 1,09770 | 1,09131 | 1,08496 | 1,07864 | 47 |
| 43 | 1,07237 | 1,06613 | 1,05994 | 1,05378 | 1,04766 | 1,04158 | 46 |
| 44 | 1,03553 | 1,02952 | 1,02355 | 1,01761 | 1,01170 | 1,00583 | 45 |
| 45 | 1,00000 | 0,99420 | 0,98843 | 0,98270 | 0,97700 | 0,97133 | 44 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Grad |
| | Tangens | | | | | | |

| v | h | v | h | v | h |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,00051 | 9,90458 | 5,0 | 30,0 | 45,8701 |
| 0,2 | 0,00204 | 10,0 | 5,09680 | 31,3206 | 50,0 |
| 0,3 | 0,00459 | 10,8499 | 6,0 | 32,0 | 52,1913 |
| 0,4 | 0,00816 | 11,0 | 6,16713 | 32,8493 | 55,0 |
| 0,5 | 0,01274 | 11,7199 | 7,0 | 34,0 | 58,9190 |
| 0,6 | 0,01835 | 12,0 | 7,33939 | 34,3100 | 60,0 |
| 0,7 | 0,02497 | 12,5282 | 8,0 | 35,5469 | 65,0 |
| 0,8 | 0,03262 | 13,0 | 8,61359 | 36,0 | 66,0545 |
| 0,9 | 0,04128 | 13,2882 | 9,0 | 37.0590 | 70,0 |
| 1,0 | 0,05097 | 14,0 | 9,98972 | 38,0 | 73,5977 |
| 1,40071 | 0,1 | 14,0070 | 10,0 | 38,1835 | 75,0 |
| 1,98089 | 0,2 | 14,6907 | 11,0 | 39,6179 | 80,0 |
| 2,0 | 0,20387 | 15,0 | 11.46780 | 40,0 | 81,5487 |
| 2,42608 | 0,3 | 15,3439 | 12,0 | 40,6494 | 85,0 |
| 2,5 | 0,31855 | 15,9702 | 13,0 | 42,0 | 89,0076 |
| 2,78907 | 0,4 | 16,0 | 13,04781 | 42,0297 | 80,0 |
| 3,0 | 0,45871 | 16,5773 | 14,0 | 42,9741 | 95,0 |
| 3,13206 | 0,5 | 17,0 | 14,72975 | 44,0 | 98,6741 |
| 3,43115 | 0,6 | 17.1550 | 15,0 | 44,294 | 180,0 |
| 3,5 | 0,62436 | 17,7176 | 16,0 | 46,0 | 107,848 |
| 3,96177 | 0,8 | 18,0 | 16,51363 | 48,0 | 117,430 |
| 4,0 | 0,81549 | 18,0538 | 17,0 | 50,0 | 127,420 |
| 4,20210 | 0,9 | 18,7835 | 18,0 | 54.2489 | 150,0 |
| 4,42940 | 1,0 | 19,0 | 18,39944 | 55,0 | 154,178 |
| 4,5 | 1,03210 | 19,3073 | 19,0 | 60,0 | 183,485 |
| 5,0 | 1,27420 | 19,8089 | 20,0 | 62,6412 | 200,0 |
| 5,42488 | 1,5 | 20,0 | 20,3872 | 65,0 | 215,340 |
| 5,5 | 1,54178 | 21,0 | 22,4769 | 70,0 | 249,743 |
| 6 | 1,83485 | 22,0 | 24,6686 | 70,0349 | 250,0 |
| 6.26412 | 2,0 | 22,1470 | 25,0 | 75,0 | 287,423 |
| 6,5 | 2,15340 | 23,0 | 26,9621 | 76,7194 | 300,0 |
| 7,0 | 2.49743 | 24,0 | 29,3576 | 80,0 | 326,947 |
| 7,5 | 2.86695 | 24,2608 | 30,0 | 82.4856 | 350,0 |
| 7,67195 | 3,0 | 25,0 | 31.8550 | 85.0 | 368,243 |
| 8,0 | 3.26195 | 26,0 | 34,4544 | 88,5860 | 400,0 |
| 8,28664 | 3,5 | 26.2047 | 35,0 | 90,0 | 412,841 |
| 8,5 | 3.68240 | 27,0 | 37,1557 | 92.4594 | 450,0 |
| 8,85880 | 4,0 | 26,0 | 39.9589 | 95,0 | 459,986 |
| 9,0 | 4.12841 | 28,0140 | 40,0 | 99.0442 | 300,0 |
| 9,39618 | 4,5 | 29,0 | 42.8641 | 100,0 | 509,680 |
| 9,5 | 4.59956 | 29.7133 | 45,0 | | |

## V. Tabelle über Bogen- und Winkelgeschwindigkeit (v und w° bezw. $\widehat{w}$ pro Sek.) und Umdrehungen n pro Minute für den Radius = 1.

Für den Radius $\rho = 1$ wird Winkelgeschwindigkeit = Umfangsgeschwindigkeit

$$\widehat{r} = v = \frac{\pi n}{30} = 0{,}10472\,n,\quad n = \frac{30}{\pi}\,v = \frac{30}{\pi}\,\widehat{w} = 9{,}5493\,v,\ \text{aus}\ \widehat{w} : w^\circ = 2\pi : 360$$

$$\text{folgt}\ w^\circ = \frac{180}{\pi}\,\widehat{w} = \frac{180}{\pi}\,v = 6\,n,\quad \widehat{w} = \frac{\pi}{180}\,w^\circ = 0{,}017453\,w^\circ.$$

| n | $v=\widehat{w}$ | w° | n | $v=\widehat{w}$ | w° |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1047 | 6 | 35 | 3,6652 | 210 |
| 2 | 0,2094 | 12 | 36 | 3,7699 | 216 |
| 3 | 0,3142 | 18 | 37 | 3,8746 | 222 |
| 4 | 0,4189 | 24 | 38 | 3,9794 | 228 |
| 5 | 0,5236 | 30 | 38,197 | 4,0 | 229° 9′ 55″ |
| 6 | 0,6283 | 36 | 39 | 4,0841 | 234 |
| 7 | 0,7330 | 42 | 40 | 4,1888 | 240 |
| 8 | 0,8378 | 48 | 41 | 4,2935 | 246 |
| 9 | 0,9425 | 54 | 42 | 4,3982 | 252 |
| 9,549 | 1,0 | 57° 17′ 45″ | 42,972 | 4,5 | 257° 49′ 52″ |
| 10 | 1,0472 | 60 | 43 | 4,5029 | 258 |
| 11 | 1,1519 | 66 | 44 | 4,6077 | 264 |
| 12 | 1,2566 | 72 | 45 | 4,7124 | 270 |
| 13 | 1,3614 | 78 | 46 | 4,8171 | 276 |
| 14 | 1,4661 | 84 | 47 | 4,9218 | 282 |
| 14,324 | 1,5 | 85° 56′ 37″ | 47,747 | 5,0 | 286° 28′ 45″ |
| 15 | 1,5708 | 90 | 48 | 5,0265 | 288 |
| 16 | 1,6755 | 96 | 49 | 5,1313 | 294 |
| 17 | 1,7802 | 102 | 50 | 5,2360 | 300 |
| 18 | 1,8850 | 108 | 51 | 5,3407 | 306 |
| 19 | 1,9897 | 114 | 52 | 5,4454 | 312 |
| 19,099 | 2,0 | 114° 35′ 30″ | 52,521 | 5,5 | 315° 7′ 37″ |
| 20 | 2,0944 | 120 | 53 | 5,5501 | 318 |
| 21 | 2,1991 | 126 | 54 | 5,6549 | 324 |
| 22 | 2,3038 | 132 | 55 | 5,7596 | 330 |
| 23 | 2,4086 | 138 | 56 | 5,8643 | 336 |
| 23,873 | 2,5 | 143° 14′ 22″ | 57 | 5,9690 | 342 |
| 24 | 2,5133 | 144 | 57,296 | 6,0 | 343° 46′ 30″ |
| 25 | 2,6180 | 150 | 58 | 6,0737 | 348 |
| 26 | 2,7227 | 156 | 59 | 6,1785 | 354 |
| 27 | 2,8274 | 162 | 60 | 6,2832 | 360 |
| 28 | 2,9322 | 168 | 61 | 6,3879 | 366 |
| 28,648 | 3,0 | 171° 53′ 15″ | 62 | 6,4926 | 372 |
| 29 | 3,0369 | 174 | 62,070 | 6,5 | 372° 25′ 12″ |
| 30 | 3,1416 | 180 | 63 | 6,5973 | 378 |
| 31 | 3,2463 | 186 | 64 | 6,7021 | 384 |
| 32 | 3,3510 | 192 | 65 | 6,8068 | 390 |
| 33 | 3,4558 | 198 | 66 | 6,9115 | 396 |
| 33,423 | 3,5 | 200° 32′ 7″ | 66,845 | 7,0 | 401° 4′ 12″ |
| 34 | 3,5605 | 204 | 67 | 7,0162 | 402 |

| n | $v = \overset{\frown}{w}$ | w° | n | $v = \overset{\frown}{w}$ | w° |
|---|---|---|---|---|---|
| **68** | 7,1209 | 408 | 95,493 | **10,0** | 572° 57′ 29″ |
| **69** | 7,2257 | 414 | **96** | 10,053 | 576 |
| **70** | 7,3304 | 420 | **97** | 10,158 | 582 |
| **71** | 7,4351 | 426 | **98** | 10,263 | 588 |
| 71,620 | **7,5** | 429° 43′ 7″ | **99** | 10,367 | 594 |
| **72** | | 432 | **100** | 10,472 | 600 |
| **73** | 7,6445 | 438 | 143,240 | **15,0** | 859° 26′ 14″ |
| **74** | 7,7498 | 444 | **150** | 15,708 | 900 |
| **75** | 7,8540 | 450 | 190,986 | **20,0** | 1145° 54′ 58″ |
| **76** | 7,9587 | 456 | **200** | 20,944 | 1200 |
| 76,394 | **8,0** | 458° 21′ 59″ | 238,733 | **25,0** | 1432° 23′ 53″ |
| **77** | 8,0634 | 462 | **250** | 26,180 | 1500 |
| **78** | 8,1681 | 468 | 286,479 | **30,0** | 1708° 52′ 26″ |
| **79** | 8,2729 | 474 | **300** | 31,416 | 1800 |
| **80** | 8,3776 | 480 | 334,226 | **35,0** | 2005° 21′ 22″ |
| **81** | 8,4823 | 486 | **350** | 36,652 | 2100 |
| 81,169 | **8,5** | 487° 0′ 51″ | 381,972 | **40,0** | 2301° 49′ 55″ |
| **82** | 8,5870 | 492 | **400** | 41,888 | 2400 |
| **83** | 8,6917 | 498 | 429,719 | **45,0** | 2578° 18′ 50″ |
| **84** | 8,7965 | 504 | **450** | 47,124 | 2700 |
| **85** | 8,9012 | 510 | 477,465 | **50,0** | 2864° 47′ 24″ |
| 85,944 | **9,0** | 515° 39′ 44″ | **500** | 52,360 | 3000 |
| **86** | 9,0059 | 516 | 572,958 | **60,0** | 3437° 44′ 53″ |
| **87** | 9,1106 | 522 | **600** | 62,632 | 3600 |
| **88** | 9,2153 | 528 | 668,451 | **70,0** | 4010° 42′ 22″ |
| **89** | 9,3201 | 534 | **700** | 73,304 | 4200 |
| **90** | 9,4248 | 540 | 763,944 | **80,0** | 4583° 39′ 50″ |
| 90,718 | **9,5** | 544° 18′ 36″ | **800** | 83,776 | 4800 |
| **91** | 9,5295 | 546 | 859,437 | **90,0** | 5156° 37′ 19″ |
| **92** | 9,6342 | 552 | **900** | 94,248 | 5400 |
| **93** | 9,7389 | 558 | 954,930 | **100,0** | 5729° 34′ 48″ |
| **94** | 9,8437 | 564 | **1000** | 104,720 | 6000° |
| **95** | 9,9484 | 570 | | | |

| Grösse: | Zahlenwert: | Grösse: | Zahlenwert: | Grösse: | Zahlenwert: |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | 3,141592653589 | $\frac{1}{\pi^3}$ | 0,032252 | $\sqrt[6]{\pi}$ | 1,210197 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1,570796 | $\pi^4$ | 97,409091 | $\sqrt[6]{\frac{1}{\pi}}$ | 0,826311 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 1,047198 | $\frac{1}{\pi^4}$ | 0,010266 | $\log \pi$ | 0,4971499 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,785398 | $\pi^5$ | 306,019685 | $\log \frac{1}{\pi}$ | 0,502850—1 |
| $\frac{\pi}{5}$ | 0,628319 | $\frac{1}{\pi^5}$ | 0,003268 | $\log \pi^2$ | 0,994300 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 0,523599 | $\pi^6$ | 961,389194 | $\log \frac{1}{\pi^2}$ | 0,005700—1 |
| $\frac{\pi}{7}$ | 0,448942 | $\frac{1}{\pi^6}$ | 0,001040 | $\log \pi^3$ | 1,491451 |
| $\frac{\pi}{8}$ | 0,392699 | $\sqrt{\pi}$ | 1,772454 | $\log \frac{1}{\pi^3}$ | 0,508550—2 |
| $\frac{\pi}{9}$ | 0,349066 | $\sqrt{2\pi}$ | 2,506628 | $\log \sqrt{\pi}$ | 0,248575 |
| $\frac{\pi}{12}$ | 0,261799 | $2\sqrt{\pi}$ | 3,544908 | $\log \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ | 0,751425—1 |
| $\frac{\pi}{16}$ | 0,196350 | $\pi\sqrt{2}$ | 4,442884 | $\log \sqrt[3]{\pi}$ | 0,165717 |
| $\frac{\pi}{32}$ | 0,098175 | $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ | 1,253314 | $\log \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ | 0,834283—1 |
| $\frac{\pi}{64}$ | 0,049087 | $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ | 0,564190 | $e$ | 2,7182818 |
| $\frac{\pi}{90}$ | 0,034907 | $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ | 0,797885 | $\frac{1}{e}$ | 0,367879 |
| $\frac{\pi}{180}$ | 0,017453 | $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ | 0,977205 | $\log e$ | 0,434294 |
| $\pi^2$ | 9,869604 | $\sqrt{\frac{90}{\pi}}$ | 5,352372 | $g$ | 9,808 |
| $4\pi^2$ | 39,478417 | $\sqrt[3]{\pi}$ | 1,462447 | $\frac{1}{g}$ | 0,101936 |
| $\frac{1}{4}\pi^2$ | 2,467401 | $\sqrt[3]{2\pi}$ | 1,845270 | $\frac{1}{2g}$ | 0,050968 |
| $\frac{1}{16}\pi^2$ | 0,616850 | $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ | 1,162447 | $g^2$ | 96,2361 |
| $\frac{1}{\pi^2}$ | 0,101321 | $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ | 0,682784 | $\frac{1}{g^2}$ | 0,010391 |
| $\frac{1}{\pi}$ | 0,318310 | $\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ | 0,860254 | $\sqrt{g}$ | 3,13209 |
| $\frac{16}{\pi}$ | 5,092958 | $\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ | 0,984745 | $\frac{1}{\sqrt{g}}$ | 0,319275 |
| $\frac{64}{\pi}$ | 20,371833 | $\pi\sqrt[3]{\pi}$ | 4,601149 | $\sqrt{2g}$ | 4,42940 |
| $\frac{30}{\pi}$ | 9,549297 | $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}$ | 0,466202 | $\pi\sqrt{g}$ | 9,83974 |
| $\frac{180}{\pi}$ | 57,295780 | $\sqrt[4]{\pi}$ | 1,331335 | $\frac{\pi}{\sqrt{g}}$ | 1,003033 |
| $\pi^3$ | 31,006277 | $\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}$ | 0,751130 | $2\sqrt{g}$ | 6,26418 |
| | | | | $\pi\sqrt{2g}$ | 13,91536 |
| | | | | $\frac{\pi}{\sqrt{2g}}$ | 0,709258 |
| | | | | $\frac{\pi^2}{g}$ | 1,006075 |

| | |
|---|---|
| **A. Feste Körper.** | |
| Achat | 2,59 |
| Alabaster | 2,876 |
| Alaunschiefer | 2,3—2,4 |
| Aluminium gehämmert | 2,67 |
| „ geschmolzen | 2,56 |
| Anthracit | 1,34—1,46 |
| Antimon | 6,65—6,72 |
| Asbest | 2,1—2,8 |
| Asphalt | 1,07—1,16 |
| Basalt | 2,8—3,2 |
| Baustein im Mittel | 2,5 |
| Bimstein | 0,91—1,65 |
| Blei (bei 14° C.) | 11,376 |
| Braunkohle | 0,8—1,5 |
| Braunstein | 4,72—4,92 |
| Bronze | 8,3—8,6 |
| Butter | 0,94 |
| Cement | 2,72—3,05 |
| Koks in Stücken | 0,51 |
| Gaskoks | 0,33 |
| Diamant | 3,5 |
| Eis (bei 0° C.) | 0,92 |
| Eisen (rein) | 7,79 |
| Gusseisen weiss | 7,50 |
| „ grau | 7,10 |
| „ halbiert | 7,06 |
| „ Stabeisen | 7,6—7,8 |
| „ im Draht | 7,6—7,75 |
| Elfenbein | 1,8—1,92 |
| Erde (lehmige Erde, fest gestampft) | |
| frisch | 2,06 |
| trocken | 1,93 |
| Gartenerde frisch | 2,05 |
| „ trocken | 1,63 |
| Erde, mager und trocken | 1,34 |
| Feldsteine | 2,5 |
| Glas Fenster- | 2,64 |
| „ Spiegel- | 2,46 |
| „ Krystall- | 2,89 |
| „ Flint- | 3,33 |
| Glockenmetall | 8,81 |
| Gold gegossen | 19,26 |
| „ gediegen | 18,6—19,1 |
| Granit | 2,51—3,05 |
| Gummi vulkanisiert | 1,00 |
| Guttapercha | 0,98 |
| Gips gebrannt | 1,82 |
| „ gegossen, trocken | 0,97 |
| Holz in Stücken | |
| trocken Buchen | 0,45 |
| „ „ Eichen | 0,52 |
| „ „ Fichten | 0,32 |
| „ „ Tannen | 0,30 |
| Holzkohle von Nadelholz | 0,28—0,44 |
| „ „ Eichenholz | 0,57 |
| „ in Haufen von Nadelholz | 0,18 |
| Eichenholz | 0,23 |
| Kalk gebrannt | 2,3—3,18 |
| Kalkmörtel trocken | 1,64 |
| „ frisch | 1,78 |
| Kalkstein | 2,46—2,84 |
| Kanonengut | 8,44 |
| Kautschuk | 0,93 |
| Kies | 1,8 |
| Knochen | 1,66 |
| Kochsalz | 2,1—2,2 |
| Kreide, weisse | 1,8—2,66 |
| Kupfer gegossen | 8,59—8,90 |
| Draht oder gehämmert | 8,78—9,0 |
| Lehm trocken | 1,52 |
| „ frisch | 1,67—2,85 |
| Marmor | 2,52—2,85 |
| Mauerwerk, Bruchstein | 2,4—2,46 |
| „ Sandstein | 2,05—2,2 |
| „ Ziegelstein | 1,47—1,70 |
| „ poröse od. Lochziegel | 0,95 |
| Mehl | 0,7—0,8 |
| Messing gegossen | 8,4—8,71 |
| „ gewalzt | 8,52—8,62 |
| „ gezogen | 8,43—8,73 |
| Papier | 0,7—1,16 |
| Pech | 1,071 |
| Platin | 21,45 |
| Porzellan | 2,38—2,49 |
| Quarz | 2,5—2,8 |
| Roggen (geschüttet) | 0,65—0,78 |
| Sand fein, trocken | 1,4—1,64 |
| „ fein, feucht | 1,9—2,05 |
| „ grob | 1,37—1,49 |
| Sandstein | 1,9—2,7 |
| Schiefer | 2,64—2,67 |
| Schnee | 0,125 |
| Silber gegossen | 10,1—10,47 |
| „ gehämmert | 10,51—10,62 |
| Stahl Cement- | 7,26—7,8 |
| „ gefrischt | 7,5—7,81 |
| „ Guss- | 7,83—7,92 |
| Stärkemehl | 1,53 |
| „ Cannel | 1,42 |
| Stückkohle | 1,21—1,51 |
| Steinsalz | 2,22—2,3 |
| Thon | 1,8—2,63 |
| Torf, trocken | 0,51 |
| Wachs | 0,97 |
| [Wasser (bei 4°) | 1,00] |
| Wismuth | 9,78 |
| Ziegelstein | 1,4—2,2 |
| „ -Klinker | 1,52—2,29 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zink gegossen | 6,8—7,05 | Salpetersäure | 1,53 |
| „ gewalzt | 7,125 | Salzsäure | 1,19 |
| Zinn | 7,29 | Schwefelsäure | 1,842 |
| Zucker | 1,61 | Seewasser | 1,03 |
| | | Theer | 1,195 |
| **B. Flüssigkeiten.** | | Terpentinöl | 0,873 |
| | | Wasser | 1,000 |
| Äther | 0,737 | Wein | 0,992—1,002 |
| Alkohol | 0,793 | | |
| Kaumöl | 0,917 | **C. Gasförmige Körper.** | |
| Benzin | 0,850 | Ammoniak | 0,596 |
| Bergamottenöl | 0,85 | Chlor | 2,470 |
| Bier | 1,023—1,034 | Kohlenoxyd | 0,967 |
| Eisweiss | 1,041 | Kohlensäure | 1,529 |
| Glycerin | 1,270 | Kohlenwasserstoff | 0,978 |
| Kreosot | 1,037 | Grubengas | 0,559 |
| Leinöl | 0,935 | Sauerstoff | 1,106 |
| Leberthran | 0,945 | Stickstoff | 0,972 |
| Milch | 1,025 | Steinkohlengas | 0,48—0,51 |
| Mohnöl | 0,924 | Wasserdampf bei 100° | 0,47 |
| Olivenöl | 0,918 | Wasserstoff | 0,0692 |
| Quecksilber | 13,596 | Luft bei 0° | 1,000 |
| Rüböl | 9,914 | Luft (wenn Wasser = 1) | 0,0013 |

**Leipzig.**

Druck von Grimme & Trömel.





